Наука и Образование
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0448

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Электрон. журн. 2014. № 11. С. 748–770.

DOI: **10.7463/1114.0734246**

Представлена в редакцию:	09.08.2014
Исправлена:	27.10.2014

УДК 539.3

Моделирование вязкоупругих характеристик слоисто-волокнистых полимерных композиционных материалов

Димитриенко Ю. И.[1,*], Губарева Е. А.[1], Сборщиков С. В.[1], Федонюк Н. Н.[2]

[*] dimit.bmstu@gmail.com

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
[2]Крыловский государственный научный центр, Санкт-Петербург, Россия

Разработана методика расчета вязкоупругих характеристик ПКМ слоисто-волокнистой структуры при установившихся циклических колебаниях, основанная на применении теории асимптотического осреднения периодических структур, позволяет вычислять полный набор комплексных модулей упругости данного типа композитов, с помощью достаточно простых аналитических соотношений. Приведены примеры численного моделирования вязкоупругих характеристик 1D композитов, а также слоисто-волокнистых композитов, которые показали, что максимальные значения вязкоупругих свойств, характеризуемые тангенсом угла потерь комплексных модулей упругости, реализуются в поперечном направлении к ориентации армирующих волокон и при продольных сдвигах. Показано, что эти особенности вязкоупругих свойств композитов предъявляют определенные требования к методикам расчета напряжений в тонкостенных конструкциях из вязкоупругих композитов, предполагая, что должны вычисляться трансверсальные и межслоевые напряжения, которыми как правило пренебрегают в классических теориях тонких пластин.

Ключевые слова: вязкоупругие характеристики, композиты, полимерные композиционные материалы, слоисто-волокнистые материалы, метод асимптотического осреднения, комплексные модули упругости, тангенс угла потерь

Введение

В настоящее время в качестве силовых элементов авиационных и судовых конструкций перспективным является использование полимерных композиционных материалов (ПКМ), которые наряду с многими замечательными свойствами - низкой плотностью, высокой удельной жесткостью и прочностью, повышенной стойкостью в агрессивных средах, в частности в морской воде, обладают одновременно и ярко выраженными вязкоупругими свойствами, что позволяет одновременно использовать их в качестве вибродемпфирующих элементов и отказаться от создания специализированных систем демпфирования.

Среди работ, посвященных исследованию вязкоупругих характеристик ПКМ, отметим [1-8]. Диссипация энергии в материалах при вибрационном нагружении обусловлена внутренним трением, и с точки зрения термомеханики деформируемых твердых сред ("из первых принципов") это явление описывается моделями термовязкоупругих сред [2,5,9-11]. Разработке моделей вязкоупругого поведения композитов посвящены работы [12-18]. Целью настоящей работы является разработка метода расчета вязкоупругих характеристик ПКМ слоисто-волокнистой структуры, которые широко применяются при создании авиационных и судовых конструкций, исходя их диссипативных характеристик составляющих компонентов ПКМ - матрицы и армирующих волокон. Метод основан на применении теории асимптотического осреднения периодических структур [19-24] для вязкоупругих композитов при установившихся циклических колебаниях.

Постановка задачи линейной вязкоупругости при циклических колебаниях

Рассмотрим задачу механики линейно вязкоупругой среды [11] при переменных нагрузках, при относительно невысоких частотах, когда инерционными силами можно пренебречь:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla \otimes \mathbf{u} + \nabla \otimes \mathbf{u}^{T}\right), \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon} - \int_0^t {}^4\mathbf{K}(t_1 - \tau_1)\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)\frac{d\tau}{a_\theta},$$

$$\boldsymbol{\sigma}\ \Big|_{\Sigma_1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{S}(t),\ \mathbf{u}\ \Big|_{\Sigma_2} = \mathbf{u}^e(t),$$

здесь обозначены: ∇ - набла-оператор [25], $\boldsymbol{\sigma}$ - тензор напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}$ - тензор малых деформаций, $\mathbf{u}$ - вектор перемещений, $\mathbf{S}(t)$ - вектор внешних усилий на части границы Σ_1, $\mathbf{u}^e(t)$ - вектор заданных перемещений на части границы Σ_2, $\mathbf{n}$ - вектор внешней нормали, ${}^4\mathbf{C}$ - тензор 4-го ранга - тензор модулей упругости, а ${}^4\mathbf{K}(t_1 - \tau_1)$ - тензор ядер релаксаций.

Соотношения линейной вязкоупругости в системе (1) соответствуют принципу температурно-временной аналогии [24], согласно которому влияние температуры на вязкоупругие характеристики материалов может быть учтено с помощью приведенного времени

$$\tau_1 = \int_0^\tau \frac{d\tau}{a_\theta(\theta(\tau))},\ t_1 = \int_0^t \frac{d\tau}{a_\theta(\theta(\tau))},\ a_\theta = \exp\left(-\frac{a_1\Delta\theta}{a_2 + \Delta\theta}\right), \tag{2}$$

где $a_\theta(\theta(\tau))$ - функция температурного сдвига, a_1, a_2 - константы, θ - температура, $\Delta\theta = \theta - \theta_0$, а θ_0 - начальное значение температуры.

Рассмотрим случай установившихся колебаний, когда изменения векторов внешних усилий $\mathbf{S}(t)$ и заданных перемещений $\mathbf{u}^e(t)$ происходит по моногармоническому закону

$$\mathbf{S}(t) = \mathrm{Re}\left(\mathbf{S}^* e^{i\omega t}\right),\ \mathbf{u}^e(t) = \mathrm{Re}\left(\mathbf{u}^{e*} e^{i\omega t}\right), \tag{3}$$

где $\mathbf{S}^*$, $\mathbf{u}^{e*}$ - комплексные амплитуды колебаний, ω - заданная частота колебаний. Тогда будем искать перемещения $\mathbf{u}$, являющиеся решением задачи (1) также в моногармоническом виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathrm{Re}\left(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) e^{i\omega t}\right). \tag{4}$$

Подставляя выражение (4) в (1) и (2), получаем, что деформации и напряжения также являются моногармоническими функциями, если пренебречь начальным периодом колебаний: $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{Re}(\boldsymbol{\varepsilon}^* e^{i\omega t})$, $\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{Re}(\boldsymbol{\sigma}^* e^{i\omega t})$, где $\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\varepsilon}^*$ - комплексные амплитуды тензоров напряжений и деформаций, связанные следующими соотношениями: $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \frac{1}{2}\left(\nabla \otimes \mathbf{u}^* + \nabla \otimes \mathbf{u}^{*T}\right)$ и $\boldsymbol{\sigma}^* = {}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}) \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}^*$. Здесь обозначен тензор комплексных модулей упругости

$$^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}) = {}^4\mathbf{C} - {}^4\mathbf{K}*(\tilde{\omega}),\ {}^4\mathbf{K}*(\tilde{\omega}) = \int_0^{+\infty} {}^4\mathbf{K}(\tau) e^{-i\tilde{\omega}\tau} d\tau, \tag{5}$$

а $\tilde{\omega} = \omega a_\theta(\theta)$ - приведенная частота колебаний.

Присоединяя к этим соотношениям для амплитуд уравнения квазистатических колебаний, а также граничные условия, получаем следующую постановку задачи теории вязкоупругости при установившихся колебаниях:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^* = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}^* = {}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}) \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}^* \\ \boldsymbol{\varepsilon}^* = \frac{1}{2}\left(\nabla \otimes \mathbf{u}^* + \nabla \otimes \mathbf{u}^{*T}\right) \\ \boldsymbol{\sigma}^* \big|_{\Sigma_1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{S}^*,\ \mathbf{u}^*\big|_{\Sigma_2} = \mathbf{u}^{e*}. \end{cases} \tag{6}$$

Вязкоупругие характеристики изотропных компонентов композитов

Для изотропных вязкоупругих материалов тензор модулей упругости имеет 2 независимые константы: K - модуль объемного сжатия и G - модуль сдвига, тензор ядер релаксации $^4\mathbf{K}(\tau)$ имеет 2 независимые функции - $K_K(t), K_G(t)$ - ядра объемной и сдвиговой релаксации, причем для большинства твердых сред, объемной релаксацией можно пренебречь [5,20], тогда тензоры $^4\mathbf{C}$ и $^4\mathbf{K}(t)$ можно представить в следующем виде [11]

$$^4\mathbf{C} = (K - \frac{2}{3}G)\mathbf{E}\otimes\mathbf{E} + 2G\Delta \ , \ ^4\mathbf{K}(t) = K_G(t)(\mathbf{E}\otimes\mathbf{E} + 2\Delta), \tag{7}$$

где Δ - единичный тензор 4-го ранга, $\mathbf{E}$ - метрический тензор. После подстановки выражений (7) в (5), получаем

$$^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}) = (K - \frac{2}{3}G^*(\tilde{\omega}))\mathbf{E}\otimes\mathbf{E} + 2G^*(\tilde{\omega})\Delta \ , \tag{8}$$

где

$$G^*(\tilde{\omega}) = G - K_G{}^*(\tilde{\omega}),\ K_G{}^*(\tilde{\omega}) = \int_0^{+\infty} K_G(\tau)e^{-i\tilde{\omega}\tau}d\tau, \tag{9}$$

-комплексный модуль сдвига.

