

УДК 626/627

## Гидродинамический маятник Фроуда-Жуковского

*Ниязбаев К.Т., студент*

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,  
кафедра «Ракетные двигатели»*

*Гончаров Д.А., аспирант*

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,  
кафедра «Теоретическая механика»*

*Научный руководитель: Пожалостин А.А.,*

*д.т.н., профессор кафедры «Теоретическая механика»*

*Россия, 105005, г. Москва МГТУ им. Н.Э. Баумана,*

*[goncharov@bmstu.ru](mailto:goncharov@bmstu.ru)*

Жидкость считается идеальной и несжимаемой, а ее движение потенциальным с потенциалом скорости частиц жидкости  $\Phi(r, x, \varphi, t)$ . Цилиндр, который заполнен жидкостью плотности  $\rho$  на высоту  $H$ , считается абсолютно жестким и невесомым.

Учитываются только первые несимметричные колебания жидкости в баке. Бак с жидкостью находится в однородном поле тяжести –  $g = \text{const}$ .

Колебания жидкости в баке замедляются математическим маятником. На оси подвеса маятника действует пара сил сухого трения со специально подобранной парой трения на падающем участке характеристики.  $M_{\text{тр}}(\omega)$  – где  $\omega$  - угловая скорость скольжения маятника относительно вала подвеса.

При определении параметров механического аналога и решения краевой задачи о поперечных колебаниях жидкости мы в полной мере используем результаты, полученные еще в 1964 году академиком К.С. Колесниковым [1,2,3,4].

В дальнейшем будем учитывать только первый тон свободных колебаний жидкости.

Условие на  $\Sigma$ , на свободной поверхности жидкости

$$\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \rho g \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Здесь  $\rho$  - плотность жидкости,  $g$  - ускорение свободного падения,  $\Phi$  – потенциал скорости частиц жидкости.

Эта функция является решением уравнения Лапласа, которое в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

Чертеж с изображением бака с жидкостью представлен на рис 1а.

