

Оценка эффективности оптимизирующих преобразований алгоритмов операций над ультраграфами

01, январь 2013

DOI: 10.7463/0113.0547731

Овчинников В. А., Иванова Г. С., Павлов А. Е.

УДК 004.3 +519.6

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

vaovchinnikov@gmail.com

gsivanova@gmail.com

alex_wonderland@mail.ru

Введение

Ультраграф является перспективной моделью объектов при решении таких задач как потоковый анализ и синтез, синтез структур высокого уровня сложности [1]. Эти задачи имеют, как правило, высокую размерность входа, а программы их решения характеризуются большой временной сложностью.

В работах [2, 3, 4, 5, 6, и др.] рассмотрен ряд методов и приёмов снижения вычислительной сложности алгоритмов на множествах и графах. Одним из наиболее эффективных методов снижения последней является сокращение времени выполнения основных операций, производимых над ультраграфами. Однако авторам не известны работы, посвящённые исследованию оптимизирующих преобразований алгоритмов операций над ультраграфами.

Целью исследования является экспериментальная оценка эффективности способов снижения временной сложности алгоритмов операций над ультраграфами. В теоретической части показано, что наибольший вклад в вычислительную сложность алгоритма операции добавления вершины в ультраграф вносят копирование множеств и формирование множеств образов и прообразов вершин и ребер относительно предикатов смежности. Констатируется, что это характерно для всех операций над ультраграфами. На основе выполненного анализа выбраны используемые преобразования.

В разделе «экспериментальные исследования» даётся характеристика ультраграфа, на котором проводились исследования, Обсуждаются их результаты. Показана высокая эффективность применённых преобразований.

1 Теоретический анализ алгоритмов операций над ультраграфами

Операции над ультраграфами, соответствующие проектным процедурам над структурами сложных систем, в которых компоненты связаны не попарно, описаны в [7, 8]. Для выбора объекта исследования приведём алгоритм операции добавления вершины и результаты его анализа.

Обозначение операции:

$$H_{U_1}(X_1, U_1) = H_U(X, U) + H_U^k(x_k, \{U_k^+, U_k^-\}).$$

Здесь: x_k добавляемая вершина; $U_k^+ = \Gamma_1 x_k$ – множество ребер, ей инцидентных;

$U_k^- = \Gamma_2 x_k$ – множество ребер, которым она инцидентна.

Порядок выполнения операции:

1. Создаем множества X_1 , $\Gamma_1 X_1$ и $\Gamma_2 X_1$:

$$X_1 = X \cdot x_k; \quad \Gamma_1 X_1 = \Gamma_1 X \cdot \Gamma_1 x_k; \quad \Gamma_2 X_1 = \Gamma_2 X \cdot \Gamma_2 x_k.$$

2. Копируем множество U под именем U_1 :

$$U_1 = U.$$

3. Определяем множество образов ребер $\Gamma_2 U_1$, занося в него $\Gamma_2 u_j$ из множества $\Gamma_2 U$, если ребро u_j не принадлежит U_k^- , и добавляя вершину x_k в образы тех ребер, которым она инцидентна:

$$\Gamma_2 U_1 = \left\{ \Gamma_2 u_j : u_j \notin \Gamma_2 x_k \vee \left\{ \Gamma_2 u_j \cdot x_k \right\} : u_j \in \Gamma_2 x_k / u_j \in U_1, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U \right\}.$$

4. Формируем множество прообразов ребер $\Gamma_1 U_1$, занося в него $\Gamma_1 u_j$ из множества $\Gamma_1 U$, если ребро u_j не принадлежит U_k^+ , и добавляя вершину x_k в образы тех ребер, которые ей инцидентны.

$$\Gamma_1 U_1 = \left\{ \Gamma_1 u_j : u_j \notin \Gamma_1 x_k \vee \left\{ \Gamma_1 u_j \cdot x_k \right\} : u_j \in \Gamma_1 x_k / u_j \in U_1, \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U \right\}.$$

5. Создаем множество образов $F_1 X_1$ вершин относительно предиката смежности F_1 , занося $F_1 x_i$ из $F_1 X$, если вершина x_k не инцидентна ребрам, которые принадлежат образу $\Gamma_1 x_i$ вершины x_i , и добавляя в $F_1 x_i$ вершину x_k в противном случае. Определяем вершины, смежные добавляемой, и заносим их в $F_1 X_1$.