Принимаем для ядра релаксации $K_G(\tau)$ модель в виде суммы экспонент [5,11]

$$K_G(t) = \sum_{\gamma=1}^{n} A_\gamma e^{-t/\tau_\gamma}, \tag{10}$$

где A_γ, τ_γ - вязкоупругие константы материала (спектры релаксации и времен релаксации). Тогда для комплексного модуля сдвига G^* имеем следующее аналитическое выражение от приведенной частоты колебаний

$$G^* = G^/ + iG^{//},\ G^/ = G + \sum_{\gamma=1}^{N} \frac{A_\gamma}{1+(\tilde{\omega}\tau_\gamma)^2}\ ,\ G^{//} = \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{A_\gamma\omega\tau_\gamma}{1+(\omega\tau_\gamma)^2}. \tag{11}$$

Рассмотренная модель вязкоупругих характеристик изотропных материалов имеет следующий набор констант G, K, A_γ, τ_γ, a_1, a_2. Комплексный модуль упругости матрицы E^* и комплексный коэффициент Пуассона ν^* могут быть вычислены по формулам, формально совпадающим с формулами для упругих констант [5,11]:

$$E^* = \frac{9KG^*}{3K + G^*},$$

$$\nu^* = \frac{3K - 2G^*}{6K + 2G^*}.$$

Вязкоупругие характеристики однонаправленных волокнистых композитов

Однонаправленные композиционные материалы (1D композиты), состоящие из пучков волокон, собранных в нити, и связанных между собой полимерной матрицей, представляют собой трансверсально-изотропные материалы, даже, если матрица и волокна являются изотропными. Для вычисления компонент тензоров комплексных модулей упругости 1D композита C^*_{ijkl} воспользуемся приближенной моделью смесевого типа [20,26,27], в которой каждая нить представляет собой систему большого числа параллельно расположенных однонаправленных (1D) элементов цилиндрической формы. Тогда комплексные модули упругости нити можно вычислить по следующим формулам:

$$E_L^* = E_f\varphi_f + E_m^*(1-\varphi_f),\ E_T^* = (\frac{\varphi_f}{E_f} + \frac{1-\varphi_f}{E_m^*})^{-1},$$

$$\nu_L^* = \nu_f\varphi_f + \nu_m^*(1-\varphi_f),\ \nu_T^* = \nu_m^*, \qquad (12)$$

$$G_L^* = \frac{1}{2}(\frac{\varphi_f(1+\nu_f)}{E_f} + \frac{(1-\varphi_f)(1+\nu_m^*)}{E_m^*})^{-1},$$

где E_L^* – продольный комплексный модуль упругости 1D композита в направлении ориентации волокон, E_T^* – поперечный комплексный модуль упругости нити, ν_L^* - продольный комплексный коэффициент Пуассона, ν_T^* - поперечный комплексный коэффициент Пуассона, G_L^* - продольный комплексный модуль сдвига, $G_T^* = \frac{E_T^*}{2(1+\nu_T^*)}$ - поперечный комплексный модуль сдвига. Волокна полагаются упругими, а матрица - вязкоупругой, в формулах (12) обозначены: E_f - модуль упругости волокон, ν_f - продольный и поперечный коэффициенты Пуассона моноволокон, G'_f - продольный модуль сдвига моноволокон, E_m^* и ν_m^* - комплексные модуль упругости и коэффициент Пуассона матрицы, φ_f - относительное объемное содержание волокон.

По полученным значениям упругих констант (формулы (12)) составим компоненты тензора комплексных упругих податливостей Π_{ijkl}^{*0} 1D композита:

$$(\Pi_{ijkl}^{*0}) = \begin{bmatrix} \Pi_{1111}^{*0} & \Pi_{1122}^{*0} & \Pi_{1133}^{*0} & 0 & 0 & 0 \\ & \Pi_{2222}^{*0} & \Pi_{2233}^{*0} & 0 & 0 & 0 \\ & & \Pi_{3333}^{*0} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\Pi_{1313}^{*0} & 0 & 0 \\ & сим. & & & 2\Pi_{2323}^{*0} & 0 \\ & & & & & 2\Pi_{1212}^{*0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L^*} & -\frac{\nu_L^*}{E_L^*} & -\frac{\nu_L^*}{E_L^*} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_L^*}{E_L^*} & \frac{1}{E_T^*} & -\frac{\nu_T^*}{E_T^*} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_L^*}{E_L^*} & -\frac{\nu_T^*}{E_T^*} & \frac{1}{E_T^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_L^*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_T^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_L^*} \end{bmatrix} \qquad (13).$$

Тензор комплексных модулей упругости 1D композита является обратным к тензору комплексных упругих податливостей: $C_{ijkl}^{*0} = (\Pi_{ijkl}^{*0})^{-1}$.

Слоисто-волокнистые композиты представляют собой многослойные материалы, каждый слой которых представляет собой 1D композит, повернутый на угол ϕ_α вокруг оси $O\xi_3$ (рис.1).

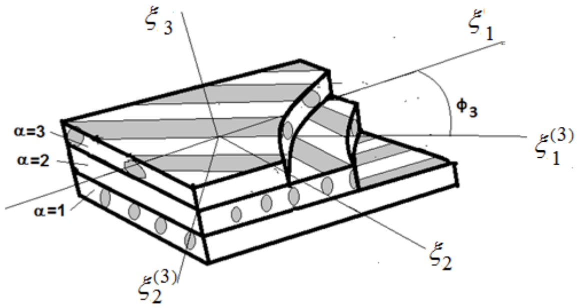

Рис.1.Ячейка периодичности слоисто-волокнистого композита с числом слоев N=3.

Тогда в повернутой (собственной) системе координат $O\xi_i^{(\alpha)}$, ось $O\xi_1^{(\alpha)}$ которой совпадает с направлением ориентации волокон каждого слоя, компоненты $C_{ijkl}^{*0} = (\Pi_{ijkl}^{*0})^{-1}$ тензоров комплексных модулей упругости вычисляем по формулам (13), а в единой для всех слоев системе координат СВК $O\xi_i$ компоненты тензора модулей упругости α -го слоя вычисляются с помощью формул преобразования компонент тензора 4-го ранга [25]:

$$C_{ijkl}^{*}(\xi) = C_{mnpq}^{*0} Q^{\alpha}{}_{im} Q^{\alpha}{}_{jn} Q^{\alpha}{}_{kp} Q^{\alpha}{}_{\ell q}, \qquad \xi \in V_{\xi\alpha}\,, \tag{14}$$

здесь $Q^{\alpha}{}_{im}$ – элементы матрицы поворота слоя с номером α, эта матрица имеет следующий вид:

$$[Q^{\alpha}{}_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos\phi_\alpha & \sin\phi_\alpha & 0 \\ -\sin\phi_\alpha & \cos\phi_\alpha & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Применение метода асимптотического осреднения для вязкоупругих композитов

Рассмотрим теперь общий случай вязкоупругого композита, состоящего из N компонент, и обладающего периодической структурой. На границах раздела компонентов будем полагать выполненными условия идеального контакта

$$[\boldsymbol{\sigma}^*]\cdot\mathbf{n} = 0\,,\ [\mathbf{u}^*] = 0\,, (16)$$

где [ ] - скачок функций. Тогда для композита в целом можно сформулировать задачу (6), но тензор комплексных модулей упругости ${}^4\mathbf{C}^*$ будет зависеть еще и от координат, в качестве которых выберем локальные координаты $\boldsymbol{\xi}$ ячейки периодичности (ЯП) композита [21,22], тогда: ${}^4\mathbf{C}^* = {}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega},\boldsymbol{\xi})$. Введем малый параметр $\kappa = l/L$, где l - характерный размер ЯП, L - глобальный размер конструкции из ПКМ, и $\mathbf{x}$ - глобальные координаты, связанные с локальными координатами соотношением $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}/\kappa$. Функции $\mathbf{u}^*(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ и ${}^4\mathbf{C}^* = {}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega},\boldsymbol{\xi})$ будем считать периодичными по $\boldsymbol{\xi}$. Введем также обозначения для производных по $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\xi}$: $\nabla_x = \mathbf{e}^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$; $\nabla_\xi = \mathbf{e}^i \dfrac{\partial}{\partial \xi^i}$, где $\mathbf{e}^i$ - векторы базиса. Имеет место следующее правило дифференцирования периодических функций: $\nabla = \nabla_x + \kappa^{-1}\nabla_\xi$. Обозначим $\langle f(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\rangle = \dfrac{1}{V_\xi}\int\limits_{V_\xi} f(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})d\xi_1 d\xi_2 d\xi_2$ - оператор осреднения по ЯП.

Тогда в соответствии с методом асимптотического осреднения [19-23] представим перемещения $\mathbf{u}^*$, являющиеся решением задачи (6), в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра κ

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}^{*(0)}(\mathbf{x}) + \kappa\mathbf{u}^{*(1)}(\boldsymbol{\xi},\mathbf{x}) + \kappa^2\mathbf{u}^{*(2)}(\boldsymbol{\xi},\mathbf{x}) + \dots \quad . \tag{17}$$

Для напряжений и деформации также имеет место асимптотическое разложение вида (19)

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon}^{*(0)} + \kappa\boldsymbol{\varepsilon}^{*(1)} + \kappa^2\dots, \quad \boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}^{*(0)} + \kappa\boldsymbol{\sigma}^{*(1)} + \kappa^2\dots, \tag{18}$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{*(0)} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^* + \frac{1}{2}(\nabla_\xi \otimes \mathbf{u}^{*(1)} + \nabla_\xi \otimes \mathbf{u}^{*(1)T}), \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = \frac{1}{2}(\nabla_x \otimes \mathbf{u}^{*(0)} + \nabla_x \otimes \mathbf{u}^{*(0)T}), \tag{19}$$

причем в нулевом приближении имеют место следующие определяющие соотношения вязкоупругости: $\boldsymbol{\sigma}^{*(0)} = {}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega},\boldsymbol{\xi})\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{*(0)}$.

