электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

Методика изложения понятия условной вероятности в курсе теории вероятностей

10, октябрь 2015
Тырина О. В.
УДК: 519.21

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
tyrolga@gmail.com

Введение

Понятие случайности, вероятности, случайной функции и случайного процесса проникли в настоящее время во все области естествознания и за его пределы и активно используются на практике в инженерном деле, генетике, интернете и т.д.

Курс теории вероятностей в МГТУ им. Н.Э. Баумана традиционно основывается на аксиоматическом подходе А.Н. Колмогорова, но без использования понятия интеграла Лебега и связанных с ним сложных понятий теории меры и функционального анализа. Такой подход позволяет опираться на язык, понятия и интуитивное понимание теории множеств.

Практика преподавания показывает, что, тем не менее, усвоение основных понятий теории вероятностей представляет собой трудную задачу для студентов.

Определение вероятности в начальном курсе теории вероятности

Чтобы облегчить усвоение, понятие вероятности события сначала определяется на языке теории множеств для так называемой «классической схемы», то есть для модели, в котором пространство элементарных исходов Ω, конечно и все исходы равновозможны.

Предварительно рекомендуется напомнить вкратце основную терминологию теории множеств (множество, подмножество, пересечение множеств, объединение множеств, дополнение подмножества) с использованием наглядного языка диаграмм Эйлера-Венна.

В классической схеме событие A понимается как некоторое подмножество пространства всех элементарных исходов Ω, а вероятность $P(A)$ события A определяется как отношение числа $N(A)$ благоприятствующих событию A элементарных исходов (то есть числа элементов подмножества A) к общему числу $N(\Omega)$ равновозможных элементарных исходов (то есть к числу всех элементов множества Ω): $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$. Тем самым, введенные определения по сути представляют собой переобозначения (синонимы) понятий теории множества. Новым является лишь само понятие вероятности $P(A)$.

Для удобства студентам можно выписать «словарик элементарной теории вероятностей»: «элементарное событие» – элемент объемлющего множества Ω, «событие» – подмножество и т.д.

В этот момент у студентов обычно возникает важный для понимания вопрос, как это определение вероятности соотносится с интуитивным эмпирическим пониманием вероятности как частоты успеха при неограниченно большом повторении эксперимента. Например, при подбрасывании симметричной монеты возможны исходы: выпадение «орла» и выпадение «решки». Монета предполагается симметричной, поэтому исходы должны быть равновероятны, то есть должны быть равны $1/2$. Однако если подбросить монету два раза, то мы можем получить и два «орла», и две «решки». Как тогда понимать то, что вероятности выпадения «орла» и «решки» равны между собой (и равны одной второй). Здесь студентам необходимо пояснить, что имеет место так называемый закон больших чисел, который в случае классической схемы гарантирует, что при неограниченно большом числе повторений одного и того же случайного испытания (например, подбрасывания одной и той же монеты в неизменных идеальных условиях) частота появления события A (например, выпадения «орла») будет стремиться, в некотором точном математическом смысле, к вероятности $P(A)$ (в случае подбрасывания идеальной монеты – к $1/2$).

Если же для какого-то явления нельзя гарантировать возможность повторения при неизменных условиях, то тогда любая вероятностная модель не будет в полной мере соответствовать эмпирическому/частотному пониманию вероятности.

Далее для закрепления введенных понятий рассматриваются конкретные модели с конечным пространством равновозможных элементарных исходов (классическая схема). Вероятности в этих классических моделях вычисляются с помощью формул комбинаторики. При этом у студентов должно закрепиться понимание того, что вероятности событий в классической схеме представляют собой частоты успехов при многократном повторении эксперимента.

Вторым видом элементарных моделей являются модели с геометрическими вероятностями. В них множество элементарных исходов Ω представляет собой определенное подмножество плоскости (прямой, пространства), элементарным исходом является любая точка этого множества, а вместо подсчета числа элементов используется понятие площади (длины, меры). Студент должен ясно понимать, что в задачах на геометрическую вероятность события, как правило, состоят из бесконечного (несчетного) числа точек. При этом вероятность любого элементарного события (элемента множества Ω) равна нулю.

Понятие условной вероятности

После усвоения понятия вероятности студент подготовлен к восприятию следующего фундаментального понятия теории вероятностей – понятию условной вероятности. Именно благодаря этому понятию (и построенным на его основе понятиям независимости событий и случайных величин, условного математического ожидания и др.) теория вероятностей является самостоятельной глубокой дисциплиной, а не подразделом теории множеств, теории меры или функционального анализа.

