

УДК 621.391.1

Составные двоичные последовательности с большим ансамблем и нулевой зоной корреляции

Юдачев С. С.^{1,*}

[*judachev@gmail.com](mailto:judachev@gmail.com)

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Рассмотрен метод построения составных двоичных последовательностей на основе двух компонент - кода Баркера и последовательностей Кердока, использующий преимущества обеих составляющих компонент - наличие нулевой зоны корреляции, большие ансамбли и хорошие корреляционные свойства. С помощью предложенных алгоритма и его программной реализации на языке C#, получены ансамбли последовательностей различных длин и подробно исследованы их корреляционные свойства. На основе проведенных расчетов можно сделать вывод о возможности применения предлагаемого класса составных последовательностей для перспективных широкополосных систем с кодовым разделением каналов.

Ключевые слова: широкополосные системы, составные кодовые последовательности, производные системы сигналов, корреляционные функции, статистические характеристики

Введение

Важным направлением совершенствования радиоэлектронных систем является широкое внедрение принципов широкополосной передачи [1,2], позволяющих разрешить противоречие между разрешающей способностью и дальностью действия систем, значительно повысить скорости обработки информационных потоков, обеспечить высокую помехоустойчивость, электромагнитную совместимость и конфиденциальность, улучшить эффективность использования радиодиапазона, особенно в условиях мобильности объектов связи и быстрой смены помеховой обстановки. Эти принципы используют при построении связных, радиолокационных, гидролокационных, навигационных, телекоммуникационных и измерительных систем. Проектирование таких систем, в частности, систем использующих сигналы на основе расширения спектра методом прямой последовательности (DSSS), невозможно без поиска новых широкополосных сигналов, основанных на использовании кодовых двоичных последовательностей, корреляционные свойства которых определяют свойства широкополосного сигнала. При этом наряду с задачей исследования теоретических аспектов существования новых семейств последовательностей, оптимальных по

минимаксному критерию, методов их граничной оценки важна также и проработка вопросов их практического генерирования и синхронизации с помощью современных программно-алгоритмических методов создания универсальных перепрограммируемых процессоров.

1. Метод построения последовательностей

Поиску и исследованию свойств двоичных кодовых последовательностей в последние годы уделяется достаточно много внимания [1,2,3]. В общем случае к ним должны предъявляться требования большого ансамбля последовательностей, формируемых на единой алгоритмической основе, сбалансированности структуры, оптимальности корреляционных функций в ансамбле и его криптозащищенности.

Все известные последовательности характеризуются тем, что уровни выбросов взаимных корреляционных функций (ВКФ), также как и уровни боковых выбросов автокорреляционных функций (АКФ), в основном отличны от нуля, что приводит к увеличению межсимвольных помех в системах с кодовым разделением. Одним из путей уменьшения этих помех является использование составных (производных) последовательностей [4]. Такие последовательности образуют, комбинируя различные исходные компоненты. Подбирают компоненты таким образом, чтобы полученные системы составных сигналов обладали лучшими свойствами, чем исходные. Для этого при подборе желательно иметь простые и наглядные выражения, позволяющие получить теоретические граничные оценки в зависимости от свойств исходных компонент. Для окончательного решения вопроса о возможности применения составных псевдослучайных последовательностей в DSSS системах необходимо знание их статистических характеристик и корреляционных свойств.

Составные последовательности обладают целым рядом достоинств, к которым можно отнести:

- наличие регулярных методов синтеза;
- возможность получения больших ансамблей сигналов, обладающих представительным набором длин при приемлемых корреляционных свойствах;
- возможность ускорить поиск и упростить обработку сигнала на приемном конце радиолинии;
- сравнительно несложная технология формирования.

Сформировать составные последовательности можно двумя способами: комбинируя две и более компонент с одинаковыми тактовыми частотами и комбинируя компоненты, тактовые частоты которых находятся в определенном соотношении.

Рассмотрим составные двоичные последовательности (СДП) $\{c_n\}$, $\{d_n\}$, формируемые из компонент $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{e_n\}$ по правилу:

$$\begin{aligned} c_{V(k-1)+j} &= a_k b_j; k=1,2, \dots, U, j=1,2, \dots, V, \\ d_{V(k-1)+j} &= a_k e_j; k=1,2, \dots, U, j=1,2, \dots, V, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\{a_n\}$, $n=1,2, \dots, U$, $\{b_n\}$, $n=1,2, \dots, V$, $\{e_n\}$, $n=1,2, \dots, V$ – двоичные последовательности с периодами U и V .