Подставляя разложения (18) в уравнение системы (6), и собирая в каждом уравнении члены при одинаковых степенях малого параметра κ, получаем из условия равенства нулю членов при наименьших степенях параметра κ следующую задачу вязкоупругости "на ячейке периодичности"

$$\begin{cases} \nabla_\xi \cdot \boldsymbol{\sigma}^{*(0)} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}^{*(0)} = {}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega},\boldsymbol{\xi})\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{*(0)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{*(0)} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^* + \dfrac{1}{2}(\nabla_\xi \otimes \mathbf{u}^{*(1)} + \nabla_\xi \otimes \mathbf{u}^{*(1)T}), \\ [\boldsymbol{\sigma}^{*(0)}]\cdot\mathbf{n} = 0, \ [\mathbf{u}^{*(1)}] = 0, \\ [[\boldsymbol{\sigma}^{*(0)}]]\cdot\mathbf{n} = 0, \ [[\mathbf{u}^{*(1)}]] = 0, \\ < \mathbf{u}^{*(1)} >= 0. \end{cases} \tag{20}$$

здесь обозначены $[[\boldsymbol{\sigma}^{*(0)}]]\cdot\mathbf{n}=0$, $[[\mathbf{u}^{*(1)}]]=0$ - условия периодичности функций на границах ячейки периодичности, а $<\mathbf{u}^{*(1)}>=0$ - условие нормировки. Формальное решение задачи (20) в силу ее линейности может быть записано в виде

$$\mathbf{u}^{*(1)} = {}^3\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})\cdot\cdot\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*,\ \boldsymbol{\varepsilon}^{*(0)} = (\Delta+\frac{1}{2}(\nabla_\xi\otimes{}^3\mathbf{N}+\nabla_\xi\otimes{}^3\mathbf{N}^T))\cdot\cdot\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*\ , \tag{21}$$

где ${}^3\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})$ - неизвестная тензор-функция 3-го ранга. Тогда, подставляя эти выражения в определяющее соотношение системы (22), и, осредняя его по ЯП, получаем искомые эффективные определяющие соотношения вязкоупругости

$$<\boldsymbol{\sigma}^{*(0)}> = {}^4\bar{\mathbf{C}}^*(\omega)\cdot\cdot\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*, \tag{22}$$

где обозначен эффективный тензор комплексных модулей упругости

$$\bar{\mathbf{C}}^*(\omega) = <{}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega},\boldsymbol{\xi})\cdot\cdot(\Delta+\frac{1}{2}(\nabla_\xi\otimes{}^3\mathbf{N}+\nabla_\xi\otimes{}^3\mathbf{N}^T))>. \tag{23}$$

Тензор эффективных комплексных модулей упругости для вязкоупругих СВК композитов

Рассмотрим теперь частный случай СВК композитов, обладающих слоистой структурой, периодической только по одному направлению Ox_3. Соответствующую локальную координату обозначим как $\xi_3=\xi$. Характерный размер ЯП l для слоистого композита представляет собой толщину повторяющегося пакета слоев, глобальный размер L - это толщина СВК, а малый параметр - $\kappa = l/L = 1/N$, где N - число повторяющихся пакетов слоев в составе СВК. Задача (20) на ЯП для СВК является одномерной, и в компонентной записи в декартовом базисе эта задача для слоистых композитов может быть записана следующим образом:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_{ij}^{*(0)}}{\partial\xi}=0,\\
\sigma_{ij}^{*(0)} = C^*_{ijkl}(\tilde{\omega},\xi)\varepsilon_{kl}^{*(0)},\\
2\varepsilon_{kl}^{*(0)} = 2\bar{\varepsilon}_{kl} + \delta_{k3}\frac{\partial u_l^{*(1)}}{\partial\xi} + \delta_{l3}\frac{\partial u_k^{*(1)}}{\partial\xi},\\
\mathrm{u}_i^{*(1)}\Big|_{\xi=-0.5} = \mathrm{u}_i^{*(1)}\Big|_{\xi=0.5},\quad \sigma_{i3}^{*(0)}\Big|_{\xi=-0.5} = \sigma_{i3}^{*(0)}\Big|_{\xi=0.5},\\
[\sigma_{i3}^{*(0)}]=0,\qquad [u_3^{*(1)}]=0,\qquad \boldsymbol{\xi}\in\Sigma_{\alpha\beta},\\
\left\langle u_i^{*(1)}\right\rangle = 0
\end{gathered} \tag{24}$$

относительно функций $u_i^{*(1)}$, здесь обозначены: $2\bar{\varepsilon}*_{ij} = \dfrac{\partial u_i^{*(0)}}{\partial \bar{x}_j} + \dfrac{\partial u_j^{*(0)}}{\partial \bar{x}_i}$ - компоненты тензора осредненных деформаций, являющиеся "входными данными задачи". Локальная координата ξ принимает значения в диапазоне от -0.5 до 0.5. Подобно аналогичной задаче в теории упругих композитов [20], задача (24) допускает явное аналитическое решение, получим его несколько иным методом, отличным от предложенного в [20]. Интегрируя уравнение равновесия в системе (24), получаем

$$\sigma_{i1}^{*(0)} = A*_i = const,$$
$$\sigma_{IJ}^{*(0)} = C*_{IJk3}\,\varepsilon_{k3}^{*(0)} + C*_{IJKL}\,\varepsilon_{KL}^{*(0)}, \qquad \sigma_{i3}^{*(0)} = C*_{i3k3}\,\varepsilon_{k3}^{*(0)} + C*_{i3KL}\,\varepsilon_{KL}^{*(0)}, \tag{25}$$
$$\varepsilon_{KL}^{*(0)} = \bar{\varepsilon}_{KL}^{*}, \qquad 2\varepsilon_{k3}^{*(0)} = 2\bar{\varepsilon}_{k3}^{*} + \frac{\partial u_k^{*(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_3^{*(1)}}{\partial \xi}\delta_{k3},$$

где A_i - константы решения, большие индексы I,JK,L принимают значения 2 и 3, а малые ij,k,l–значения 1,2,3. Выразим из второго уравнения этой системы деформации $\varepsilon_{k1}^{*(0)}$:

$$\varepsilon_{k3}^{*(0)} = C_{k3i3}^{*-1}(A_i - C*_{i3KL}\,\bar{\varepsilon}_{KL}^{*}), \tag{26}$$

где C_{k3i3}^{*-1} - компоненты тензора комплексных упругих податливостей, обратного к $C*_{i3k3}$, и подставим в это выражение деформации $\varepsilon_{k1}^{*(0)}$ (5 –е уравнение системы (25)), тогда получим:

$$\frac{\partial u_p^{*(1)}}{\partial \xi} = (2-\delta_{p3})(C_{p3i3}^{*-1}(A_i - C*_{i3KL}\,\bar{\varepsilon}_{KL}^{*}) - \bar{\varepsilon}_{p3}^{*}), \tag{27}$$

по индексу p здесь суммирования нет. Заметим, что условие периодичности (6-е уравнение системы (25)), можно записать в виде $0 = u_p^{*(1)}\big|_{\xi=-0.5} - u_p^{*(1)}\big|_{\xi=0.5} = \int_{-0.5}^{0.5} \frac{\partial u_p^{*(1)}}{\partial \xi} d\xi = < \frac{\partial u_p^{*(1)}}{\partial \xi} >$, следовательно, среднее значение от выражения (27) должно обращаться в ноль, в результате получаем уравнение для нахождения константы A_i: $< C^{*-1}{}_{p1i1}(A_i - C*_{i1KL}\,\bar{\varepsilon}_{KL}^{*}) - \bar{\varepsilon}_{p1}^{*} > = 0$. Отсюда получаем

$$A_i = < C^{*-1}{}_{p3i3} >^{-1} (< C^{*-1}{}_{p3j3} C*_{j3KL} > \bar{\varepsilon}_{KL}^{*} + \bar{\varepsilon}_{p3}^{*}). \tag{28}$$

Подставляя это выражение в (28), находим

$$\varepsilon_{k3}^{*(0)} = C^{*-1}{}_{k3i3}((< C^{*-1}{}_{i3p3} >^{-1} < C*^{-1}{}_{p3j3}\, C*_{j3KL} > - C*_{i3KL})\bar{\varepsilon}_{KL}^{*} + < C^{*-1}{}_{i3p3} >^{-1}\,\bar{\varepsilon}_{p1}^{*}). \tag{29}$$

Наконец, подставляя это выражение в определяющие соотношения (2-е и 3-е уравнения системы (25)), получаем:

$$\sigma_{IJ}^{*(0)} = H_{IJKL}\bar{\varepsilon}_{KL}^{*} + \mathrm{H}_{IJp3}\bar{\varepsilon}_{p3}^{*},$$
$$\sigma_{i3}^{*(0)} = H_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{*(0)} + \mathrm{H}_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{*(0)},$$

$$H_{IJKL} = C*_{IJKL} + C*_{IJk3}\, C*^{-1}{}_{k3i3} < C*^{-1}{}_{i3p3} >^{-1} < C*^{-1}{}_{p3j3}\, C*_{j3KL} > - C*_{IJk3}\, C*^{-1}{}_{k3i3}\, C*_{i3KL}$$

$$H_{IJk1} = C*_{IJj3}\, C*^{-1}{}_{j3i3} < C*^{-1}{}_{i3k3} >^{-1}. \tag{30}$$

Осредняя получившееся выражение по ЯП, находим эффективные определяющие соотношения вязкоупругости слоистого композита:

$$\begin{aligned} &< \sigma_{IJ}^{*(0)} >= \bar{C}*_{IJk3}\, \bar{\varepsilon}_{k3}^{*} + \bar{C}*_{IJKL}\, \bar{\varepsilon}_{KL}^{*}, \\ &< \sigma_{i3}^{*(0)} >= \bar{C}*_{i3k3}\, \bar{\varepsilon}_{k3}^{*} + \bar{C}*_{i3KL}\, \bar{\varepsilon}_{KL}^{*} \end{aligned} \qquad (31)$$

а также компоненты эффективного тензора комплексных модулей упругости слоистого композита:

$$\bar{C}_{IJKL}^{*} =< H_{IJKL} > = < C_{IJKL}^{*} > + < C_{IJk3}^{*}(C_{k3i3}^{*})^{-1} >< (C_{i3p3}^{*})^{-1} >^{-1} < (C_{p3j3}^{*})^{-1} C_{j3KL}^{*} > - < C_{IJk3}^{*}(C_{k3i3}^{*})^{-1} C_{i3KL}^{*} >$$

$$\bar{C}_{IJk3}^{*} =< H_{IJk3} > = < C_{IJj3}^{*}(C_{j3i3}^{*})^{-1} >< (C_{i3k3}^{*})^{-1} >^{-1} . \qquad (32)$$

Заметим, что $< H_{IJk3} >=< H_{k3IJ} >$, но $H_{IJk3} \neq H_{k3IJ}$.