Изложение рекомендуется вести по следующей схеме:

Определение условной вероятности => Независимость событий => Формула суммы и произведения вероятностей.

После этого студенты будут подготовлены к изучению формулы полной вероятности и формулы Байеса.

Условная вероятность

Для лучшего усвоения понятия условной вероятности сначала рекомендуется рассмотреть на примере простой задачи, как появляется это понятие.

Часто возникает задача найти вероятность какого-либо события A, если известно (или предполагается), что произошло другое событие B. Эта вероятность и называется условной вероятностью.

Задача 1 (про конфеты). Пусть известно, что в закрытой коробке находятся две конфеты «Белочка» и пять конфет «Мишка косолапый». Конфеты на ощупь не различимы. Девочка и мальчик одновременно, не подглядывая, вынимают из коробки по одной конфете. Пусть известно, что мальчик вытащил конфету «Мишка косолапый» (это событие B). Подсчитаем вероятность того, девочка также вытащила конфету «Мишка косолапый» (это событие A). Нам уже известно, что событие B произошло (мальчик вытащил конфету «Мишка косолапый»). Это значит, что девочка выбирает из шести конфет: двух конфет «Белочка» и четырех конфет «Мишка косолапый». Следовательно, естественно принять, что вероятность того, что девочка вытащила конфету «Мишка косолапый» (событие A) при условии, что мальчик также вытащил эту конфету, равна $4/6$. Итак, условная вероятность события A при условии события B равна $4/6$.

Заметим, что если неизвестно, какую конфету вытащил мальчик, то вероятность того, что девочка вытащит конфету «Мишка косолапый», равна $5/7$. Значит, безусловная вероятность события A равна $P(A)=5/7$, т.е. отличается от $4/6$.

Вероятность события A, вычисленная при условии, что имело место событие B, называется условной вероятностью события A и обозначается $P(A|B)$. Дадим формальное определение условной вероятности.

Определение. Условной вероятностью события A при условии наступления события B называют отношение вероятности пересечения событий A и B к вероятности события B:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{1}$$

При этом предполагается, что $P(B)>0$.

Это определение можно пояснить следующим образом. Вероятность события интуитивно представляет собой частоту (долю) благоприятных исходов среди всех возможных исходов. Тогда вероятность события $P(A|B)$ находится так: из всех событий, благоприятных для B, нужно взять долю тех событий, которые также благоприятны для A. Иными словами, если мы знаем, что событие B произошло, то «большое» пространство всех элементарных исходов Ω можно заменить на его подмножество B, при этом следует все вероятности разделить на $P(B)$, чтобы полная вероятность B стала равной единице.

Получим ***решение*** задачи про конфеты, используя определение условной вероятности. Были введены следующие события $A = \{$девочка вытащила «Мишку»$\}$ и $B = \{$мальчик вытащил «Мишку»$\}$. Нас интересует вероятность $P(A|B)$. Для применения формулы (1) надо сначала найти вероятности $P(B)$ и $P(AB)$, где AB представляет собой событие $AB = \{$и девочка, и мальчик вытащили по «Мишке»$\}$. Имеем:

$$P(B) = \frac{5}{7}, \qquad P(AB) = \frac{C_5^2 \cdot C_2^0}{C_7^2} = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{20}{42}.$$

Теперь по формуле условной вероятности (1) получаем тот же ответ, что и выше:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{20/42}{5/7} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Следующая задача представляет собой упражнение на применение определения условной вероятности (формула (1)). В таких задачах следует обращать внимание студентов на задание пространства элементарных исходов.

Задача 2. В семье двое детей. Считая, что рождение девочки и мальчика – независимые и равновероятные события, вычислить вероятность того, что оба ребенка – девочки, если известно, что в семье есть девочка.

Решение. Пространство $\Omega = \{$(д,д), (д,м), (м,д), (м,м)$\}$ всех элементарных исходов (в данных обозначениях, например, исход (д,м) означает, что в семье первый ребенок – девочка, второй – мальчик). Рассмотрим событие $A = \{$ оба ребенка – девочки$\}$. Этому событию благоприятствует один элементарный исход: первый ребенок – девочка, второй ребенок – девочка, т.е. $A = \{$(д,д)$\}$. Событию $B = \{$в семье есть девочка$\}$ благоприятствуют три элементарных исхода, т.е. $B = \{$(д,д), (д,м), (м,д)$\}$. Надо вычислить

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Событие $AB = \{$(д,д)$\}$, поэтому $P(AB) = 1/4$ и, следовательно,

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

Независимость событий

После того, как студенты познакомились с определением условной вероятности, следует рассмотреть понятие независимости событий.