$$F_1 X_1 = \left\{ \left\{ F_1 x_i \in F_1 X : \Gamma_1 x_i \cap \Gamma_2 x_k = \emptyset \vee F_1 x_i \cdot x_k : \Gamma_1 x_i \cap \Gamma_2 x_k \neq \emptyset / x_i \in X, \right. \right. \\ \left. \left. \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X \right\} \cdot F_1 x_k \right\},$$

где

$$F_1 x_k = \bigcup_{u_j \in \Gamma_1 x_k} \Gamma_2 u_j, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U.$$

6. Формируем множество прообразов $F_1^{-1}X_1$, занося $F_1^{-1}x_i$ из $F_1^{-1}X$, если вершине x_k не инцидентны ребра прообраза Γ_2x_i , и добавляя в $F_1^{-1}x_i$ вершину x_k в противном случае. Определяем вершины прообраза $F_1^{-1}x_k$ и заносим его в множество $F_1^{-1}X_1$.

$$F_1^{-1}X_1 = \left\{ \left\{ F_1^{-1}x_i \in F_1^{-1}X : \Gamma_2x_i \cap \Gamma_1x_k = \emptyset \vee F_1^{-1}x_i \bullet x_k : \Gamma_2x_i \cap \Gamma_1x_k \neq \emptyset / x_i \in X, \right. \right. \\ \left. \left. \Gamma_2x_i \in \Gamma_2X \right\} \bullet F_1^{-1}x_k \right\},$$

где

$$F_1^{-1}x_k = \bigcup_{u_j \in \Gamma_2x_k} \Gamma_1u_j, \Gamma_1u_j \in \Gamma_1U.$$

7. Определяем множество образов ребер F_2U_1 , копируя в него F_2u_j из F_2U , если ребро u_j не принадлежит U_k^- . В противном случае добавляем в F_2u_j не принадлежащие ему ребра множества U_k^+ .

$$F_2U_1 = \left\{ F_2u_j : u_j \notin \Gamma_2x_k \vee F_2u_j \cup \Gamma_1x_k : u_j \in \Gamma_2x_k / u_j \in U_1, F_2u_j \in F_2U \right\}.$$

8. Формируем множество прообразов ребер $F_2^{-1}U_1$, копируя в него $F_2^{-1}u_j$ из $F_2^{-1}U$, если ребро u_j не принадлежит U_k^+ . В противном случае добавляем в $F_2^{-1}u_j$ не принадлежащие ему ребра множества U_k^- .

$$F_2^{-1}U_1 = \left\{ F_2^{-1}u_j : u_j \notin \Gamma_1x_k \vee F_2^{-1}u_j \cup \Gamma_2x_k : u_j \in \Gamma_1x_k / u_j \in U_1, F_2^{-1}u_j \in F_2^{-1}U \right\}.$$

Асимптотическая оценка вычислительной сложности операции базируется на мерах сложности формирования множеств аналитического представления ультраграфа. Для её определения подсчитывается количество операций сравнения и копирования в функции от мощности обрабатываемых множеств, считая при этом, что вычислительные сложности этих операций одинаковы. Выполним такой подсчет на примере формирования множества образов ребер:

$$\Gamma_2U_1 = \left\{ \Gamma_2u_j : u_j \notin \Gamma_2x_k \vee \left\{ \Gamma_2u_j \bullet x_k \right\} : u_j \in \Gamma_2x_k / u_j \in U_1, \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U \right\}$$

- проверка условия $u_j \notin \Gamma_2x_k$ требует максимум $|\Gamma_2x_k|$ сравнений,
- при благоприятном исходе выполняется копирование $|\Gamma_2u_j|$ элементов,
- количество благоприятных исходов равно $|U_1| - |\Gamma_2x_k|$,
- количество противоположных исходов равно $|\Gamma_2x_k|$ и при каждом таком исходе происходит копирование $|\{ \Gamma_2u_j \bullet x_k \}|$ элементов. Будем считать, что при любом исходе копируется $|\Gamma_2x_k|$ элементов. Отсюда суммарное количество операций будет

$$\left(|\Gamma_2x_k| + |\Gamma_2u_j| \right) \times \left(|U_1| - |\Gamma_2x_k| \right) + |\Gamma_2x_k| \times |\Gamma_2u_j|.$$

Оценки сложности формирования множеств аналитического представления ультраграфа приведены в таблице 1. В ней использованы обозначения $n = |X|$ и $m = |U|$.