В явном виде формулы (32) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &\bar{C}_{3333}^{*} =< \frac{1}{C_{3333}^{*}} >^{-1} \\ &\bar{C}_{IJ33}^{*} =< \frac{C_{33IJ}^{*}}{C_{3333}^{*}} >< \frac{1}{C_{3333}^{*}} >^{-1} \\ &\bar{C}_{IJKL}^{*} =< C_{IJKL}^{*} > - < \frac{C_{33IJ}^{*} C_{33KL}^{*}}{C_{3333}^{*}} > + < \frac{C_{33IJ}^{*}}{C_{3333}^{*}} >< \frac{C_{33KL}^{*}}{C_{3333}^{*}} >< \frac{1}{C_{3333}^{*}} >^{-1} \\ &\bar{C}_{3I3J}^{*} =< \frac{C_{3I3J}^{*}}{C_{2323}^{*} C_{1313}^{*} - (C_{1323}^{*})^{2}} > (< \frac{C_{2323}^{*}}{C_{2323}^{*} C_{1313}^{*} - (C_{1323}^{*})^{2}} >< \frac{C_{1313}^{*}}{C_{2323}^{*} C_{1313}^{*} - (C_{1323}^{*})^{2}} > - \\ &- < \frac{C_{1323}^{*}}{C_{2323}^{*} C_{1313}^{*} - (C_{1323}^{*})^{2}} >^{2})^{-1} \end{aligned} \qquad (33)$$

здесь I, J, K, L = 1,2.

Результаты численных расчетов вязкоупругих характеристик матрицы, 1D композита и СВК-композита

При численных расчетах были использованы следующие значения характеристик полимерной матрицы эпоксифенольного типа:

$$G_m = 0,345\, ГПа;\;\; K_m = \frac{2G_m}{3}\frac{1+\nu_m}{(1-\nu_m)},\;\; \nu_m = 0.45$$

$$n_m = 1,\; A_1 = 1 \text{ ГПа},\; \tau_1 = 0.01c,\; a_1 = 20K, \qquad a_2 = 300K,$$

а также характеристики волокон, которые считались чисто упругими :

$$E_f = 200\, ГПа;\; \nu_f = 0.25,\; A_k = 0 .$$

Коэффициент армирования 1D композита был принят равным 0.6.

СВК-композит имел следующую структуру армирования: [0/+45/-45/90], с равным соотношением всех 4-х слоев - по 25% каждого слоя.

Были рассчитаны действительные и мнимые части компонент тензора комплексных модулей упругости: $\bar{C}^*_{ijkl}(\tilde{\omega}) = \mathrm{Re}(\bar{C}^*_{ijkl}(\tilde{\omega})) + \mathbf{i}\,\mathrm{Im}(\bar{C}^*_{ijkl}(\tilde{\omega}))$, а также тангенс угла потерь для модулей упругости

$$tg\delta(\bar{C}^*_{ijkl}(\omega)) = \frac{\mathrm{Im}(\bar{C}^*_{ijkl}(\omega))}{\mathrm{Re}(\bar{C}^*_{ijkl}(\omega))}.$$

Расчеты были проведены в диапазоне частот колебаний от 1 до 70 Гц.

На рисунках 2...4 представлены результаты расчетов вязкоупругих характеристик матрицы в зависимости от частоты колебаний. Результаты расчетов показывают, что на частоте ω =9,5 Гц у матрицы существует пик (экстремум) тангенса угла потерь $tg\delta_{G_m} = tg\delta(G^*_m(\omega))$ модуля сдвига. Значения тангенса угла потерь по сдвиговым свойствам составляют 0.75. Аналогичный пик имеется у графика тангенса угла потерь коэффициента Пуассона, но его максимальное значение составляет $tg\delta_{\nu_m}$ =0.12, которое достигается на частоте ω =6,5 Гц.

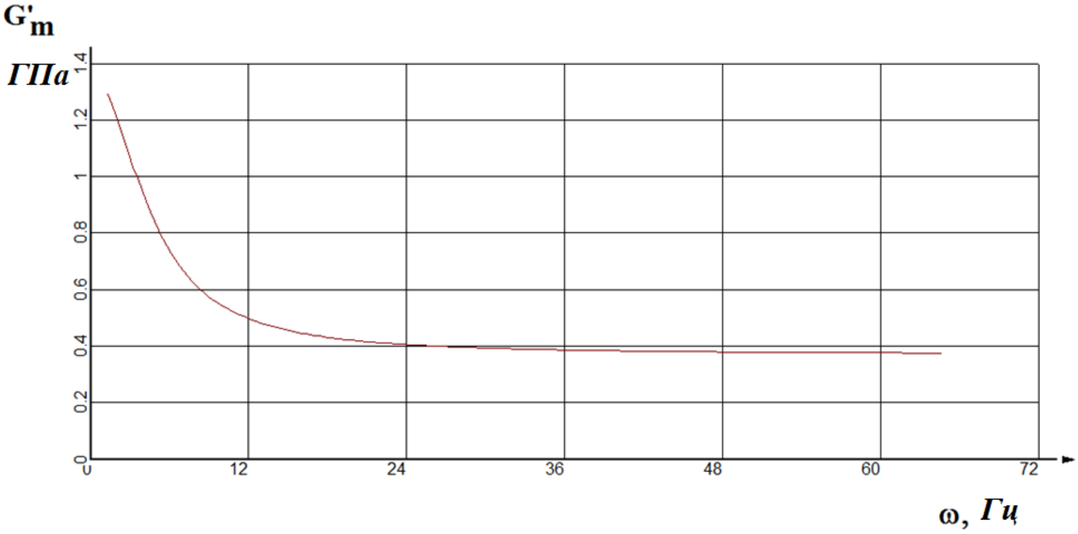

Рис.2 Зависимость действительного модуля сдвига матрицы от частоты колебаний

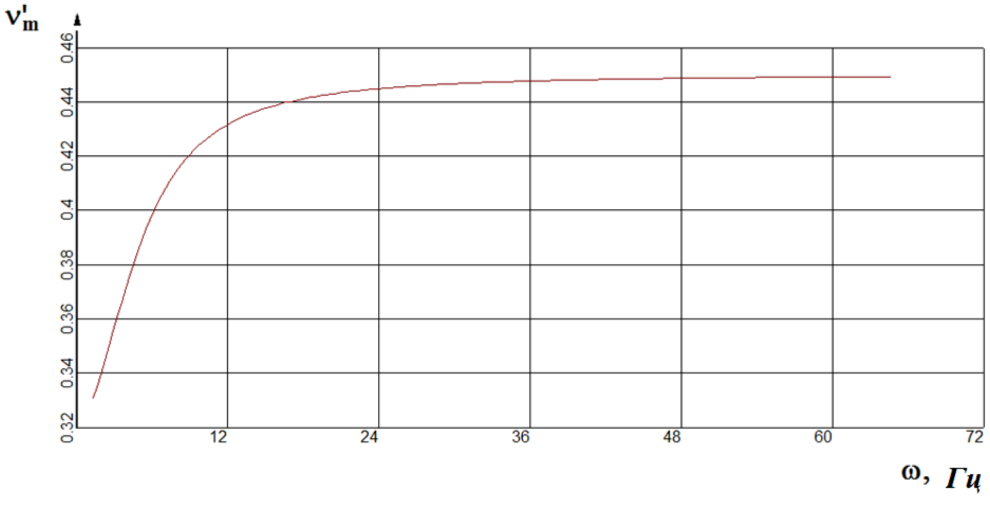

Рис. 3 Зависимость действительного части комплексного коэффициента Пуассона матрицы от частоты колебаний

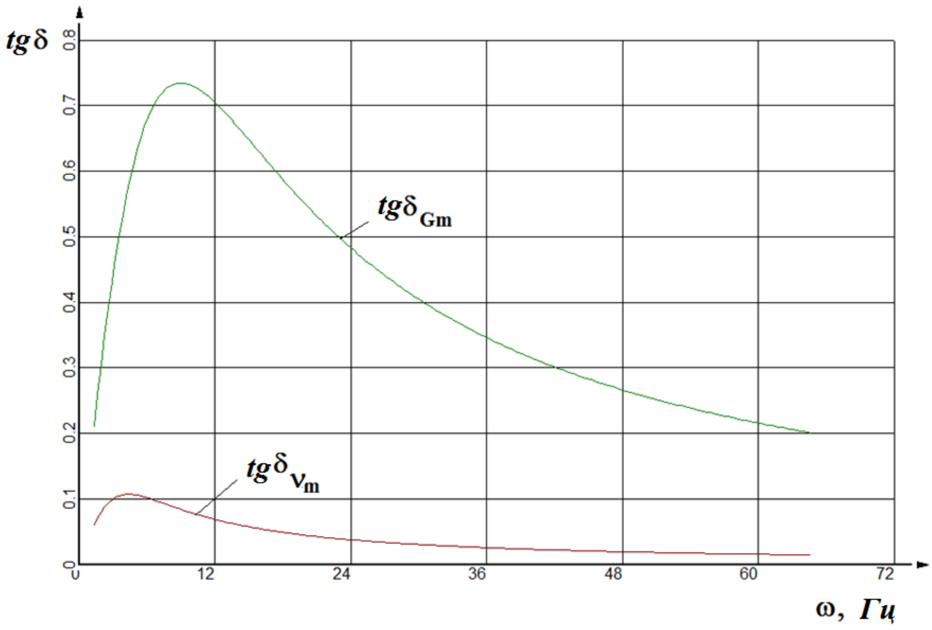

Рис.4 Зависимость тангенса угла потерь комплексного модуля сдвига и комплексного коэффициента Пуассона матрицы от частоты колебаний