Определение. Событие A называется независимым от события $B,$ вероятность которого не равна нулю $(P(B) \neq 0)$, если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет, т.е. $P(A|B) = P(A).$ Событие A называется зависимым от события $B,$ если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет, т.е. $P(A|B) \neq P(A)$.

Из формулы (1) сразу вытекает, что событие A тогда и только тогда не зависит от события $B,$ когда $P(AB) = P(A)P(B)$ (предполагается, что $P(B) \neq 0$). Это последнее равенство симметрично относительно A и $B,$ и поэтому (в предположении, что $P(A) \neq 0$ и $P(B) \neq 0$), если событие A не зависит от события $B,$ то и событие B не зависит от события $A,$ и обратно. Поэтому можно говорить просто о независимости двух событий A и B (друг от друга). Часто равенство $P(AB) = P(A)P(B)$ принимается в качестве определения независимости событий A и $B,$ причем это определение применимо и в случае, если события (или какое либо одно из них) имеет нулевую вероятность.

Рекомендуется предложить студентам для решения несколько задач на определение независимости и зависимости событий. На примере этих задач следует заметить, что независимость может вытекать из самого существа задачи.

1. Опыт состоит в подбрасывании двух монет. При этом рассматриваются события: $A -$ появление герба на первой монете, $B -$ появление герба на второй монете. В этом случае вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет. Здесь независимость событий очевидна из существа задачи.

2. Вернемся к задаче про конфеты (см. выше раздел про условную вероятность). В коробке находятся две конфеты «Белочка» и пять конфет «Мишка». Девочка и мальчик одновременно, не подглядывая, вынимают из коробки по одной конфете. В этой задаче рассматриваются два события: событие A – девочка вытащила «Мишку», событие B – мальчик вытащил «Мишку». Выше показано, что вероятность события A до того, как стало известно о событии $B,$ равна $5/7$. Если же стало известно, что событие B произошло, то вероятность события A становится равной $2/3$, из чего заключаем, что событие A является зависимым от события B в смысле данного выше определения.

Определение независимости двух событий легко распространить на совокупность нескольких событий.

Определение. События $A_1,\ A_2,\dots,A_n$ называются независимыми в совокупности (независимыми), если для любого набора индексов $1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_k \leq n$ выполняется равенство $P(A_{l_1} A_{l_2} \dots A_{l_n}) = P(A_{l_1}) P(A_{l_2}) \dots P(A_{l_k})$.

Определение. События A_1, $A_2,\ldots,A_n$ называются попарно независимыми, если $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$ для любых пар $i,\ j,\ 1\le i<j\le n$.

Замечание. В некоторых учебниках говорится просто о независимости событий A_1, $A_2,\ \ldots,\ A_n$, подразумевая при этом именно независимость в совокупности.

Стоит подчеркнуть, что из попарной независимости событий A_1, $A_2,\ldots,A_n$ не следует независимость этих событий в совокупности. Этот обстоятельство можно пояснить на примере простой задачи.

Задача 3. В семье двое детей. Считаем, что рождение девочки и мальчика независимые и равновероятные события. События: $A=\{$первый ребенок – девочка$\}$, $B=\{$второй ребенок – девочка$\}$, $C=\{$в семье есть и девочка, и мальчик$\}$. Доказать, что события A, B, C попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

Решение. Как и в задаче 2, пространство всех элементарных исходов имеет вид

$\Omega=\{$(д,д), (д,м), (м,д), (м,м)$\}$. В этом вероятностном пространстве

$A=\{$(д,д), (д,м)$\}$, $B=\{$(д,д), (м,д)$\}$, $C=\{$(д,м), (м,д)$\}$,

$AB=\{$(д,д)$\}$, $AC=\{$(д,м)$\}$, $BC=\{$(м,д)$\}$

и, следовательно, $\frac{1}{4}=P(AB)=P(A)P(B)=\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}$. Аналогично, $P(AC)=P(A)P(C)$ и $P(BC)=P(B)P(C)$, т.е. события A, B, C попарно независимы. Но эти события не являются независимыми в совокупности, так как пересечение событий ABC есть невозможное событие и $P(ABC)=0\ne P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8}$.

