

Оценка условного распределения отказов в пуассоновском потоке через биномиальный закон

08, август 2013

DOI: 10.7463/0813.0586737

Садыхов Г. С., Бабаев И. А.

УДК 311.17

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

gsadykhov@gmail.com

sleavik@gmail.com

Введение

Пусть в последовательности независимых испытаний вероятность события A равна, p причем, $0 < p < 1$. Тогда между функциями распределения биномиального и нормального законов

$$Bin(n, p, m) = \sum_{0 \leq k \leq m} C_n^k p^k q^{n-k} \text{ и } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

существует следующая связь (интегральная теорема Муавра-Лапласа) [1]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Bin(n, p, np + x\sqrt{npq}) = \Phi(x), \quad (-\infty < x < \infty),$$

где C_n^k - число сочетаний из n элементов по k , $q=1-p$.

Для построения статистических проверок гипотез с заданными вероятностями ошибок требуется информация о значениях «хвостов» распределений. Однако, относительная погрешность нормальной аппроксимации биномиального распределения на его «хвостах» довольно велика [2]. Это послужило одной из причин разработки теории больших уклонений, доказательства различных неравенств «хвостов» биномиального закона, а также для «хвостов» распределения сумм случайных величин [3].

В качестве примеров можно указать экспоненциальную оценку «хвостов» для сумм $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ со значениями из отрезка $[0,1]$, которую получил В. Хёвдинг [4]: если $\langle S_n \rangle = n\mu$, (здесь $\langle \cdot \rangle$ - обозначение математического ожидания), то

$$\Pr(S_n - n\mu \geq n\varepsilon) \leq \exp(-2n\varepsilon^2),$$

где $\varepsilon > 0$ - произвольное число, $\Pr(\cdot)$ - обозначение вероятности, а также формулу Пуассона [1] при малых p :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где $\lambda = pn$ - постоянная.

Заметим, что это предельное соотношение послужило основой математической модели пуассоновского потока отказов в теории надёжности, выраженной следующей формулой для вероятности появления k отказов за время длительностью t :

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

В частности, при $k = 0$ из этого соотношения находим формулу для вероятности безотказной работы объекта в течение времени t

$$P_t(0) = e^{-\lambda t},$$

где $\lambda > 0$ - заданная (постоянная) интенсивность отказов.

1. Постановка задачи

В системе управления надёжностью часто возникает вопрос о соответствии интенсивности отказов определенного типа комплектующих изделий (КИ) среднему значению интенсивности отказов для группы КИ разных типов, объединенных по принципу единства технологии изготовления, назначения и условий их эксплуатации.

Для решения этого вопроса обычного сравнения точечных оценок интенсивностей отказов группы типов КИ по ряду причин недостаточно. В связи с этим возникает задача статистической проверки, так называемой, нулевой гипотезы о соответствии интенсивности отказов типа среднегрупповому значению интенсивности отказов в случае пуассоновского процесса.

2. Основное утверждение

Допустим, что группу образует n типов КИ. Пусть наработка k -го типа составила t_k часов, а число отказов в количестве $\hat{r}_k$. Через r_k ($r_k = r(t_k)$) обозначим случайное число отказов, а через $\hat{r}_k$ - наблюдаемое число.

Общая наработка группы типов КИ при этом составит

$$t_z = \sum_{k=1}^n t_k.$$

Пусть λ_k - интенсивность отказов k -го типа КИ.

Тогда для пуассоновской случайной величины $r_z = \sum_{k=1}^n r_k$ имеем

$$\langle r_z \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k t_k, \quad (1)$$

так как

$$\langle r_k \rangle = \lambda_k t_k,$$

где $\langle \cdot \rangle$ - математическое ожидание величины, стоящей внутри угловых скобок.

С другой стороны,

$$\langle r_z \rangle = \lambda_z t_z. \quad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) найдем

$$\lambda_2 = \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k t_k}{t_2},$$

где λ_k и λ_2 постоянны.

Пусть имеются основания предполагать, что неизвестная интенсивность отказов k -го типа КИ λ_k ($k=1,2,\dots,n$) равна среднегрупповой интенсивности отказов λ_2 , которая в свою очередь тоже неизвестна, т. е. определим нулевую гипотезу

$$H_0: \lambda_k = \lambda_2 \quad (3)$$

и займемся построением решающего правила ее проверки при наблюдаемом числе отказов $\hat{r}_k$ и $\hat{r}_2$ и соответствующих наработках t_k и t_2 .