На рисунках 5...8 представлены результаты расчетов вязкоупругих характеристик 1D композита в зависимости от частоты колебаний. Результаты расчетов показывают, что экстремум функции тангенса угла потерь $tg\delta_{C_{ijkl}} = tg\delta(C^{*0}_{ijkl}(\omega))$ достигается при той же частоте, что и для матрицы - при ω =9,5. Однако, если для значения тангенса угла потерь в продольном направлении $tg\delta_{C_{1111}}$ составляют всего 0.004, то в поперечном направлении $tg\delta_{C_{3333}}$ составляют 0.52, а при сдвигах $tg\delta_{C_{2323}}$, $tg\delta_{C_{1313}}$ его значения близки к соответствующим значениям матрицы.

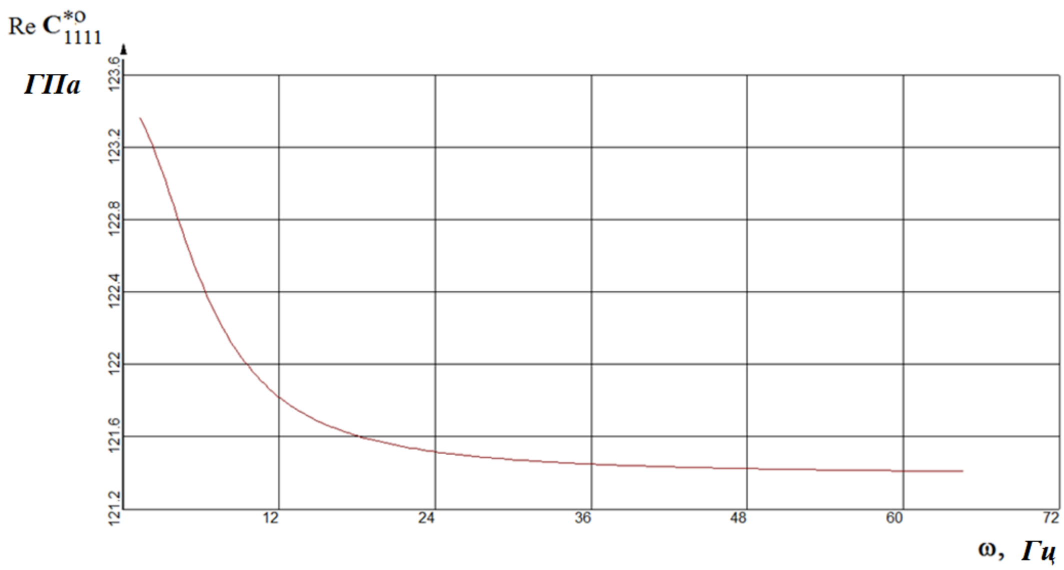

Рис.5 Зависимость действительной части комплексного продольного модуля упругости C^{*0}_{1111} 1D композита от частоты колебаний

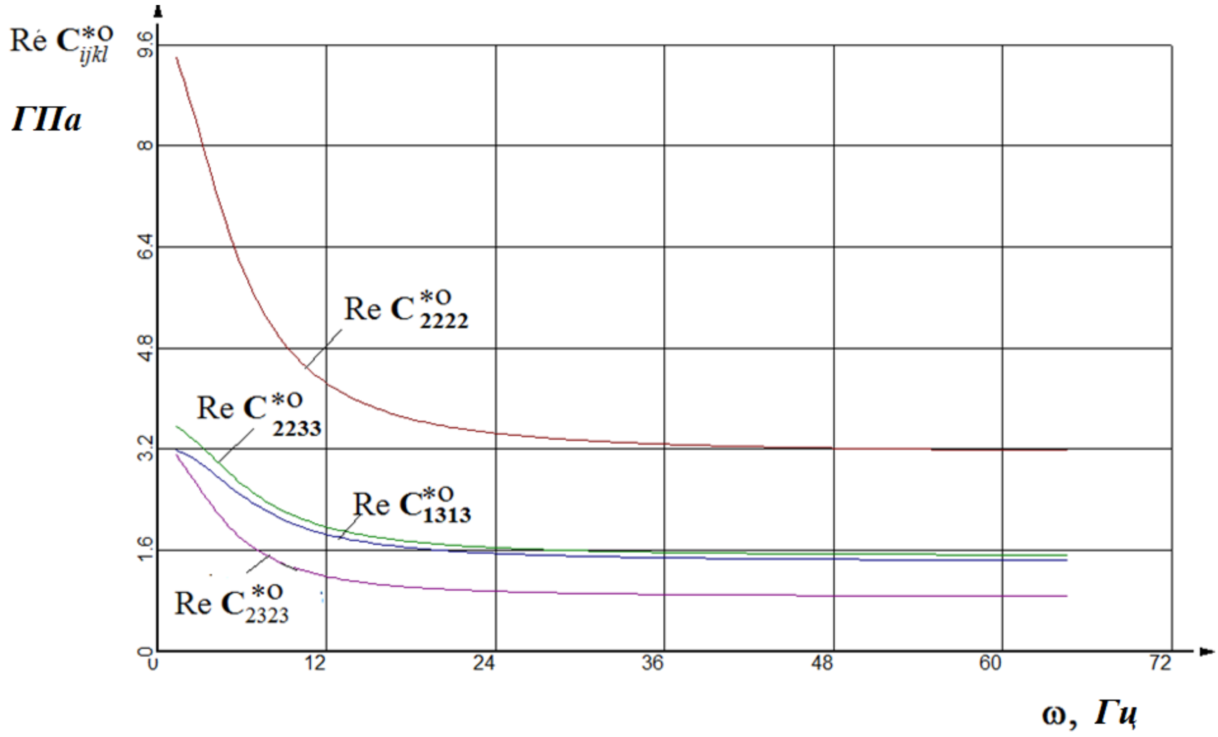

Рис.6 Зависимость действительной части комплексных модулей упругости C^{*0}_{ijkl} 1D композита от частоты

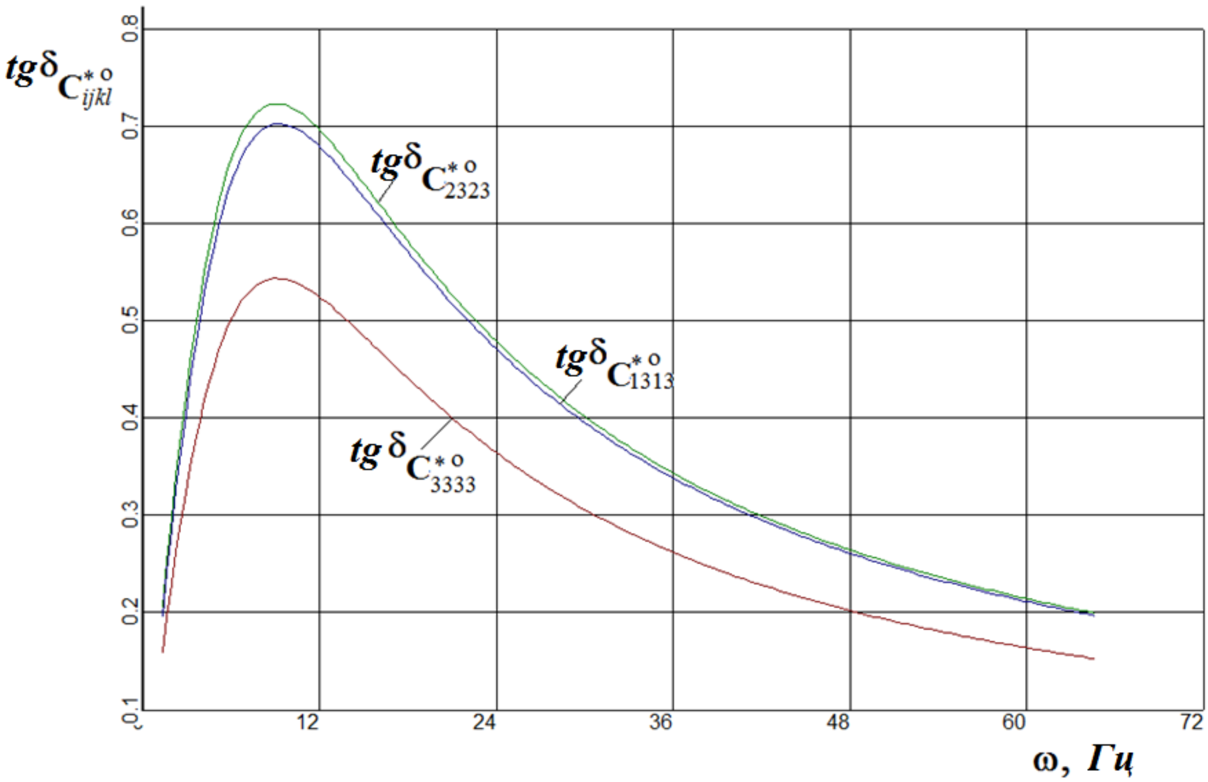

Рис.7 Зависимость тангенса угла потерь комплексных модулей упругости C^{*0}_{ijkl} 1D композита от частоты колебаний