Таблица 1 – Оценки сложности формирования множеств при выполнении операции добавления вершины

№ п/п	Формируемые множества	Количество операций сравнения и копирования в функции от мощности обрабатываемых множеств	Мера сложности формирования множества
1.1.	X_1	$ X = n$	$O(n)$
1.2.	$\Gamma_1 X_1$	$ \Gamma_1 X + \Gamma_1 x_i $	$O(n)$ или $O(m)$, если $ \Gamma_1 x_i \leq m$, $O(n)$, если $ \Gamma_1 x_i = const^*$
1.3.	$\Gamma_2 X_1$	$ \Gamma_2 X + \Gamma_2 x_i $	$O(n)$ или $O(m)$, если $ \Gamma_2 x_i \leq m$, $O(n)$, если $ \Gamma_2 x_i = const$
2.	U_1	$ U = m$	$O(m)$
3.	$\Gamma_2 U_1$	$(\Gamma_2 x_k + \Gamma_2 u_j) \times (U_1 - \Gamma_2 x_k) + \Gamma_2 x_k \times \Gamma_2 u_j $	$O(m \cdot n)$, если $ \Gamma_2 x_k = const$ и $ \Gamma_2 u_j \leq n$, $O(m)$, если $ \Gamma_2 x_k $ и $ \Gamma_2 u_j = const$
4.	$\Gamma_1 U_1$	$(\Gamma_1 x_k + \Gamma_1 u_j) \times (U_1 - \Gamma_1 x_k) + \Gamma_1 x_k \times \Gamma_1 u_j $	$O(m \cdot n)$, если $ \Gamma_1 x_k = const$ и $ \Gamma_1 u_j \leq n$, $O(m)$, если $ \Gamma_1 x_k $ и $ \Gamma_1 u_j = const$
5.	$F_1 X_1$	$(\Gamma_1 x_i \times \Gamma_2 x_k + F_1 x_i) \times X $	$O(m^2 \cdot n)$, если $ \Gamma_1 x_i $ и $ \Gamma_2 x_k \leq m$, $O(n)$, если $ \Gamma_1 x_i $, $ \Gamma_2 x_k $ и $ F_1 x_i = const$
6.	$F_1^{-1} X_1$	$(\Gamma_2 x_i \times \Gamma_1 x_k + F_1^{-1} x_i) \times X $	$O(m^2 \cdot n)$, если $ \Gamma_2 x_i $ и $ \Gamma_1 x_k \leq m$, $O(n)$, если $ \Gamma_2 x_i $, $ \Gamma_1 x_k $ и $ F_1^{-1} x_i = const$
7.	$F_2 U_1$	$(\Gamma_2 x_k + F_2 u_j) \times (U_1 - \Gamma_2 x_k) + (\Gamma_2 x_k + F_2 u_j \times \Gamma_1 x_k) \times \Gamma_2 x_k $	$O(m^3)$, если $ \Gamma_2 x_k $, $ \Gamma_1 x_k $ и $ F_2 u_j \leq m$, $O(m)$, если $ \Gamma_2 x_k $, $ \Gamma_1 x_k $ и $ F_2 u_j = const$
8.	$F_2^{-1} U_1$	$(\Gamma_1 x_k + F_2^{-1} u_j) \times (U_1 - \Gamma_1 x_k) + (\Gamma_1 x_k + F_2^{-1} u_j \times \Gamma_2 x_k) \times \Gamma_1 x_k $	$O(m^3)$, если $ \Gamma_1 x_k $, $ \Gamma_2 x_k $ и $ F_2^{-1} u_j \leq m$, $O(m)$, если $ \Gamma_1 x_k $, $ \Gamma_2 x_k $ и $ F_2^{-1} u_j = const$

Отсюда следует, что асимптотическая оценка вычислительной сложности для данной операции над ультраграфом равна:

- в худшем $O(m^3)$ при $m > n$, если $|\Gamma_{2x_k}|$, $|\Gamma_{1x_k}|$ и $|F_{2u_j}|$ или $|\Gamma_{2x_k}|$, $|\Gamma_{1x_k}|$ и $|F_{2^{-1}u_j}|$ ограничены величиной m , и $O(m^2n)$ при $n > m$, если $|\Gamma_{2x_k}|$ и $|\Gamma_{1x_i}|$ или $|\Gamma_{1x_k}|$ и $|\Gamma_{2x_i}|$ ограничены величиной m .