Для этой цели нам необходимо доказать следующее утверждение

Теорема. При условии нулевой гипотезы (3) справедлива следующая формула:

$$\Pr((r_k = \hat{r}_k)/(r_2 = \hat{r}_2)) = C_{\hat{r}_2}^{\hat{r}_k} \rho_k^{\hat{r}_k} (1 - \rho_k)^{\hat{r}_2 - \hat{r}_k}, \quad (4)$$

где

$$\rho_k = \frac{t_k}{t_2}, \quad (5)$$

$C_{\hat{r}_2}^{\hat{r}_k}$ - число сочетаний из $\hat{r}_2$ элементов по $\hat{r}_k$;

$\Pr((\cdot)/(\cdot))$ - обозначение условной вероятности события, находящегося в первой скобке относительно события, содержащегося во второй скобке.

Доказательство. Из определения пуассоновского потока отказов имеем

$$\Pr(r_k = \hat{r}_k) = \frac{(\lambda_k t_k)^{\hat{r}_k} e^{-\lambda_k t_k}}{\hat{r}_k!}, \quad (6)$$

$$\Pr(r_2 = \hat{r}_2) = \frac{(\lambda_2 t_2)^{\hat{r}_2} e^{-\lambda_2 t_2}}{\hat{r}_2!}. \quad (7)$$

Рассмотрим следующее условное распределение отказов k -го типа КИ при заданном числе отказов в группе, которое, в силу известных формул из теории вероятностей, равно [1]

$$\Pr\left((r_k = \hat{r}_k) / (r_z = \hat{r}_z)\right) = \frac{\Pr\left((r_k = \hat{r}_k) \cap (r_z = \hat{r}_z)\right)}{\Pr(r_z = \hat{r}_z)}, \quad (8)$$

где $\cap$ – символ произведения событий, заключенных в скобках.

Поскольку r_k и $r_z - r_k$ независимые случайные величины, то имеем

$$\begin{aligned} \Pr\left((r_k = \hat{r}_k) / (r_z = \hat{r}_z)\right) &= \frac{\Pr\left((r_k = \hat{r}_k) \cap (r_z - r_k = \hat{r}_z - \hat{r}_k)\right)}{\Pr(r_z = \hat{r}_z)} = \\ &= \frac{\Pr(r_k = \hat{r}_k) \cdot \Pr(r_z - r_k = \hat{r}_z - \hat{r}_k)}{\Pr(r_z = \hat{r}_z)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Пуассоновская величина $r_z - r_k$ при условии справедливости гипотезы (3) имеет математическое ожидание, равное $\lambda_z(t_z - t_k)$, поэтому

$$\Pr(r_z - r_k = \hat{r}_z - \hat{r}_k) = \frac{[\lambda_z(t_z - t_k)]^{\hat{r}_z - \hat{r}_k}}{(\hat{r}_z - \hat{r}_k)!} e^{-\lambda_z(t_z - t_k)}. \quad (10)$$

Подставляя соотношения (6), (7) и (10) в (9), получим

$$\frac{\Pr\left((r_k = \hat{r}_k) \cap (r_z = \hat{r}_z)\right)}{\Pr(r_z = \hat{r}_z)} = \frac{\hat{r}_z!}{\hat{r}_k! (\hat{r}_z - \hat{r}_k)!} \frac{(\lambda_k t_k)^{\hat{r}_k} [\lambda_z(t_z - t_k)]^{\hat{r}_z - \hat{r}_k}}{(\lambda_z t_z)^{\hat{r}_z}} e^{-\lambda_k t_k - \lambda_z(t_z - t_k) + \lambda_z t_z}.$$

Откуда, с учетом справедливости гипотезы (3), имеем

$$\frac{\Pr\left((r_k = \hat{r}_k) \cap (r_z = \hat{r}_z)\right)}{\Pr(r_z = \hat{r}_z)} = C_{\hat{r}_z}^{\hat{r}_k} \rho_k^{\hat{r}_k} (1 - \rho_k)^{\hat{r}_z - \hat{r}_k},$$

где значение ρ_k определено формулой (5).

Наконец, подставляя полученное выражение в соотношение (8), получим искомую формулу (4), что и требовалось доказать.

Другими словами, доказанная теорема устанавливает связь условного распределения числа отказов в пуассоновском потоке через биномиальный закон.

В свою очередь, установленная связь позволяет при конкурирующей гипотезе

$$H_1: \lambda_k > \lambda_2$$

в качестве решающего правила определить следующее условие для принятия гипотезы (3):

$$\sum_{i=\hat{r}_k}^{\hat{r}_2} C_{\hat{r}_2}^i \rho_k^i (1-\rho_k)^{\hat{r}_2-i} \geq \alpha, \quad (11)$$

где α - уровень значимости критерия (α - мало), а ρ_k определено соотношением (5).

Если же

$$\sum_{i=\hat{r}_k}^{\hat{r}_2} C_{\hat{r}_2}^i \rho_k^i (1-\rho_k)^{\hat{r}_2-i} < \alpha, \quad (12)$$

то нулевая гипотеза (3) при конкурирующей H_1 отвергается.