Периодические автокорреляционные функции (ПАКФ) последовательностей $\{c_n\}$ и $\{d_n\}$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} R_c(j) &= \sum_{n=1}^{UV} c_n c_{n+j}, j = 0, 1, 2, \dots UV-1, \\ R_d(j) &= \sum_{n=1}^{UV} d_n d_{n+j}, j = 0, 1, 2, \dots UV-1. \end{aligned}$$

Периодическая взаимокорреляционная функция (ПВКФ) последовательностей $\{c_n\}$ и $\{d_n\}$

$$B_{cd}(j) = \sum_{n=1}^{UV} c_n d_{n+j}, j = 0, 1, 2, \dots UV-1.$$

Аналогичным образом можно получить выражения для аперидических функций – автокорреляционных (ААКФ) $R_c^A(j), R_d^A(j)$ и взаимокорреляционной (АВКФ) $B_{cd}^A(j)$.

2. Выбор компонент СДП

Представляют интерес исследования корреляционных функций составных последовательностей при наложении определенных ограничений на используемые компоненты. Так, если компонента $\{a_n\}$ будет удовлетворять условию

$$R_a(j) = 0, \text{ при } j \neq 0 \pmod{U} \quad (2)$$

периодические корреляционные функции $\{a_n\}$, будут иметь количество нулевых выбросов на периоде СДП не менее чем $(UV-1)/2$. В последние годы ведется интенсивный поиск таких сигналов [3].

Далее рассмотрим СДП при выборе в качестве компоненты $\{a_n\}$ четырехсимвольного кода Баркера, удовлетворяющего условию (2) [5]. Тогда при таком выборе компоненты $\{a_n\}$, можно записать:

$$R_c(j) = \begin{cases} 4V & \text{при } j = 0 \\ 4R_b^A(p) & \text{при } 0 < j \leq V-1; \\ 4R_b^A(V-p) & \text{при } V(U-1) < j \leq VU-1; \end{cases} \quad (3)$$

$$R_d(j) = \begin{cases} 4V & \text{при } j = 0 \\ 4R_e^A(p) & \text{при } 0 < j \leq V-1; \\ 4R_e^A(V-p) & \text{при } V(U-1) < j \leq VU-1; \end{cases} \quad (4)$$

$$B_{cd}(j) = \begin{cases} 4B_{be}(0) & \text{при } j = 0; \\ 4B_{be}^A(p) & \text{при } 0 < j \leq V-1; \\ 4B_{be}^A(V-p) & \text{при } V(U-1) < j \leq VU-1; \end{cases} \quad (5)$$

Здесь

$$j \equiv p \pmod{V}; j = iV + p; p = 0, 1, 2, \dots U-1; i = 0, 1, 2, \dots V-1, \quad (6)$$

При $V < j \leq V(U-1)$ $R_c(j) = 0$, $R_d(j) = 0$ и $B_{cd}(j) = 0$, что можно считать несомненным достоинством предложенного вида СДП.

Однако выбранный двоичный код Баркера, наряду с уникальными корреляционными свойствами имеет существенный недостаток – отсутствие ансамбля. Очевидно, что для получения больших ансамблей СДП необходим выбор компонент $\{b_n\}$ и $\{e_n\}$, которые позволили бы получать большие ансамбли при приемлемых корреляционных свойствах.

В качестве таких компонент предлагаются нелинейные последовательности Кердока, которые сравнительно недавно стали рассматривать в качестве сигнатурных ансамблей для DSSS систем, что стало возможно после появления работы [6], в которой доказано существование циклически замкнутого эквивалента кодов Кердока, что дает возможность практического использования последовательностей.

Выбор последовательностей Кердока обусловлен большим объемом их ансамбля при представительном наборе длин и хороших свойствах [7]. Объем ансамбля последовательностей Кердока составляет $K = \frac{L+2}{2}$, где L – длина последовательности.

$$L = 2(2^n - 1),$$

где n – нечетное.

Корреляционный пик ограничен значением

$$\rho_{\max} = \frac{\sqrt{L+2}+2}{L} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{L}}.$$

Для оценки свойств составных последовательностей с использованием кодов Кердока необходимо предварительно сформировать ансамбли этих кодов, затем получить искомые СДП, построить корреляционные функции и рассчитать статистические характеристики. С этой целью были созданы специальный алгоритм и программа расчета.

На рис. 1 приведен принцип синтезирования СДП «Кердок+Баркер» в соответствии с правилом (1).