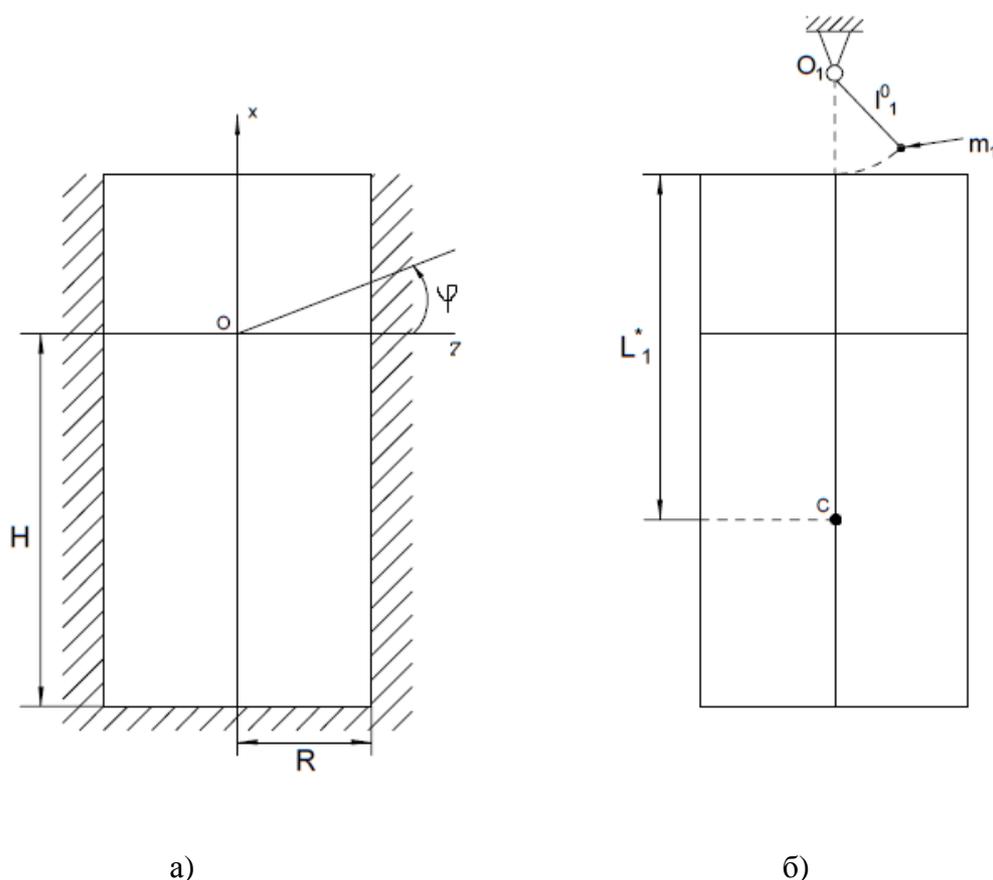


Рис.1. Изображение бака с жидкостью

Потенциал  $\Phi$  по методу Фурье (метод разделения переменных) ищется в виде произведения трех функций:

$$\Phi(x,y,t) = X(x) \times R(r) \times r(\varphi) \times S'(t) \quad (3)$$

Рассматривая только первый тон несимметричных поперечных колебаний жидкости, функцию  $\eta(\varphi)$  представим в виде:

$$\eta(\varphi) = \sin \varphi, \quad \text{а } S' - \text{ считаем равной } S' = A \cos(\omega_1 t + \alpha), \text{ где}$$

$A$ -амплитуда колебаний,  $\omega_1$  - частота первого тона колебаний жидкости.

В дальнейшем инерцией стенок самого бака пренебрегаем.

Подставим (2) в (1), и, разделяя переменные, получим дифференциальные уравнения для функций  $X_1(x)$ ,  $R_1(r)$  и  $\eta_1(\varphi)$  соответственно:

$$\frac{d^2 X_1}{dx^2} - \lambda_1^2 X_1 = 0; \quad (4)$$

$$\frac{d^2 r}{d\varphi^2} + r = 0; \quad (5)$$

$$\frac{d^2 R_1}{dr^2} + \frac{1}{2} \frac{dR_1}{dr} + \left( \frac{\lambda_1^2}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) R_1 = 0; \quad (6)$$

Решения (3) ÷ (5) имеют вид:

$$X_1 = C_1 \operatorname{ch} \lambda_1 x + C_2 \operatorname{sh} \lambda_1 x, \quad \eta = \sin \varphi, \quad (7)$$

$$R_1(r) = \frac{J_1\left(\lambda_1 \frac{r}{R}\right)}{J_1(\lambda_1)} \quad (8)$$

$J_1(\lambda_1)$  в (7) взято для нормировки решения (8).

Окончательно функция  $\Phi(x, r, \varphi)$  будет выглядеть:

$$\Phi_1 = R \operatorname{ch} \left[ \frac{\lambda_1 (x+H)}{R} \right] \frac{1}{\operatorname{ch} \left( \lambda_1 \frac{H}{R} \right)} \frac{J_1\left(\frac{\lambda_1 r}{R}\right)}{J_1(\lambda_1)} \sin \varphi \cdot S' \quad (9)$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям краевой задачи:

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \right|_s = 0$$

$\vec{n}$  - внешняя нормаль к смоченной поверхности бака;

$\lambda_1$  получается равным из решения трансцендентного уравнения  $\frac{dJ_1}{dr}(\lambda_1) = 0$ ;

Граничное условие на свободной поверхности  $\sum$  имеет вид:

$$\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \rho g \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x=0$$

$$\text{или } -\omega^2 \Phi + g \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x=0 \quad (10)$$

С учетом (8), получим частоту первого тона несимметричных колебаний:

$$\omega_1^2 = g \frac{\lambda_1}{R} \operatorname{th} \left( \lambda_1 \frac{H}{R} \right) \quad (11)$$