- в лучшем $O(m)$ при $m > n$ или $O(n)$ при $n > m$, если мощности образов и прообразов вершин и ребер ограничены константой.

Из таблицы видно, что наибольший вклад в вычислительную сложность операции вносят операции копирования и процедуры формирования множеств образов и прообразов вершин и ребер относительно предикатов смежности. Как показывает анализ описаний алгоритмов [7, 8], эти процедуры присутствуют во всех операциях над ультраграфами. Поэтому достаточно исследовать одну операцию, например добавление вершины в ультраграф.

В таблице 2 показано несколько видов оптимизирующих преобразований (в том числе над упорядоченными множествами [9]) и оценка их вклада в снижение вычислительной сложности алгоритмов [10].

Таблица 2 – Оптимизирующие преобразования и их вклад в снижение вычислительной сложности

Оптимизирующее преобразование	Описание оптимизирующего преобразования	Вклад в снижение вычислительной сложности
1. Замена операции копирования на присваивание указателя	В участках программы, где множеству присваиваются все элементы другого множества, цикл копирования элементов заменяется присваиванием указателя на структуру, содержащую в себе элементы этого множества.	Высокий
2. Исключение лишних проверок при вычислении выражения $\Gamma_{1x_i} \cap \Gamma_{2x_k} = \emptyset$, $\Gamma_{1x_i} \cap \Gamma_{2x_k} \neq \emptyset$, $\Gamma_{2x_i} \cap \Gamma_{1x_k} = \emptyset$, $\Gamma_{2x_i} \cap \Gamma_{1x_k} \neq \emptyset$	Замена полного перебора вершин для пересечения двух множеств на попарное сравнение элементов двух множеств и копированием с последующим их сдвигом при равенстве ключей или сдвигом элементов с меньшим ключом до первого их совпадения	Существенный, при большой мощности множеств образов и прообразов вершин и ребер относительно предикатов инцидентности.

<p>3. Исключение лишних проверок при вычислении выражения</p> $F_2 u_j \cup \Gamma_1 x_k$ $F_2^{-1} u_j \cup \Gamma_2 x_k$	<p>Замена полного перебора вершин для объединения двух множеств на попарное сравнение элементов множеств и копированием элемента с меньшим ключом с последующим его сдвигом или сдвигом элементов каждого из множеств при равенстве ключей.</p>	<p>Существенный, при большой мощности множеств образов и прообразов ребер и вершин относительно предикатов смежности и инцидентности соответственно.</p>
--	---	--

2 Реализация и экспериментальные исследования

Известно, что время выполнения алгоритма существенно зависит от выбора структур данных, с которыми он оперирует [5, 11]. Для экспериментальной оценки вычислительной сложности операции добавления вершины в ультраграф было использовано матричное и аналитическое представление ультраграфа. При аналитическом представлении для возможности использования преобразования «замена операции копирования на присваивание указателя» образы и прообразы вершин и ребер реализованы структурой «вектор списков».

Для проведения натуральных экспериментов был разработан программный комплекс, включающий в себя описание классов структур данных для матричного и аналитического представления ультраграфов, а также методы, реализующие операцию добавления вершины в ультраграф.

Измерения проводились для ультраграфа с мощностями множества вершин и множества ребер $n = m = 1000$. Множества аналитического представления ультраграфа генерировались с помощью датчика случайных чисел с использованием соотношений:

$$\sum_{i=1}^n \rho^+(x_i) = \sum_{j=1}^m A^-(u_j) \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n \rho^-(x_i) = \sum_{j=1}^m A^+(u_j),$$

где $\rho^+(x_i) = |\Gamma_1 x_i|$ и $\rho^-(x_i) = |\Gamma_2 x_i|$ – количество ребер, инцидентных вершине x_i , и количество ребер, которым она инцидентна, $A^+(u_j) = |\Gamma_2 u_j|$ и $A^-(u_j) = |\Gamma_1 u_j|$ – количество вершин, инцидентных ребру u_j , и количество вершин, которым оно инцидентно. Значения указанных параметров менялось в диапазоне $1 \leq \rho^+(x_i) + \rho^-(x_i) \leq 100$ и $2 \leq A^+(u_j) + A^-(u_j) \leq 100$.