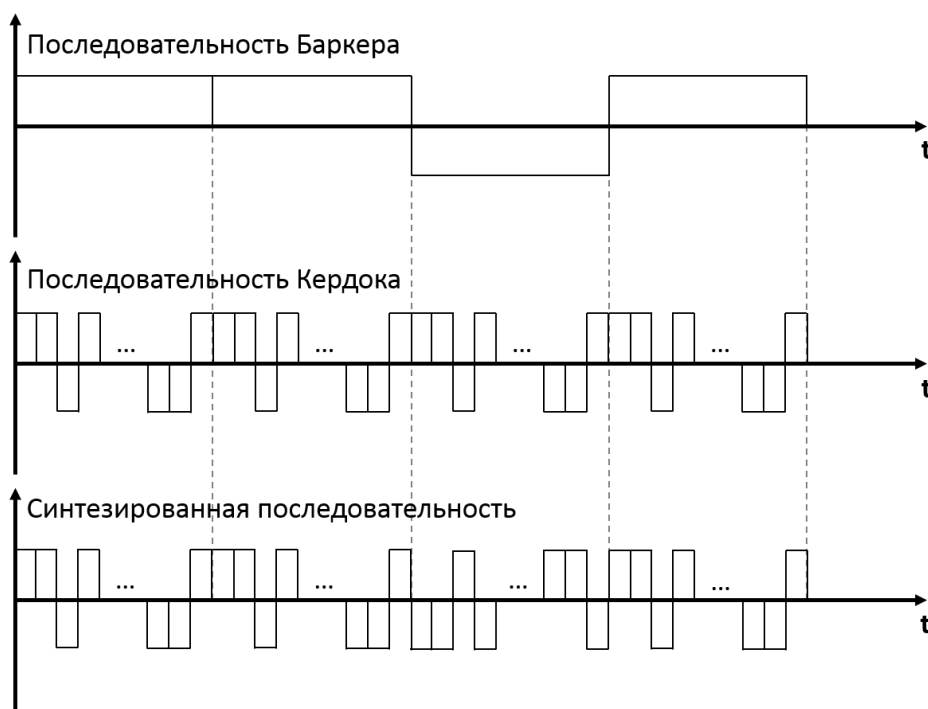


Рис. 1. Принцип синтезирования СДП «Кердок+Баркер»

3. Алгоритм и программа формирования

Для написания алгоритма формирования последовательностей Кердока были использованы алгебраические построения работы [6], в которой предлагался способ

генерирования, основанный на использовании свойств линейных рекуррентных последовательностей над кольцом вычетов по модулю 4.

За основу генератора взят регистр сдвига с обратной связью, формирующий четверичную линейную последовательность. Перевод четверичной последовательности в бинарную осуществляется считыванием состояния только старшего из двух двоичных разрядов четверичной ячейки. Полученная таким образом бинарная последовательность порождает пару сигнатур Кердока, вторая из которых получается из исходной посимвольным умножением на меандр. Переход от одной пары последовательностей к другой сводится лишь к смене начального состояния регистра. Меняя начальные состояния регистра можно получить полный набор четверичных последовательностей заданного периода, не являющихся циклическими копиями исходных последовательностей. Каждая четверичная последовательность порождает пару бинарных, в результате можно получить полный объем K ансамбля последовательностей Кердока заданной длины L .

На основе алгоритма формирования последовательностей Кердока было разработано специальное программное обеспечение, которое позволяет сформировать ансамбли последовательностей Кердока, построить на их основе предлагаемый тип СДП, имеющий длины в несколько сотен или тысяч элементов, интересные для практических приложений, изучить их основные характеристики и построить графики корреляционных функций. Для сравнения и проверки предлагаемого программного обеспечения были рассчитаны также параметры и графики M -последовательностей, которые в настоящее время хорошо изучены [1,2,].

Алгоритм формирования последовательностей, на основе которого составлена программа, представляет собой модель работы цифрового генератора:

1. Выбор характеристического многочлена, порождающего интересующую нас последовательность.
2. Выбор первоначальных состояний регистров сдвига; состояние, при котором на всех выходах регистров задан ноль, является запрещенным.
3. В соответствии с заданным для исследуемой последовательности рекуррентным уравнением, находится символ, который в последующем такте перейдет на выход первого регистра сдвига.
4. Сдвиг последовательности в регистрах на один такт, считывание с выхода i -го символа интересующей нас последовательности. Запись в первый регистр полученного в п. 3 значения.
5. Необходимое количество повторений п. 3 и 4 определяется длиной исследуемой последовательности.
6. Полученный ансамбль отображается на бинарный алфавит.

Данный алгоритм, а также выражения (1-6) для СДП «Кердок+Баркер» использовались при написании исследовательского программного обеспечения и доказали свою работоспособность.