Формула суммы и произведения вероятностей

Из формулы (1) условной вероятности события A при условии наступления события B следует формула умножения вероятностей для двух событий $P(AB)=P(A)P(B\,|\,A)$. Формула умножения вероятностей часто применяется на практике, и, поэтому, рекомендуется уделить особое внимание решению задач с использованием этой формулы.

Задача 4. Пусть известно, что в закрытой коробке находятся две конфеты «Белочка» и пять конфет «Мишка косолапый». Из коробки вынимают подряд две конфеты. Найти вероятность того, что обе конфеты «Мишки».

Решение. Введем событие $D=\{$из коробки вытащили подряд две конфеты «Мишка»$\}$. Приведем решение этой задачи, используя формулу умножения вероятностей. Событие D представляет собой произведение двух событий A и B, где $A=\{$появление «Мишки» при первом вытаскивании$\}$, $B=\{$появление «Мишки» при втором вытаскивании$\}$. По формуле умножения вероятностей

$$P(D)=P(AB)=P(A)P(B\,|\,A)=\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{20}{42}.$$

Замечание. Эту и другие подобные задачи можно, конечно, решить с помощью формул комбинаторики (см. нахождение $P(AB)$ при решении задачи 1), но решение с помощью понятия условной вероятности более показательно и способствует выработке «вероятностной» интуиции у студентов.

Задача 5. Те же условия, что и в задаче 4, но после первого вытаскивания конфета возвращается в коробку, и конфеты в коробке перемешиваются.

Решение. В данном случае события A и B независимы и

$$P(D) = P(AB) = P(A)P(B) = \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{25}{49}.$$

Рекомендуется выписать формулы, которые важны сами по себе и, кроме того, часто используются при решении задач.

1) (Очевидное свойство, но студенты часто забывают о том, что вероятность не может быть больше единицы!)

$$0 \le P(A) \le 1,\ 0 \le P(A \mid B) \le 1$$

для любого события A.

2) (Вероятность противоположного события)

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A),$$

где $\overline{A}$ – событие, противоположное событию A.

3)
$$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B).$$

4) (Формула сложения вероятностей для двух событий)

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

В случае несовместных событий, т.е. если $AB = \varnothing$, то формула сложения имеет вид

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

5) (Формула сложения условных вероятностей) для любых событий A и B

$$P(A + B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(AB \mid C).$$

6) (Формула умножения вероятностей для двух событий) для любых событий A и B

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B) = P(A)P(B \mid A).$$

7) (Формула умножения вероятностей для нескольких событий) для любых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)...\ P(A_n \mid A_1A_2...A_{n-1})$$

в предположении, что $P(A_1A_2...A_n) > 0$.

Формулу умножения вероятностей для нескольких событий рекомендуется проиллюстрировать на примере решения задачи, подобной следующей:

Задача 6. Из колоды в 52 карт одну за другой вытаскивают четыре карты. Какова вероятность, что первой картой будет туз, второй – король, третьей – дама пик, а четвертой – валет?

Решение. Введем события $A_1 = \{$из колоды вытащили туза$\}$, $A_2 = \{$вытащили короля$\}$, $A_3 = \{$вытащили даму пик$\}$, $A_4 = \{$вытащили валета$\}$. Тогда имеем

$$P(A_1A_2A_3A_4) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)P(A_4 \mid A_1A_2A_3) = \frac{4}{52}\cdot\frac{4}{51}\cdot\frac{1}{50}\cdot\frac{4}{49}.$$

Замечание. Часто в задачах формулы сложения и умножения вероятностей применяются совместно. При этом обычно событие, вероятность которого требуется определить, представляется в виде суммы нескольких несовместных событий, каждое из которых в свою очередь является произведением событий.

Для событий независимых в совокупности теорема умножения вероятностей имеет простой вид $P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2)...\,P(A_n)$. Эта формула часто используется в задачах.

Популярным видом задач на использование формул сложения и умножения вероятностей являются задачи про стрельбу. Рекомендуется познакомить студентов с несколькими задачами такого типа.

Задача 7. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна p_1, для второго стрелка равна p_2, для третьего – p_3. Стрелки произвели по одному выстрелу в мишень. Считая попадания в мишень для отдельных стрелков событиями независимыми, найти вероятности следующих событий $A = \{$ни одного попадания в мишень$\}$, $B = \{$ровно одно попадание в мишень$\}$, $C = \{$ровно два попадания в мишень$\}$, $D = \{$хотя бы одно попадание в мишень$\}$.