Количество измерений для оценки времени выполнения операции в каждом случае составляло 100 повторений, результаты измерений усреднялись. При этом среднеквадратичное отклонение не превышало 7–10 % от среднего значения.

На рисунке 1 показан вклад в снижение вычислительной сложности разных видов оптимизирующих преобразований при представлении образов и прообразов вершин и рёбер ультраграфа вектором списков и различных значениях мощности множеств образов и прообразов вершин и ребер (один, десять и пятьдесят процентов от $n=m=1000$). Оценка выигрыша от оптимизации произведена в процентах с использованием соотношения:

$$[(t^{\text{неопт}} - t^{\text{опт}i}) / t^{\text{неопт}}] 100\%$$

где $t^{\text{неопт}}$ – время выполнения операции без применения оптимизирующих преобразований, $t^{\text{опт}i}$ – время выполнения операции с применением i -го оптимизирующего преобразования.

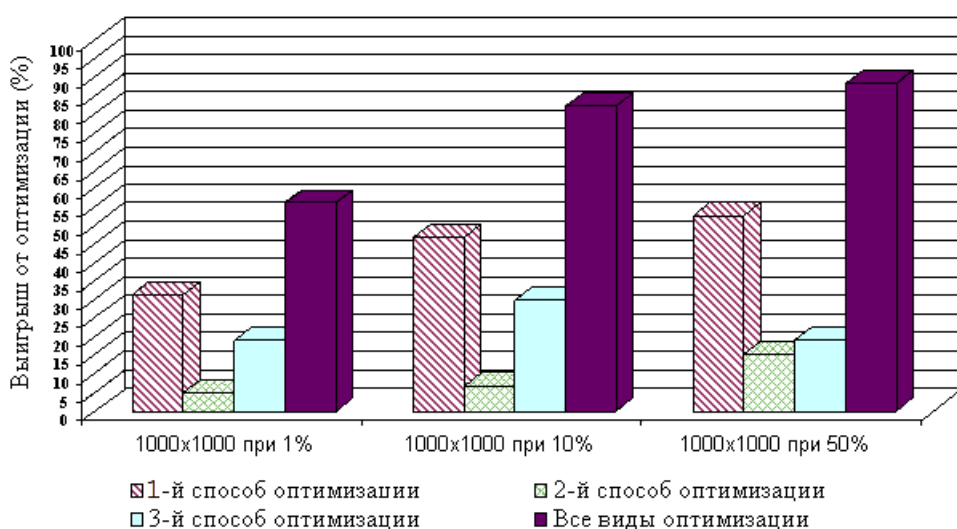


Рисунок 1 – Вклад оптимизирующих преобразований в снижение вычислительной сложности при представлении множеств аналитического задания ультраграфа вектором списков

Как видно из данных, представленных на рисунке 1, наибольший эффект дает применение оптимизирующего преобразования 1-го вида, что можно объяснить исключением большого количества операций копирования элементов множеств во всех пунктах алгоритма. Суммарный выигрыш от применения описанных выше оптимизирующих преобразований составил в ряде случаев от 53 до 87 % от исходного времени выполнения операции добавления вершины в ультраграф. Большой вклад

третьего оптимизирующего преобразования по сравнению с вторым объясняется тем, что как правило, $|F_2u_j| > |\Gamma_{1x_k}|$ и $|F_2^{-1}u_j| > |\Gamma_{2x_k}|$ в пределе в $|\Gamma_{2u_j}|$ раз.