Рассмотрим модель механического аналога (МА) системы в виде математического маятника длиной  $l_1^0$  и массой  $m_1^*$  (рис.1б)

Длина  $l_1^0$  (МА) равна:

$$l_1^0 = \frac{g}{\omega_1^2} \quad \text{или}$$

$$l_1^0 = \frac{R}{\lambda_1} \operatorname{cth}\left(-\lambda_1 \frac{H}{R}\right).$$

Для того чтобы определить  $m_1^*$  вычислим кинетическую энергию системы T [9]:

$$T = -\frac{1}{2} \rho \iint_c \left( \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \right) dS \quad (12)$$

Здесь S - смоченная поверхность бака,  $\rho$  - плотность жидкости,  $\vec{n}$  - внешняя нормаль к поверхности жидкости. С учетом условия на свободной поверхности жидкости  $\Sigma$ , имеем:

$$T = \frac{1}{2} \rho \iint_{\Sigma} \frac{\Phi^2}{S} d\Sigma \quad (13)$$

$$T = \frac{1}{2} \rho \pi R \left[ \int_0^R \frac{J_1^2\left(\lambda_1 \frac{r}{R}\right)}{J_1^2(\lambda_1)} r dr \right] \cdot S'^2 \quad (14)$$

Так как [1,2]:  $\int_0^R \frac{J_1^2\left(\lambda_1 \frac{r}{R}\right)}{J_1^2(\lambda_1)} r dr = \frac{R^2(\lambda_1^2 - 1)}{2\lambda_1^2}$ , то

$$T = \frac{\pi \rho R^3}{A} \frac{(\lambda_1^2 - 1)}{\lambda_1^2} \cdot S'^2$$

Поскольку для МА кинетическая энергия равна:

$$T = \frac{m_1^* \cdot l_1^{02} \cdot \varphi'^2}{2} = m_1^* \frac{S'^2}{2} = 0$$

$$m_1^* = \frac{\pi R^2}{2} \rho \frac{(\lambda_1^2 - 1)}{\lambda_1^2}; \quad (15)$$

Используя потенциал  $\varphi$  относительно неподвижной системы отсчета и потенциал Н.Е.Жуковского [1]

$$\varphi = r\alpha\varphi' \left( \frac{H}{2} + x \right) + \Phi_1, \quad (16)$$

где  $v'$  - угловая скорость бака относительно центра масс системы (рис.)

Можно вычислить кинетическую энергию бака с жидкостью и приравнять ее к энергии МА, тогда получим:

$$L_1^* = \frac{H}{2} - \frac{2R}{\lambda_1} \operatorname{th} \left( \lambda_1 \frac{H}{2R} \right); \quad (17)$$

Теперь представим себе, что в точке О маятник посажен на вращающуюся ось с трением. Характеристика сухого трения при соответствующем выборе пары трения нелинейная и зависит от скорости скольжения маятника относительно вала. Вал вращается со скоростью  $\Omega$ . (рис.)

Пусть скорость скольжения равна  $\omega$ . График зависимости  $M_{mp}(\omega)$  представлен на рис. 2:

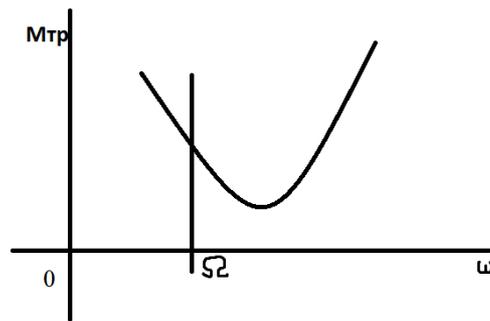


Рис. 2. Зависимость момента трения от частоты

Дифференциальное уравнение МА имеет вид:

$$m_1^* l^2 \varphi'' + m_1^* g l_1 \varphi = M_{mp}(\omega), \quad (18),$$

где  $\omega = \Omega - \varphi'$  - угловая скорость скольжения маятника (МА) относительно вала.