Удобным инструментом для количественной оценки корреляционных функций (КФ) любых последовательностей является вычисление их статистических характеристик. К таким характеристикам относятся:

1. Значение максимального положительного бокового выброса КФ $u_{\text{б max}}$.
2. Количество максимальных положительных боковых выбросов $N_{\text{б max}}$.
3. Значение максимального отрицательного бокового выброса КФ $u_{\text{б min}}$.
4. Количество максимальных отрицательных боковых выбросов $N_{\text{б min}}$.
5. Максимальный нормированный уровень выбросов (боковых для АКФ):

$$\chi_{\text{max}} = \frac{(|u_{\text{б max}}|, |u_{\text{б min}}|)_{\text{max}}}{L} \cdot 100\%,$$

где запись $(x, y)_{\text{max}}$ означает выбор наибольшего значения из x и y .

6. Сбалансированность последовательности.

Программа «Kerdock_PRs» разработана на языке высокого уровня C#. В качестве среды разработки программного обеспечения был выбран Microsoft Visual Studio 2010 Professional, являющийся наиболее оптимальным решением при написании приложений на языке C#. Выбор языка программирования C# в качестве базисного обусловлен необходимостью разработки не только программного алгоритма, но и пользовательского графического интерфейса для работы с программой. Для этих целей в Visual Studio существует специальный программный интерфейс под названием «Windows Forms».

В программном проекте можно выделить следующие основные компоненты:

1. «Form1.cs»;
2. «Form2.cs»;
3. «Form3.cs».

Форма «Form1.cs» представляет собой основное окно программы «Kerdock_PRs». Вид программы приведен на рис. 2.

В верхней части окна находятся три основные вкладки: «Последовательности Кердока», «М-последовательности» и «Кердок+Баркер». Каждая вкладка содержит необходимый набор кнопок и полей ввода данных. Рассмотрим работу с программой на примере вкладки «Последовательности Кердока». Самое крупное верхнее поле используется для вывода требуемой информации, например, рассчитанной последовательности. В блоке «Задание ПСП» (псевдослучайной последовательности) содержатся два поля для ввода цифр и задания массива. Верхнее поле необходимо для ввода коэффициентов полинома, определяющего характеристики обратной связи в генераторе, нижнее предназначено для задания состояния регистров генератора; ввод значений необходимо производить через пробел.

При нажатии кнопки «Рассчитать ПСП», при корректно введенных числовых данных в верхнем поле, получаем искомую ПСП, а также количество нулей и единиц в последовательности, длину последовательности. Для того чтобы получить справочную информацию о существующих характеристических полиномах, используется кнопка «Информация об исследуемых ПСП». При этом для отображения последовательностей появляется дополнительное окно, программный код которого содержится в «Form3.cs».

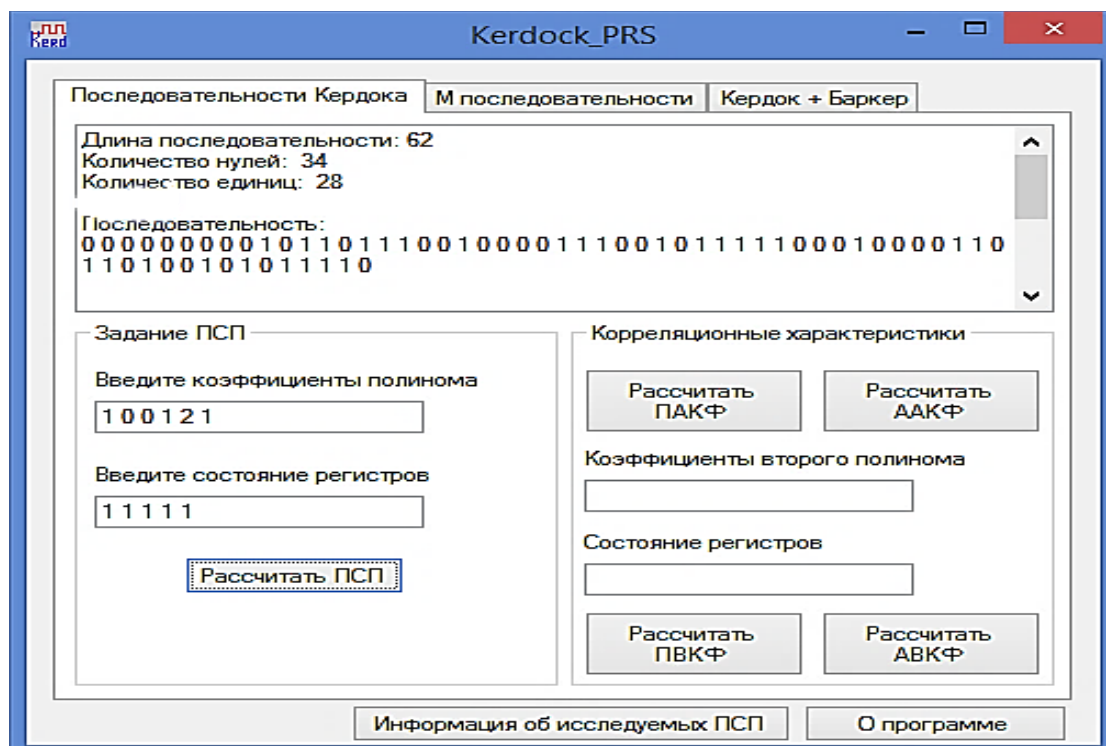


Рис. 2. Пример расчета последовательности Кердока

В блоке «Корреляционные характеристики» расположены два поля для коэффициентов полинома и состояния регистров генератора второй последовательности, для которой необходимо вычислить взаимокорреляционные функции, а также следующие 4 кнопки:

1. «Рассчитать ПАКФ» – вывод графика периодической автокорреляционной функции той последовательности, которая задается в блоке «Задание ПСП»;
2. «Рассчитать ААКФ» – вывод графика аperiodической функции автокорреляции той последовательности, которая задается в блоке «Задание ПСП»;
3. «Рассчитать ПВКФ» – вывод графика периодической функции взаимной корреляции;
4. «Рассчитать АВКФ» – вывод графика аperiodической функции взаимной корреляции.

При нажатии на любую из указанных кнопок в поле вывода появляются значения КФ, а также статистические характеристики данной КФ. График исследуемой корреляционной функции появляется в дополнительном окне, за оформление которого отвечает форма «Form2.cs». Для построения графиков используется библиотека «ZedGraph.dll», которая отличается удобством работы. В качестве примера на рис. 3 приводится график ААКФ рассмотренной ранее последовательности Кердока с периодом 62 символа.

СДП «Кердок+Баркер» были исследованы для степеней полинома 7, что соответствует длине в 254 символа и степеней полинома 9, что соответствует длине в 1022 символа последовательности Кердока. В качестве кода Баркера за основу возьмем последовательность {0 0 1 0}. На рисунках 4 – 7 приведен вид рассчитанных с помощью

программы наиболее характерных корреляционных функций периодических – ПАКФ и ПВКФ и аperiodических – ААКФ и АВКФ для длины СДП 4088.