Эффективность и возможность применения использованных для оценки оптимизирующих преобразований напрямую зависит от выбранной структуры представления данных. Так, например, при матричном представлении ультраграфа невозможно применить преобразование 1, а преобразования 2 и 3 сводятся к попарному сравнению элементов строк таблиц истинности соответствующих двуместных и одноместных предикатов. Например, при определении $\Gamma_{1x_i} \cap \Gamma_{2x_k}$ выполняется попарное сравнение элементов i -ой строки матрицы истинности двуместного предиката $\Gamma_1(X, U)$ – «вершинам множества X инцидентны рёбра множества U » с элементами характеристического вектора одноместного предиката $\Gamma_{2x_k}(U)$ «рёбра множества U , которым инцидентна вершина x_k ».

На рисунке 2 показаны значения времени выполнения операции добавления вершины для матричного и аналитического представления ультраграфа при различных значениях мощности множеств образов и прообразов вершин и рёбер (1 % и 10 % от $n = m = 1000$).

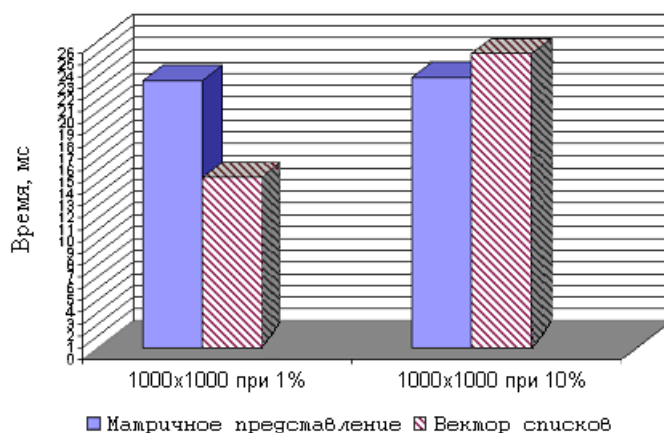


Рисунок 2 – Зависимость времени выполнения операции добавления вершины к ультраграфу от структуры данных и связности ультраграфа

Зависимость на рисунке 2 показывает, что матричное представление ультраграфа не эффективно при низкой связности ультраграфа. Для ультраграфов с большими значениями мощности множеств образов и прообразов, время выполнения операций при матричном представлении достаточно близко по значению к оптимизированным операциям при использовании вектора списков. Однако следует иметь в виду, что использование матриц ограничено размером адресного пространства оперативной памяти.

Заключение

На основании выполненных исследований можно утверждать, что использованные оптимизирующие преобразования обеспечивают существенное сокращение времени выполнения операций над ультраграфами. Такие преобразования целесообразно применять при разработке алгоритмов, в которых копируются множества большой мощности и многократно выполняются операции над ними.

Полученные результаты позволяют сделать предположение о перспективности дальнейших исследований в области разработки и оценки эффективности оптимизирующих преобразований алгоритмов на множествах и графах.

Список литературы

1. Овчинников В.А. Математические модели объектов задач структурного синтеза // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2009. № 3. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/115712.html> (дата обращения 25.01.2013).
2. Ахо А.В., Хопкрофт Д., Ульман Д.Д. Структуры данных и алгоритмы: пер. с англ. М.: Вильямс, 2001. 384 с.
3. Гудман С., Хидетниемеи С. Введение в разработку и анализ алгоритмов: пер. с англ. М.: Мир, 1981. 368 с.
4. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. СПб: Питер, 2001. 304 с.
5. Овчинников В.А. Алгоритмизация комбинаторно-оптимизационных задач при проектировании ЭВМ и систем: учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 288 с.
6. Касьянов В.Н. Оптимизирующие преобразования программ. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 336 с.
7. Овчинников В.А. Операции над ультра- и гиперграфами для реализации процедур анализа и синтеза структур сложных систем. Часть 2 // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2009. № 11. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/133223.html> (дата обращения 25.01.2013).
8. Овчинников В.А. Операции над ультра- и гиперграфами для реализации процедур анализа и синтеза структур сложных систем. Часть 3 // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2009. № 12. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/134335.html> (дата обращения 25.01.2013).

9. Овчинников В.А. Операции над упорядоченными множествами // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2011. № 6. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/188322.html> (дата обращения 25.01.2013).

10. Овчинников В.А., Иванова Г. С. Оценка эффективности применения операций над упорядоченными множествами // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2011. № 10. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/239406.html> (дата обращения 25.01.2013).

11. Иванова Г.С., Пасечников К.А. Синтез оптимальных структур данных для решения задач на графах // Вестник МГТУ имени Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2008. № 4 (73). С. 29-38.