Величина  $\Omega$  выбирается на падающем участке (рис.2) характеристики  $M_{mp}(\omega)$ .

Разложим функцию  $M_{mp}$  в ряд по степеням  $\varphi'$  [5].

$$M_{mp}(\omega) = M_{mp}(\Omega) - \frac{\varphi'}{1!} \cdot \frac{\partial M_{mp}}{\partial \varphi'}(\Omega) + \dots$$

Уравнение (18) примет вид:

$$J^0 \varphi'' + h \varphi' + c \varphi = M_{mp}(\Omega) \quad (19)$$

Здесь  $J^0 = m_1^* l_1^{02}$ ,  $h = \frac{\partial M_{mp}}{\partial \varphi'}(\omega = \Omega)$ ,  $c = m_1^* g l_1$ ,

$M_{mp}(\Omega)$  – константа.

Поскольку  $h = \frac{\partial M_{mp}}{\partial \varphi'}(\Omega) < 0$  (рис.2), то в системе будут колебания нарастать, а

именно  $\varphi$  будет стремиться к  $\varphi_{AK} = A_{AK} \cos(\omega_1 t - \alpha)$

$A_{AK}$  – амплитуда автоколебаний. Наша система имеет автоколебательный контур. Действительно, налицо элементы автоколебательной системы. (рис.3)

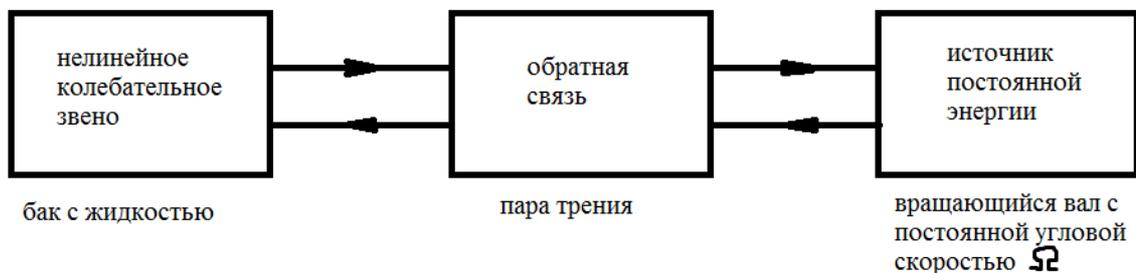


Рис.3. Схема автоколебательной системы

Зная  $\varphi_{AK}$  можно определить амплитуду  $f(x)$  колебаний свободной поверхности жидкости:

$$f(x) = R \cdot J_1\left(\lambda_1 \frac{r}{R}\right) l_1^0 A_{AK} \cos(\omega_1 t - \alpha) \quad (20)$$

Используя метод Ван-дер-Поля [8] можно получить «уравнение установления» в виде

$$2 \frac{dA_{AK}}{dt} - \alpha A_{AK} + \frac{3}{4} \gamma \omega_1^{*2} A_{AK}^3 = 0, \quad (21)$$

Где  $\alpha, \gamma$  коэффициенты в разложении  $M_{mp}(\omega)$ .

$$A_{AK} = \frac{2}{\omega_1^*} \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}}$$

В [5] показана устойчивость автоколебательного режима.

### Список литературы

1. Колесников К.С. Продольные колебания ракеты с жидкостным ракетным двигателем. М.: Машиностроение, 1971. 260 с.
2. Колесников К.С. Жидкостная ракета как объект регулирования. М.: Машиностроение, 1969. 296 с.
3. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 1980. 396 с.
4. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. СПб.: Лань, 2005. 432 с.
5. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Ком .Книга, 2006. 439с.
6. Шишинский Ю.А. Динамический расчет судовых конструкций Л.: Судпромлиз,1969. 408 с.
7. Лампер Р. Е. Введение в теорию нелинейных колебаний авиаконструкций, М.: Машиностроение, 1985. 88 с.
8. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. В 2-х ч. Ч.І. М.: ГИФМЛ, 1963 583 с.