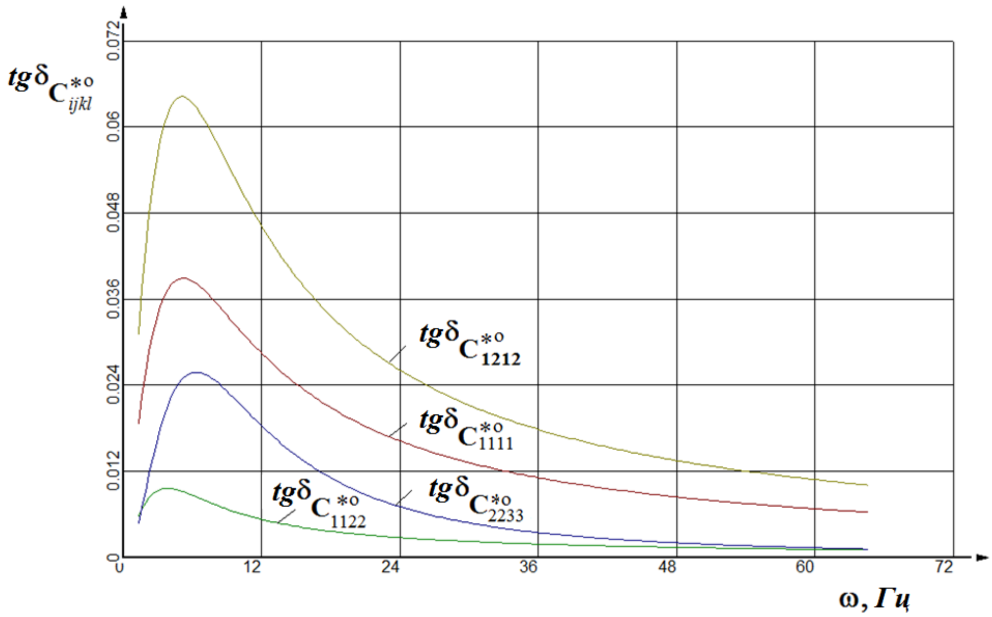

Рис.8 Зависимость тангенса угла потерь комплексных модулей упругости C^{*0}_{ijkl} 1D композита от частоты колебаний

На рисунках 9...12 представлены результаты расчетов вязкоупругих характеристик СВК-композита. Результаты расчетов показывают, что на частоте ω =9,5 Гц, так же, как и у матрицы, и у 1D _композита, у СВК-композита существует максимум значений тангенса угла потерь $tg\delta_{C_{ijkl}} = tg\delta(\bar{C}^{*}_{ijkl}(\omega))$, всех комплексных модулей сдвига. Минимальные значения тангенса угла потерь в продольном направлении $tg\delta_{C_{1111}}$ составляют всего 0.004, в поперечном направлении $tg\delta_{C_{3333}}$ составляют 0.52, а при межслоевых сдвигах $tg\delta_{C_{1313}}$, $tg\delta_{C_{2323}}$ его значения близки к соответствующим значениям матрицы - 0.7. Тангенсы угла потерь модуля сдвига в плоскости слоя $tg\delta_{C_{1212}}$ значительно меньше - 0.06, но превышает значения $tg\delta_{C_{1111}}$. Аналогичные пики имеется у графиков тангенса угла потерь $tg\delta_{C_{1122}}$, $tg\delta_{C_{1133}}$, но их абсолютные максимальные значения не превышают 0.025.

Таким образом, можно сделать вывод, что вязкоупругие свойства матрицы достаточно эффективно реализуются в составе композита СВК - но только при межслойных сдвигах и в поперечном направлении. Эта особенность накладывает специфические требования к расчету вязкоупругих свойств конструкций из ПКМ - традиционные методы расчета пластин и оболочек по теории Кирхгофа-Лява и Тимошенко не могут обеспечить точного расчета трансверсальных и межслоевых напряжений, играющих ключевую роль в механизме диссипации энергии композитов. Поэтому необходима разработка специализированных методик расчета напряжений в тонкостенных многослойных композитных конструкциях при расчете их упруго-диссипативных характеристик. Такая методика была предложена в работах [28-32] для упругих композитов, она же может использоваться и для расчета напряжений в тонкостенных конструкциях из вязкоупругих композитов.

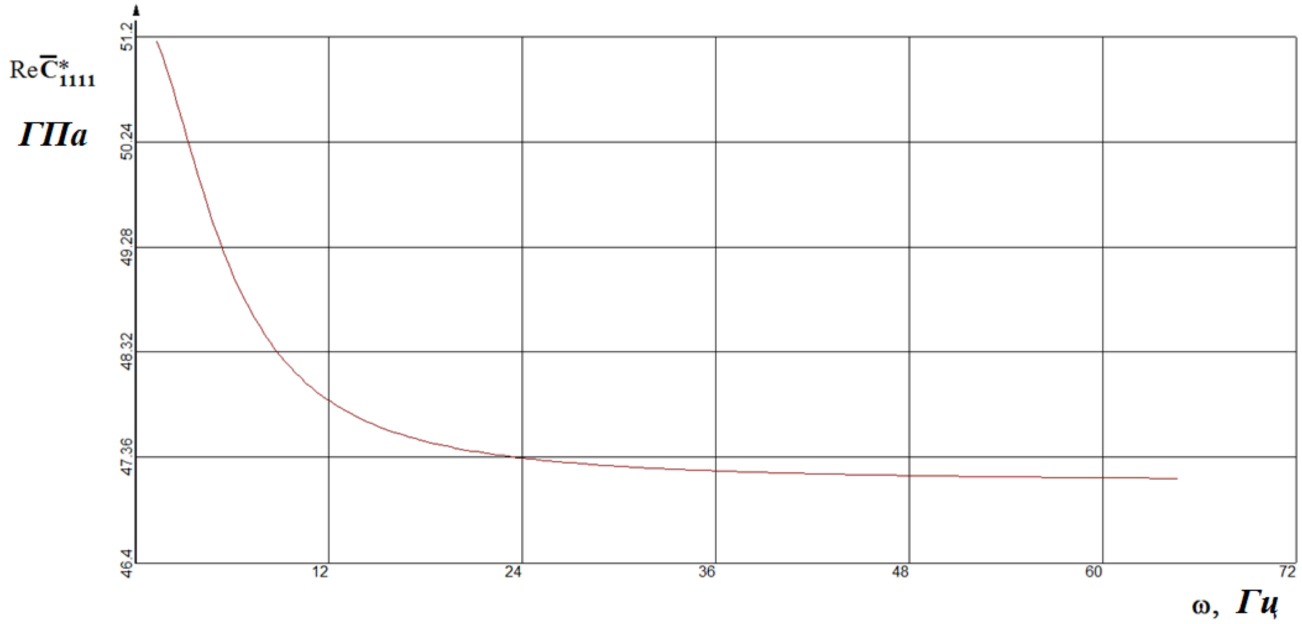

Рис. 9 Зависимость действительной части комплексного модуля упругости $\bar{C}^{*}_{1111}$ СВК от частоты колебаний

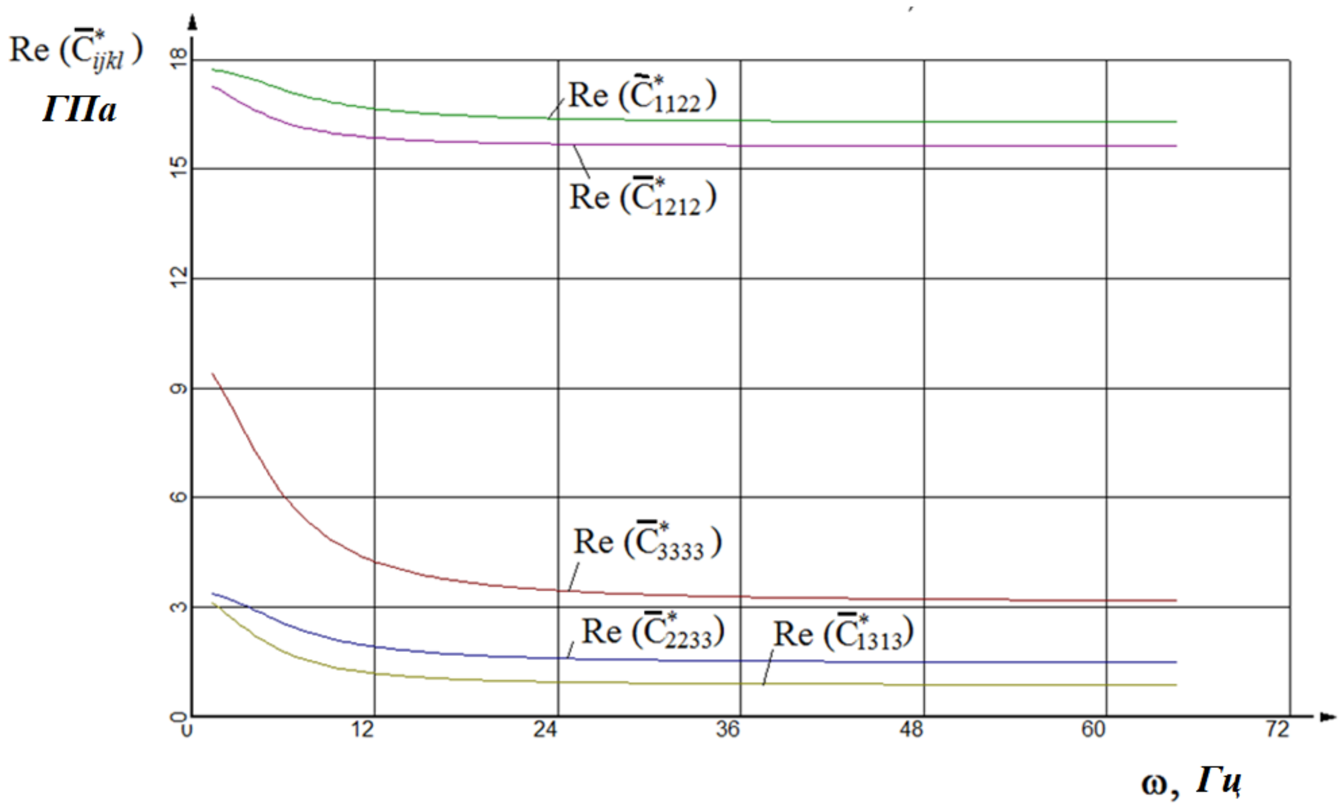

Рис.10 Зависимость действительной части комплексных модулей упругости $\bar{C}^{*}_{ijkl}$ СВК от частоты