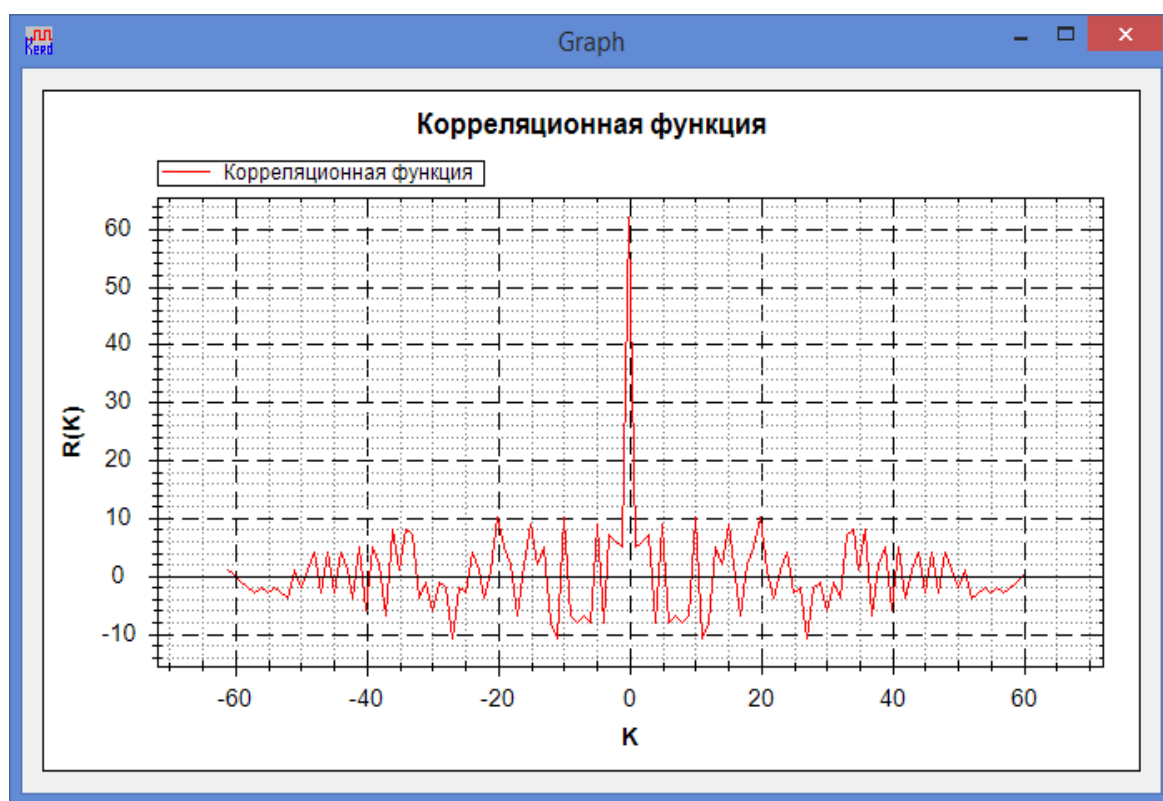


Рис. 3. ААКФ последовательности Кердока



Рис. 4. ПАКФ СДП «Кердок+Баркер» для N=4088



Рис. 5. ААКФ СДП «Кердок+Баркер» для $N=4088$

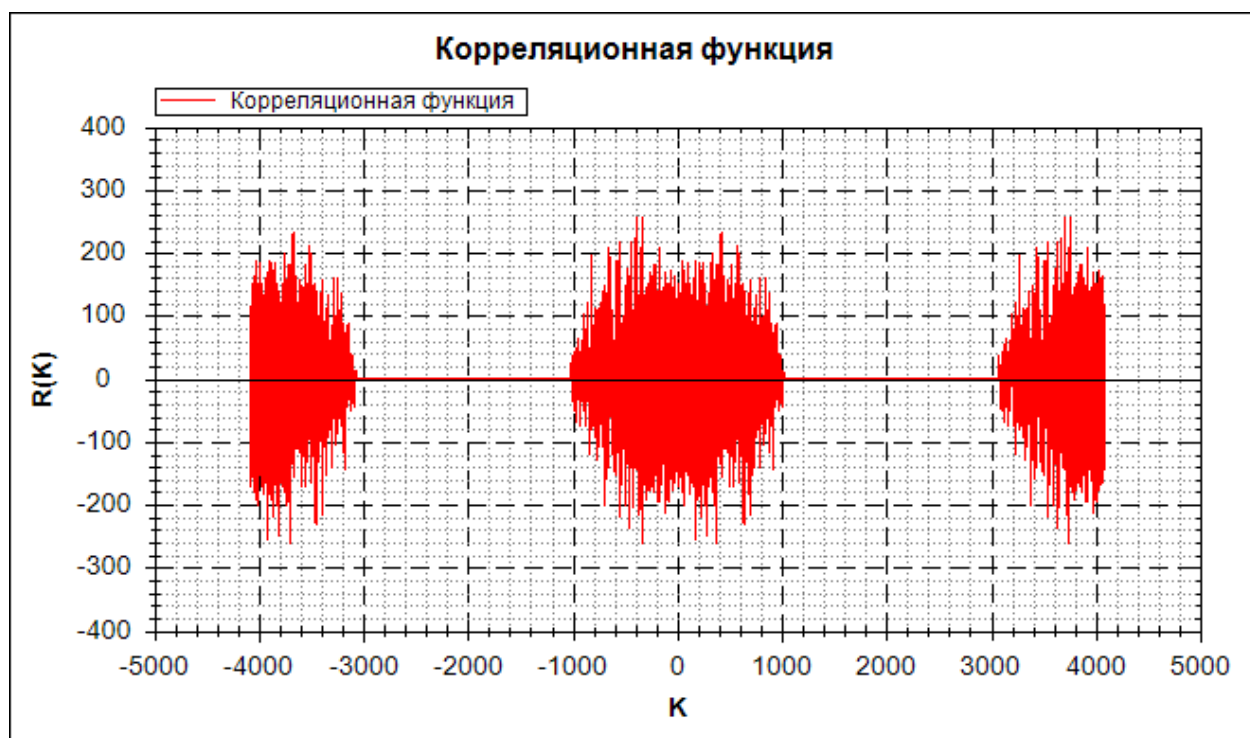


Рис. 6. ПВКФ СДП «Кердок+Баркер» для $N=4088$

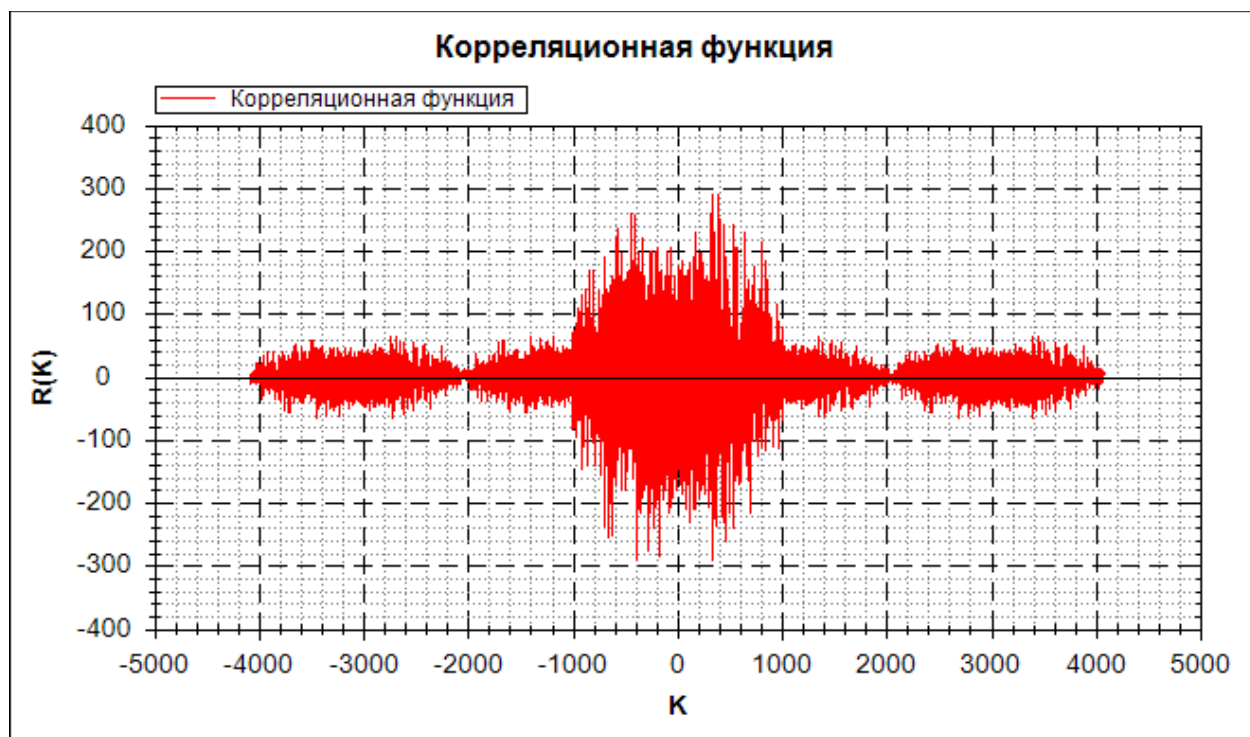


Рис.7. ПВКФ СДП «Кердок+Баркер» для N=4088

В табл. 1. приводится сводка характеристик исследуемых ансамблей СДП.

Таблица 1. Характеристики исследуемых ансамблей СДП

Характеристики СДП периода $N=4088$				
Для периодических автокорреляционных функций				
$u_{\delta \max}$	$u_{\delta \min}$		$\chi_{\max},\%$	
256	-224		6.26	
Для аperiodических автокорреляционных функций				
$u_{\delta \max}$	$N_{\delta \max}$	$u_{\delta \min}$	$N_{\delta \min}$	$\chi_{\max},\%$
1022	2	-1022	2	25,00
Для периодических взаимокорреляционных функций				
$u_{\delta \max}$	$u_{\delta \min}$		$\chi_{\max},\%$	
248	-292		7.14	
Для аperiodических взаимокорреляционных функций				
$u_{\delta \max}$	$N_{\delta \max}$	$u_{\delta \min}$	$N_{\delta \min}$	$\chi_{\max},\%$
280	1	-321	1	8,10

Сравнение статистических характеристик последовательностей «Кердок+Баркер» со статистическими характеристиками известных последовательностей:

1. СДП Кердок-Баркер не являются сбалансированными;
2. Аperiodические автокорреляционные функции исследуемых семейств СДП «Кердок+Баркер» имеют боковые выбросы постоянной величины. С увеличением

- длины последовательностей максимальный уровень боковых выбросов не уменьшается и χ_{max} составляет 25 % от величины основного выброса;