Evaluation of efficiency of optimizing transformation for algorithms of ultra-graph operations

01, January 2013

DOI: 10.7463/0113.0547731

Ovchinnikov V.A., Ivanova G., S., Pavlov A.E.

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation

vaovchinnikov@gmail.comgsivanova@gmail.comalex_wonderland@mail.ru

In this article the authors consider experimental evaluation of reducing computational complexity of algorithms of ultra-graph operations. According to the results of theoretical analysis of the algorithms of ultra-graph operations, procedures, which introduce the greatest contribution to their computational complexity, were defined; ways of its reducing were selected. With the help of special software contribution of optimizing transformations to reducing computational complexity of vertex addition was estimated. Experimental results showed high efficiency of the conversion process - total reduction of computational complexity of the algorithm was up to 87%.

Publications with keywords: [efficiency](#), [algorithm](#), [ultragraph operations](#), [computational \(time\) complexity](#), [optimizing transformations](#)

Publications with words: [efficiency](#), [algorithm](#), [ultragraph operations](#), [computational \(time\) complexity](#), [optimizing transformations](#)

References

1. Ovchinnikov V.A. Matematicheskie modeli ob"ektov zadach strukturnogo sinteza [The mathematical models of objects for structural creation tasks]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2009, no. 3. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/115712.html> , accessed 25.01.2013.
2. Aho A.V., Hopcroft J.E., Ullman J.D. *Data Structures and Algorithms*. Addison-Wesley, 1983. (Russ. ed.: Akho A.V., Khopkroft D., Ul'man D.D. *Struktury dannykh i algoritmy*. Moscow, Vil'iams, 2001. 384 p.).
3. Goodman S.E., Hedetniemi S.T. *Introduction to the Design & Analysis of Algorithms*. McGraw-Hill, New York, 1977. 371 p. (Russ. ed.: Gudman S., Khidetniemi S. *Vvedenie v razrabotku i analiz algoritmov*. Moscow, Mir, 1981. 368 p.).

4. Novikov F. A. *Diskretnaia matematika dlia programmistov* [Discrete mathematics for programmers]. St. Petersburg, Piter, 2001. 304 p.
5. Ovchinnikov V.A. *Algoritmizatsiia kombinatorno-optimizatsionnykh zadach pri proektirovanii EVM i system* [Algorithmization of combinatorial and optimization problems when designing a computer and systems]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2001. 288 p.
6. Kas'ianov V.N. *Optimiziruiushchie preobrazovaniia program* [Optimizing conversions of programs]. Moscow, Nauka, 1988. 336 p.
7. Ovchinnikov V.A. Operatsii nad ul'tra- i gipergrafami dlia realizatsii protsedur analiza i sinteza struktur slozhnykh sistem. Chast' 2 [Operations over ultra- and hypercolumns for realisation of procedures of the analysis and synthesis of structures of difficult systems (Part 2)]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2009, no. 11. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/133223.html> , accessed 25.01.2013.
8. Ovchinnikov V.A. Operatsii nad ul'tra- i gipergrafami dlia realizatsii protsedur analiza i sinteza struktur slozhnykh sistem. Chast' 3 [Operations over ultra- and hypercolumns for realisation of procedures of the analysis and synthesis of structures of difficult systems (Part 3)]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2009, no. 12. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/134335.html> , accessed 25.01.2013.
9. Ovchinnikov V.A. Operatsii nad uporiadochennymi mnozhestvami [Ordered set operations]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2011, no. 6. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/188322.html> , accessed 25.01.2013.
10. Ovchinnikov V.A., Ivanova G. S. Otsenka effektivnosti primeneniia operatsii nad uporiadochennymi mnozhestvami [Evaluation the effectiveness of ordered set operations]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2011, no. 10. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/239406.html> , accessed 25.01.2013.
11. Ivanova G.S., Pasechnikov K.A. Sintez optimal'nykh struktur dannykh dlia resheniia zadach na grafakh [Synthesis of optimal data structures for solving problems on graphs]. *Vestnik MGTU imeni N.E. Baumana. Ser. Priborostroenie* [Bulletin of the Bauman MSTU. Ser. Instrument Engineering], 2008, no. 4 (73), pp. 29-38.