Приведём следующий пример использования проверки гипотезы (3) при конкурирующей гипотезе H_1 .

Пример. Нарботка k -го типа КИ составила $t_k = 5 \cdot 10^6$ ч, а наработка группы КИ - $t_2 = 1 \cdot 10^7$ ч. При этом число отказов k -го типа КИ составляет $\hat{r}_k = 9$, а для группы $\hat{r}_2 = 10$. Требуется проверить нулевую гипотезу $H_0: \lambda_k = \lambda_2$ с уровнем значимости $\alpha = 0,1$ при конкурирующей гипотезе $H_1: \lambda_k > \lambda_2$.

Решение. Воспользуемся решающим правилом в виде (11) или (12). Для этой цели определим величину

$$\sum_{i=\hat{r}_k}^{\hat{r}_2} C_{\hat{r}_2}^i \rho_k^i (1-\rho_k)^{\hat{r}_2-i},$$

которая, после подстановки исходных данных примера, равна

$$\sum_{i=9}^{10} C_{10}^i \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{11}{2^{10}}.$$

Очевидно, что $11/2^{10}$ значительно меньше $\alpha = 0,1$. Следовательно, согласно (12), нулевая гипотеза $H_0 : \lambda_k = \lambda_2$ отвергается.

Заметим, что точечные оценки интенсивностей отказов в условиях примера имеют для k -го типа КИ и группы, соответственно, следующие значения:

$$\hat{\lambda}_k = 1,8 \cdot 10^{-6} \frac{1}{q}, \quad \hat{\lambda}_2 = 1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{q}.$$

Выводы

Таким образом, установлена оценка условного распределения отказов в пуассоновском потоке через биномиальный закон. Установленная оценка позволяет построить новые решающие правила при проверке нулевой гипотезы $H_0 : \lambda_k = \lambda_2$.

Работа выполнена при поддержке ОАО РТИ им. акад. А.Л. Минца.

Список литературы

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: КомКнига URSS, 2005. 397 с.
2. Зубков А.М., Серов А.А. Незамеченные наилучшие неравенства для биномиального закона // Международная конференция «Теория вероятностей и её приложения»: сб. докл. М.: Ленанд, 2012. С. 35-36.
3. Садыхов Г.С., Савченко В.П. Зависимость показателей ресурса от характеристик его расходования // Доклады РАН. 1998. Т. 361, № 2. С. 189-191.
4. Hoeffding W. Probability inequalities for sums of bounded random variables // J. Amer. Statist. Ass. 1963. Vol. 58, no. 301. P. 13-30.

Evaluation of conditional distribution of failures over the Poissonian flow with the use of the binomial law

08, August 2013

DOI: 10.7463/0813.0586737

Sadyhov G.S., Babaev I.A.

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation

gsadykhov@gmail.comsleavik@gmail.com

This paper presents results of the evaluation of conditional distribution of failures over the Poissonian flow by the binomial law. The determined assessment allows one to build new decision rules for testing the null hypothesis of correspondence of failure intensity for a component item's type with a group of such items collected on the principle of uniformity of a manufacturing technology and similarity of application domains. The authors also give an example of using this estimation for testing the null hypothesis of the correspondence of the failure intensity for a component item's type with the mean group failure intensity in case of an alternative hypothesis, assuming that the failure intensity of the type is larger than the mean group one.

Publications with keywords: [failure rate](#), [null hypothesis](#), [Poisson failure flow](#), [binomial law](#)
Publications with words: [failure rate](#), [null hypothesis](#), [Poisson failure flow](#), [binomial law](#)

References

1. Gnedenko B.V., Kovalenko I.N. *Vvedenie v teoriyu massovogo obsluzhivaniya* [Introduction to queuing theory]. Moscow, KomKniga URSS, 2005. 397 p.
2. Zubkov A.M., Serov A.A. Nezamechennye nailuchshie neravenstva dlya binomial'nogo zakona [Unnoticed best inequality for binomial law]. *Mezhdunarodnaya konferentsiya "Teoriya veroyatnostey i ee prilozheniy" : sb. dokl.* [International conference "Probability Theory and its applications" : proc.]. Moscow, Lenand, 2012, pp. 35-36.
3. Sadykhov G.S., Savchenko V.P. Zavisimost' pokazateley resursa ot kharakteristik ego raskhodovaniya [Dependence of the index of resource upon the characteristics of its expenditure]. *Doklady RAN*, 1998, vol. 361, no. 2, pp. 189-191.
4. Hoeffding W. Probability inequalities for sums of bounded random variables. *J. Amer. Statist. Ass.*, 1963, vol. 58, no. 301, pp. 13-30.