3. Периодические взаимокорреляционные функции СДП «Кердок+Баркер» обладают большими боковыми выбросами, но с увеличением длины последовательностей максимальный боковой выброс резко уменьшается, например для длины 4088 он составляет $\chi_{max}=7,14\%$ от величины основного выброса. Так же стоит обратить внимание на то, что присутствует зона нулевой корреляции, что является уникальным свойством таких СДП;
 4. Аперiodические взаимокорреляционные функции исследуемых ансамблей имеют один максимальный положительных выброс, а также не менее одного максимального отрицательного выброса. Максимальный уровень боковых лепестков при увеличении L уменьшается. Для СДП длины 4088 элементов он не превышает значений 8.1 % от L .

Заключение

Рассмотренный в статье метод построения составных двоичных последовательностей на основе кода Баркера и последовательностей Кердока позволяет сформировать класс сигналов имеющих определенные преимущества по сравнению с широкоизвестными сигналами [1,2, 7]. Этот класс СДП использует преимущества как кода Баркера - наличие нулевой зоны корреляции, так и большие ансамбли и высокую линейную сложность, свойственные последовательностям Кердока. С помощью предложенных алгоритма и программы на его основе можно достаточно быстро и наглядно сформировать образцы последовательностей различных длин, исследовать их основные свойства, осуществить оптимальный выбор сигналов и сделать выводы о возможностях их применения при проектировании перспективных широкополосных систем.