Решение. Рассмотрим события $A_i = \{i$-ый стрелок попал в мишень$\}$, $i = 1,2,3$. Тогда событие A запишется в виде $A = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$. Так как события A_1, A_2, A_3 независимы, то события $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ также независимы, и, следовательно,

$$P(A) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3).$$

Событие B можно представить в виде суммы несовместных событий следующих образом: $B = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$.

Поэтому

$$P(B) = P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) = P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) +$$
$$+ P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) = p_1(1-p_2)(1-p_3) + (1-p_1)p_2(1-p_3) + (1-p_1)(1-p_2)p_3.$$

Аналогично, событие $C = A_1 A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 A_3 + A_1 \overline{A_2} A_3$,

$$P(C) = P(A_1 A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 A_3 + A_1 \overline{A_2} A_3) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) +$$
$$+ P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) = p_1 p_2 (1 - p_3) + (1 - p_1) p_2 p_3 + p_1 (1 - p_2) p_3 \,.$$

Событие D можно представить в виде суммы несовместных событий

$$D = A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3 + A_1 A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 A_3 + A_1 \overline{A_2} A_3 + A_1 A_2 A_3 \,,$$

найти вероятность каждого события по формуле умножения и все эти вероятности сложить. Однако такой путь решения слишком громоздок.

Событие D можно также представить в виде суммы совместных событий $D = A_1 + A_2 + A_3$ и найти вероятность этого события по формуле сложения для трех событий:

$$P(D) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3) =$$
$$= p_1 + p_2 + p_3 - p_1 p_2 - p_1 p_3 - p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3 \,.$$

Однако проще всего для вычисления $P(D)$ перейти от прямого события D к противоположному событию $\overline{D} = A = \{$ни одного попадания в мишень$\}$. Вероятность этого события была вычислена выше, в начале решения задачи: $\overline{D} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$, откуда

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - P(\overline{A_1})\,P(\overline{A_2})\,P(\overline{A_3}) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3).$$

Заключение

В данной статье мы рассмотрели методологические основы введения понятия условной вероятности в курсе теории вероятностей технического вуза. Показано, что понятие условной вероятности является фундаментальным понятием курса теории вероятностей, и его усвоению следует уделить особое внимание. Важной целью практических занятий по этой теме является усвоение студентами этого понятия и способность применять его при решении задач, а также выработка «вероятностной» интуиции. После усвоения этой темы студенты будут подготовлены к изучению формулы Байеса, находящей самое широкое применение в разнообразных прикладных областях.

Список литературы

[1]. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. Учебное пособие. 8-е изд. СПб.: Изд. «Лань», 2011. 256 с.

[2]. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. 6-е изд. стереотип. М.: Высш. шк., 1999. 576 с.

[3]. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. Учебное пособие для студентов вузов. Изд. 8-е изд., стер. М.: Кнорус, 2013. 496 с.

[4]. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для бакалавров. 12-е изд. М.: Юрайт, 2014. 479 с.

[5]. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для бакалавров. 11-е изд. М.: Юрайт, 2013. 404 с.

[6]. Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. и др. Теория вероятностей: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. 4-е изд., стереотип. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVI.) М.: Изд-во МГТУ им Н.Э. Баумана, 2006. 456 с.

[7]. Ефимов А. В., Каракулин А. Ф., Лесин В. В. и др. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. 5-е изд., перераб. и доп. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособ. / ред. А.В. Ефимов; А.С. Поспелов. М.: Физматлит, 2009. 544 с.

[8]. Тескин О.И., Тверитинов Д.И., Северцев Н.А. Методические указания к выполнению домашнего задания по теории вероятностей и математической статистике. М.: Изд-во МВТУ, 1981. 58 с.

[9]. Чжун К.Л., АитСахлия Ф. Элементарный курс теории вероятностей. Стохастические процессы и финансовая математика: пер. с англ. 2-е изд. (эл.) М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. 455 с. [Kai Lai Chung, Farid AitSahlia. Elementary Probability Theory. With Stochastic Processes And An Introduction To Mathematical Finance. Fourth Edition. 4 ed. New York: Springer -Verlag, 2007.]

[10]. Schwarzlander H. Probability Concepts and Theory for Engineers. Wiley, 2011. 622 p.