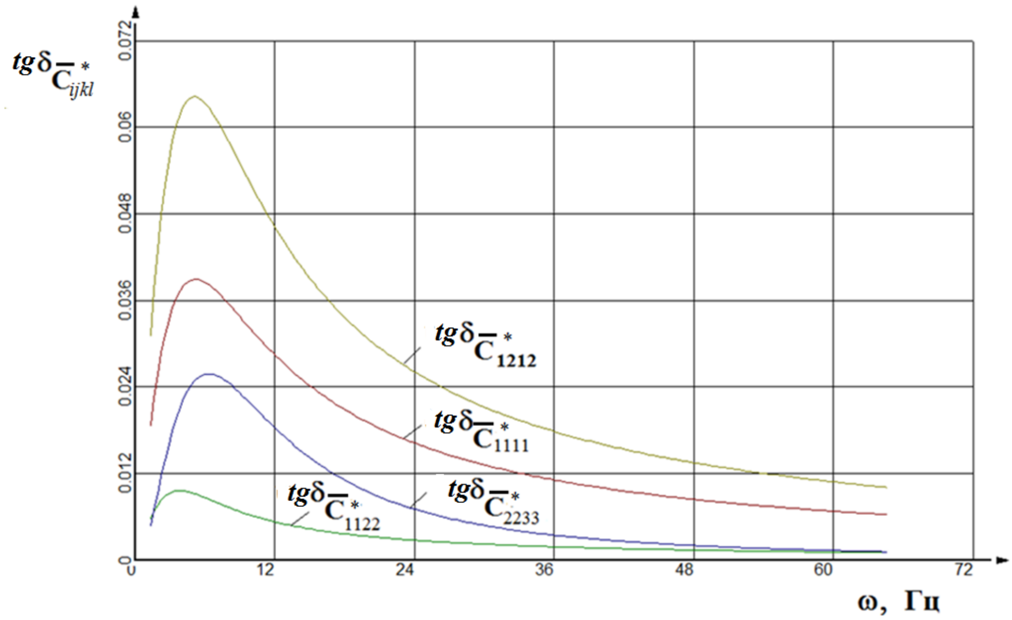

Рис.11 Зависимость тангенса угла потерь комплексных модулей упругости $\overline{C}^*_{ijkl}$ СВК от частоты колебаний

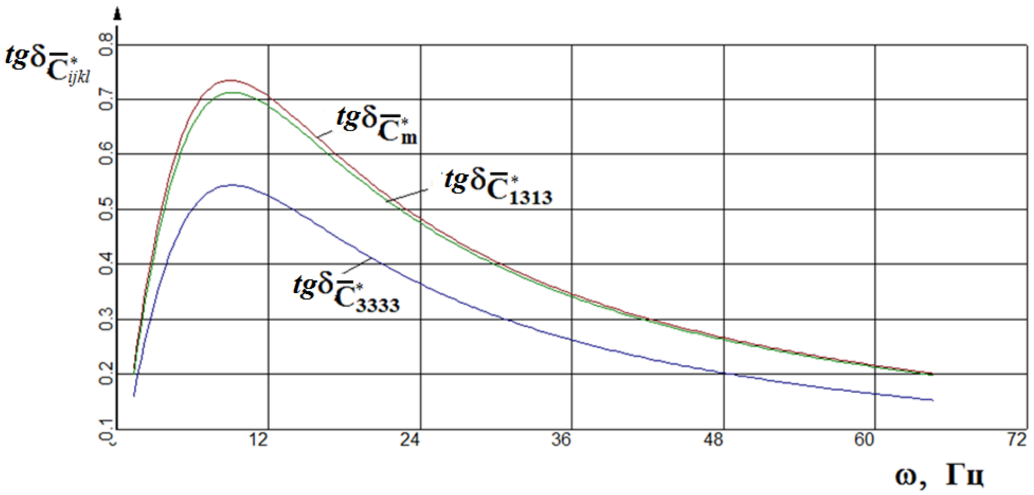

Рис.12 Сравнительные зависимости тангенса угла потерь комплексного модуля сдвига матрицы и комплексных модулей упругости СВК при межслойном сдвиге $\overline{C}^*_{1313}$ и в трансверсальном направлении $\overline{C}^*_{3333}$

Заключение

Разработанная методика расчета вязкоупругих характеристик ПКМ слоисто-волокнистой структуры при установившихся циклических колебаниях, основанная на применении теории асимптотического осреднения периодических структур, позволяет вычислять полный набор комплексных модулей упругости данного типа композитов с помощью достаточно простых аналитических соотношений. Приведенные примеры численного моделирования вязкоупругих характеристик 1D композитов, а также СВК-композитов показали, что максимальные значения вязкоупругих свойств, характеризуемых тангенсом угла потерь комплексных модулей упругости, реализуются в поперечном направлении к ориентации армирующих волокон и при продольных сдвигах. Эти особенности вязкоупругих свойств композитов предъявляют определенные требования к методикам расчета напряжений в тонкостенных конструкциях из вязкоупругих композитов, предполагая, что должны вычисляться трансверсальные и межслоевые напряжения, которыми как правило пренебрегают в классических теориях тонких пластин.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-19-00847).

Список литературы

1. Hashin Z. Viscoelastic Behavior of Heterogeneous Media // J. Appl. Mech. Trans. ASME. 1965. Vol. 32, iss. 3. P. 630-636. DOI: 10.1115/1.3627270
2. Christensen R.M. Theory of Viscoelasticity. 2nd ed. New York: Academic Press, 1982. 356 p.
3. Christensen R.M. Mechanics of Composite Materials. New York: John Wiley & Sons, 1979. 324 p.
4. Ferry J.D. Viscoelastic properties of Polymers. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1979. 316 p.
5. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 356 с.
6. Победря Б.Е., Димитриенко Ю.И. Связанные задачи линейной термомеханики деформируемых твердых тел // Успехи механики. 1987. № 2. С. 97-137.
7. Зиновьев П.А., Смердов А.А., Кулиш Г.Г. Экспериментальное исследование упруго–диссипативных характеристик углепластиков // Механика композитных материалов. 2003. Т. 39, № 5. С. 595-602.
8. Димитриенко Ю.И., Лимонов В.А. Влияние ориентации волокон на диссипативный разогрев и деформативность вязкоупругих композитов при циклическом нагружении // Механика композитных материалов. 1988. Т. 24, № 5. С. 797-805.
9. Dimitrienko Yu.I. Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations. Springer Netherlands, 2010. 722 p. (Ser. Solid Mechanics and Its Applications; vol. 174.). DOI: 10.1007/978-94-007-0034-5
10. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 560 с.
11. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4. Основы механики твердых сред. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. 624 с.
12. Sheldon Imaoka. Analyzing Viscoelastic Materials // ANSYS Advantage. 2008. Vol. 2, no. 4. P. 46-47.

13. Matzenmiller A., Gerlach S. Micromechanical modeling of viscoelastic composites with compliant fiber–matrix bonding // Computational Materials Science. 2004. Vol. 29, iss. 3. P. 283-300. DOI: 10.1016/j.commatsci.2003.10.005
14. Žmindák M., Riecky D., Dudinský M. Finite Element Analysis of Viscoelastic Composite Solids // Proc. of the 4th International conf. "Modelling of Mechanical and Mechatronic Systems 2011". 20-22 September, 2011. Herľany, Slovak Republic, 2011. P. 576-584.
15. Michel J.C., Moulinec H., Suquet P. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1999. Vol. 172, iss. 1-4. P. 109-143. DOI: 10.1016/S0045-7825(98)00227-8
16. Shibuya Y. Evaluation of creep compliance of carbon-fiber-reinforced composites by homogenization theory // JSME Int. J. Ser. A. 1997. Vol. 40. P. 313-319.
17. Haasemann G., Ulbricht V. Numerical evaluation of the viscoelastic and viscoplastic behavior of composites // Technische Mechanik. 2010. Vol. 30, no. 1-3. P. 122-135.
18. Masoumi S., Salehi M., Akhlaghi M. Nonlinear Viscoelastic Analysis of Laminated Composite Plates – A Multi Scale Approach // International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering. 2013. Vol. 2, no. 2. P. 11-18.
19. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 356 с.
20. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 324 с.
21. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 5. С. 3-20.
22. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Численное моделирование композиционных материалов с многоуровневой структурой // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2011. Т. 75, № 11. С. 1549-1554.
23. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Разработка автоматизированной технологии вычисления эффективных упругих характеристик композитов методом асимптотического осреднения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2008. № 2. С. 56-66.
24. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Система автоматизированного прогнозирования свойств композиционных материалов // Информационные технологии. 2008. № 8. С. 31-38.
25. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 1. Тензорный анализ. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 463 с.
26. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Соколов А.П., Садовничий Д.Н., Гафаров Б.Р. Численнное и экспериментальное моделирование прочностных характеристик сферопластиков // Композиты и наноструктуры. 2013. № 3. С. 35-51.
27. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Соколов А.П. Численное моделирование микроразрушения и прочностных характеристик пространственно-армированных

композитов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2013. Т. 19, № 3. С. 365-383.

28. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 1. С. 36-57.
29. Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин // Механика композиционных материалов и конструкций. 2014. Т. 20, № 2. С. 259-282.
30. Димитриенко Ю.И., Яковлев Н.О., Ерасов В.С., Федонюк Н.Н., Сборщиков С.В., Губарева Е.А., Крылов В.Д., Григорьев М.М., Прозоровский А.А. Разработка многослойного полимерного композиционного материала с дискретным конструктивно-ортотропным заполнителем // Композиты и наноструктуры. 2014. Т. 6, № 1. С. 32-48.
31. Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А. Многомасштабное конечно-элементное моделирование трехслойных сотовых композитных конструкций // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 10. С. 359-382. DOI: 10.7463/1014.0730105
32. Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. № 3. С. 86-100.

Science & Education of the Bauman MSTU
Electronic journal
ISSN 1994-0448

Science and Education of the Bauman MSTU, 2014, no. 11, pp. 748–770.

DOI: **10.7463/1114.0734246**

Received: 09.08.2014
Revised: 27.10.2014

Simulation of Viscoelastic Properties of Fibrous Laminated Polymer Composite Materials

Yu.I. Dimitrienko[1,*], E.A. Gubareva[1], S.V. Sborschikov[1], N.N. Fedonyuk[2]

[*] dimit.bmstu@gmail.com

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
[2]Krylov State Research Centre, St. Petersburg, Russia

Keywords: viscoelastic properties, composites, polymer composite materials, fibrous laminated composites, asymptotic homogenization method, complex elastic modules, tangent of loss angle

The paper presents a developed technique for calculating the viscoelastic properties of fibrous laminated polymer composites at steady cyclic vibrations. The technique uses the asymptotic homogenization procedure. It allows us to predict a complete set of complex elastic modules using rather simple analytical relations. The paper gives examples of computational modeling for viscoelastic unidirectional and fibrous laminated polymer composites. They have shown that maximum values of viscoelastic properties determined by the loss angle tangent of complex elastic modules are realized in the transverse direction towards the relative fibers orientation and in interlayer shears. It is shown that these peculiarities of viscoelastic composite properties impose some demands for stress calculation methods in thin-walled composite structures with the assumption that it is necessary to calculate transversal throw-thickness and interlayer stresses, which the classic theories of thin plates, usually, neglect.

References

1. Hashin Z. Viscoelastic Behavior of Heterogeneous Media. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, 1965, vol. 32, iss. 3, pp. 630-636. DOI: 10.1115/1.3627270
2. Christensen R.M. *Theory of Viscoelasticity*. 2nd ed. New York, Academic Press, 1982. 356 p.
3. Christensen R.M. *Mechanics of Composite Materials*. New York, John Wiley and Sons, 1979. 324 p.
4. Ferry J.D. *Viscoelastic Properties of Polymers*. 2nd ed. New York, John Wiley and Sons, 1979. 316 p.

5. Il'iushin A.A., Pobedria B.E. *Osnovy matematicheskoi teorii termoviazkouprugosti* [Bases of mathematical theory of thermoviscoelasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 356 p. (in Russian).
6. Pobedrya B.E., Dimitrienko Yu.I. Coupled problems of linear thermomechanics of deformable solids. *Uspekhi mekhaniki = Advances in Mechanics*, 1987, no. 2, pp. 97-137. (in Russian).
7. Zinov'ev P.A., Smerdov A.A., Kulish G.G. Experimental Investigation of Elastodissipative Characteristics of Carbon-Fiber-Reinforced Plastics. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 2003, vol. 39, no. 5, pp. 595-602. (English translation: *Mechanics of Composite Materials*, 2003, vol. 39, iss. 5, pp. 393-398. DOI: 10.1023/B:MOCM.0000003289.12297.84).
8. Dimitrienko Yu.I., Limonov V.A. Effect of the orientation of the reinforcement in dissipative heating and deformability of viscoelastic composites on cyclic loading. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 1988, vol. 24, no. 5, pp. 797-805. (English translation: *Mechanics of Composite Materials*, 1988, vol. 24, iss. 5, pp. 595-602. DOI: 10.1007/BF00608843).
9. Dimitrienko Yu.I. *Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations*. Springer Netherlands, 2010. 722 p. (Ser. *Solid Mechanics and Its Applications*; vol. 174.). DOI: 10.1007/978-94-007-0034-5
10. Dimitrienko Iu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. V 4 t. T. 2. Universal'nye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoi sredy* [The mechanics of a continuous medium. In 4 vols. Vol. 2. The universal laws of mechanics and electrodynamics of continua]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 560 p. (in Russian).
11. Dimitrienko Iu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. V 4 t. T. 4. Osnovy mekhaniki tverdykh sred* [Continuum Mechanics. In 4 vols. Vol. 4. Bases of Mechanics of Solid Medium]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2013. 624 p. (in Russian).
12. Sheldon Imaoka. Analyzing Viscoelastic Materials. *ANSYS Advantage*, 2008, vol. 2, no. 4, pp. 46-47.
13. Matzenmiller A., Gerlach S. Micromechanical modeling of viscoelastic composites with compliant fiber–matrix bonding. *Computational Materials Science*, 2004, vol. 29, iss. 3, pp. 283-300. DOI: 10.1016/j.commatsci.2003.10.005
14. Žmindák M., Riecky D., Dudinský M. Finite Element Analysis of Viscoelastic Composite Solids. *Proc. of the 4th International conf. "Modelling of Mechanical and Mechatronic Systems 2011"*, 20-22 September, 2011, Herľany, Slovak Republic, pp. 576-584.

15. Michel J.C., Moulinec H., Suquet P. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1999, vol. 172, iss. 1-4, pp. 109-143. DOI: 10.1016/S0045-7825(98)00227-8
16. Shibuya Y. Evaluation of creep compliance of carbon-fiber-reinforced composites by homogenization theory. *JSME Int. J. Ser. A*, 1997, vol. 40, pp. 313-319.
17. Haasemann G., Ulbricht V. Numerical evaluation of the viscoelastic and viscoplastic behavior of composites. *Technische Mechanik*, 2010, vol. 30, no. 1-3, pp. 122-135.
18. Masoumi S., Salehi M., Akhlaghi M. Nonlinear Viscoelastic Analysis of Laminated Composite Plates – A Multi Scale Approach. *International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering*, 2013, vol. 2, no. 2, pp. 11-18.
19. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Averaging processes in periodic media]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 356 p. (in Russian).
20. Pobedria B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, MSU Publ., 1984. 336 p. (in Russian).
21. Dimitrienko Iu.I., Sokolov A.P. Multiscale modeling of elastic composite materials. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2012, vol. 24, no. 5, pp. 3-20. (in Russian).
22. Dimitrienko Iu.I., Sokolov A.P. Numerical modeling of composites with multiscale microstructure. *Izvestiia RAN. Seriia fizicheskaia*, 2011, vol. 75, no. 11, pp. 1549-1554. (English translation: *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*, 2011, vol. 75, no. 11, pp. 1457-1461. DOI: 10.3103/S1062873811110074).
23. Dimitrienko Iu.I., Sokolov A.P. Development of Automated Technology of Calculation of Effective Elastic Characteristics of Composites by Method of Asymptotic Averaging. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science*, 2008, no. 2, pp. 56-66. (in Russian).
24. Dimitrienko Iu.I., Sokolov A.P. Automated Forecasting of Composite Material Properties by Means of Homogenization Method. *Informatsionnye tekhnologii = Information Technologies*, 2008, no. 8, pp. 31-38. (in Russian).
25. Dimitrienko Iu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. V 4 t. T. 1. Tenzornyi analiz* [Continuum Mechanics. In 4 vols. Vol. 1. Tensor Analysis]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 463 p. (in Russian).
26. Dimitrienko Yu.I., Sborshchikov S.V., Sokolov A.P., Sadovnichiy D.N., Gafarov B.R. Computer and experimental study modeling of failure of micro-sphere filled composite. *Kompozity i nanostruktury = Composites and nanostructures*, 2013, no. 3, pp. 35-51. (in Russian).

27. Dimitrienko Yu.I., Sborshchikov S.V., Sokolov A.P. Computational Modeling of Microdestruction and Strength of Multidimensional Reinforced Composites. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii = Journal on Composite Mechanics and Design*, 2013, vol. 19, no. 3, pp. 365-383. (in Russian).
28. Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. Asymptotic theory of constructive-orthotropic plates with two-periodic structures. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody*, 2014, no. 1, pp. 36-57. (in Russian).
29. Dimitrienko Iu.I., Iakovlev D.O. Asymptotic theory of thermoelasticity of multilayer composite plates. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii = Journal on Composite Mechanics and Design*, 2014, vol. 20, no 2, pp. 259-282. (in Russian).
30. Dimitrienko Iu.I., Iakovlev N.O., Erasov V.S., Fedoniuk N.N., Sborshchikov S.V., Gubareva E.A., Krylov V.D., Grigor'ev M.M., Prozorovskii A.A. Development of a multilayer polymer composite material with discrete structural-orthotropic fillers. *Kompozity i nanostruktury = Composites and Nanostructures*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 32-48. (in Russian).
31. Dimitrienko Yu.I., Fedonyuk N.N., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V., Prozorovskiy A.A. Asymptotic Theory of Viscoelastic Multilayer Thin Composite Plates. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 10, pp. 359-382. DOI: 10.7463/1014.0730105 (in Russian).
32. Dimitrienko Yu.I. Asymptotic Theory of Multilayer Thin Plates. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science*, 2012, no. 3, pp. 86-100. (in Russian).