Список литературы

1. Ипатов В.П. Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения: пер. с англ. / под ред. В.П. Ипатова. М.: Техносфера, 2007. 488 с. [Ipatov V.P. Spread Spectrum and CDMA. Principles and Applications. New York: John Wiley and Sons Ltd, 2005.].
2. Гантмахер В.Е., Быстров Н.Е., Чеботарев Д.В. Шумоподобные сигналы. Анализ, синтез, обработка. СПб.: Наука и техника, 2005. 400 с.
3. Потехин Е.Н. Синтез и анализ оптимальных бинарных последовательностей: дис. ... канд. ф.-м. наук. Йошкар-Ола, 2014. 184 с.
4. Варакин Л.Е. Теория систем сигналов. М.: Советское радио, 1978. 304 с.

5. Калмыков В.В., Юдачев С.С. Шумоподобные сигналы для систем с кодовым разделением каналов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2005. Спец. вып. С. 161-167.
6. Нечаев А.А. Код Кердока в циклической форме // Дискретная математика. 1989. Т. 1, вып. 4. С. 123-139.
7. Игнатьев Ф.В., Ипатов В.П., Флотская И.Ю. Об эквивалентной линейной сложности последовательностей Кердока // Известия СПбГЭТУ "ЛЭТИ". 2010. № 9. С. 11-17.

Composite Binary Sequences with a Large Ensemble and Zero Correlation Zone

S.S. Yudachev^{1,*}

[*judachev@gmail.com](mailto:judachev@gmail.com)

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: spread spectrum systems, composite code sequences, derived signal systems, correlation functions, statistical characteristics

The article considers a proposed class of derived signals such as composite binary sequences for application in advanced spread spectrum radio systems of various purposes, using signals based on spectrum spreading by direct sequence method. Considered composite sequences, having a representative set of lengths and unique correlation properties, compares favorably with the widely used at present large ensembles formed on a single algorithmic basis. To evaluate the properties of the composite sequences generated on the basis of two components - the Barker code and Kerdock sequences, expressions of periodic and aperiodic correlation functions are given.

An algorithm for generating practical ensembles of composite sequences is presented. On the basis of the algorithm and its software implementation in C #, the samples of the sequence ensembles of various lengths were obtained and their periodic and aperiodic correlation functions and statistical characteristics were studied in detail. As an illustration, some of the most typical correlation functions are presented. The most remarkable characteristics allowing assessing the feasibility of using this type of sequences in the design of specific types of radio systems are considered.

On the basis of the proposed program and the performed calculations the conclusions can be drawn about the possibility of using the sequences of these classes, with the aim of reducing intra-system disturbance in the projected spread spectrum CDMA.

References

1. Ipatov V.P. *Spread Spectrum and CDMA. Principles and Applications*. New York, John Wiley and Sons Ltd, 2005. (Russ. ed.: Ipatov V.P. *Shirokopolosnye sistemy i kodovoe razdelenie signalov. Printsipy i prilozheniya*. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2007. 488 p.).
2. Gantmakher V.E., Bystrov N.E., Chebotarev D.V. *Shumopodobnye signaly. Analiz, sintez, obrabotka* [Spread-spectrum signals. Analysis, synthesis, processing]. St. Petersburg, Nauka i tekhnika Publ., 2005. 400 p. (in Russian).

3. Potekhin E.N. *Sintez i analiz optimal'nykh binarnykh posledovatel'nostei. Kand. diss.* [Synthesis and analysis of optimal binary sequences. Cand. diss.]. Yoshkar-Ola, 2014. 184 p. (in Russian).
4. Varakin L.E. *Teoriya system signalov* [Theory of signal systems]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1978. 304 p. (in Russian).
5. Kalmykov V.V., Yudachev S.S. Noise-like Signals for Systems with Code Division of Channels. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Priborostroenie = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Instrument Engineering*, 2005, spec. iss., pp. 161-167. (in Russian).
6. Nechaev A.A. Kerdock's code in cyclic form. *Diskretnaya matematika*, 1989, vol. 1, iss. 4, pp. 123-139. (English version of journal: *Discrete Mathematics and Applications*, 1991, vol. 1, no. 4, pp. 365-384.).
7. Ignat'ev F.V., Ipatov V.P., Flotskaya I.Yu. On the equivalent linear complexity of Kerdock sequences. *Izvestiya SPbGETU "LETI"*, 2010, no. 9, pp. 11-17. (in Russian).