

Моделирование динамических систем с помощью программы PA10

12, декабрь 2014

Жук Д. М., Маничев В. Б., Родионов С. В.

УДК: 621.382.82.001

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

manichev@bmstu.ru

Введение

Научно-исследовательские работы по математическому и численному моделированию динамических систем выполняются преподавателями, аспирантами, сотрудниками и студентами кафедры РК-6 (САПР) МГТУ им. Н.Э.Баумана с 1974 года (первоначально эти работы выполнялись под руководством д.т.н, профессора Норенкова И.П. для математического и компьютерного моделирования электронных схем). Были разработаны ПМК ПА1-ПА9 для численного моделирования динамических систем. При программной реализации численных методов решения систем ОДУ-ДАУ (при разработке математических ядер этих ПМК) следует выделить два основных типа погрешностей численного решения систем ОДУ-ДАУ – глобальная погрешность (или качественная ошибка) и локальная погрешность (или количественная ошибка). Математики-программисты основное внимание уделяют оценке математической локальной погрешности интегрирования (обычно используя метод Рунге или методы, основанные на предсказании-коррекции (prediction-correction methods)), хотя главное, - это получение качественно достоверного и корректного численного решения систем ОДУ-ДАУ. В работе [1] было показано, что для гарантии получения качественно корректного решения разнообразных систем ОДУ при контроле только локальной погрешности интегрирования численный метод решения систем ОДУ должен быть АL-устойчивым, т.е. абсолютно (А-) устойчивым строго в левой (L-Left) полуплоскости комплексной плоскости устойчивости методов численного решения систем ОДУ-ДАУ. В работе [2] на основе Паде аппроксимации экспоненты в конечную дробь и использования многочленов Якоби были получены коэффициенты АL-устойчивых неявных методов интегрирования систем ОДУ-ДАУ 2-го, 4-го и 6-го порядков точности. Программная реализация этих методов сводится к многократному получению матриц Якоби для решаемой системы ОДУ-ДАУ и решению соответствующих систем ЛАУ на каждом шаге интегрирования, что, как правило, приводит к нескольким тысячам и более обраче-

ний к программе-решателю систем ЛАУ (LAE solver) на всем заданном отрезке интегрирования системы ОДУ-ДАУ. Эти AL-устойчивые неявные методы интегрирования систем ОДУ-ДАУ 2-го и 4-го порядков точности были реализованы в составе библиотеки SADEL при использовании удвоенной точности вычислений на языке Си [3]. Библиотека SADEL (Sets of Algebraic and Differential Equations solvers Library) – библиотека решателей для систем алгебраических и дифференциальных уравнений, предназначенная для решения систем ЛАУ и систем ОДУ-ДАУ. Библиотека SADEL на языке Си является математическим ядром платформы компьютерного моделирования динамических процессов для разнородных (multiphysics, multi-discipline) технических систем и объектов - ПМК ПА10 (SADEL-PA10)), превосходящем математические ядра подобных зарубежных ПМК - MATLAB-SIMULINK, Maple-MapleSim, Mathematica-SystemModeler, C-Library NAG в части решения жестких систем ОДУ и плохо-обусловленных систем ЛАУ при невысоких требованиях к математической точности результатов численного моделирования, что показано в работах [4, 5]. Конечная математическая и компьютерная точность численного моделирования динамических систем может быть невысокой, т.к. исходные внутренние параметры моделируемых систем получают с невысокой математической и компьютерной точностью (и соответствующие коэффициенты в уравнениях систем ОДУ-ДАУ), поэтому, по умолчанию, математическая точность решения систем ОДУ-ДАУ по умолчанию задается невысокой ($eps=0.001$ в MATLAB). Решение с данным параметром eps большого количества тестовых и практических задач математического и численного моделирования динамических систем с помощью библиотеки SADEL и других библиотек и ПМК показало, что для получения качественно достоверного и корректного решения жестких и сверхжестких систем ОДУ-ДАУ необходимо на всех шагах численного интегрирования обеспечивать численное решение соответствующих плохо обусловленных систем ЛАУ с повышенной (на два разряда, по сравнению с заданной) точностью вычислений для всех значений элементов вектора решения систем ЛАУ [6]. Также были определены два основных недостатка известных ПМК моделирования динамических систем (на примере ПМК MATLAB-SIMULINK):

1. Возможное получение неверного результата численного моделирования динамических систем (особенно для сверхжестких систем ОДУ-ДАУ) при невысоких заданных требованиях к математической точности интегрирования систем ОДУ-ДАУ (по умолчанию параметр $eps=0.001$ в ПМК MATLAB-SIMULINK).

2. Ориентация на математиков-программистов и инженеров-расчетчиков высшей квалификации по численным методам решения систем ОДУ-ДАУ, знающих математический английский язык (ПМК MATLAB-SIMULINK не локализуется).

В разрабатываемом ПМК ПА10 (SADEL-PA10) планируется устранение этих недостатков.

Обоснование принципов разработки ПМК ПА10 (SADEL-PA10)

В известных программах-решателях систем ОДУ-ДАУ (ODE-DAE Solvers) используются три классические постановки задач решения систем ОДУ-ДАУ.

1) Нормальная форма Коши в координатном базисе дифференциальных переменных состояния (явная форма представления систем ОДУ-ДАУ):

$$dX / dt = F(X, t) ,$$

где X - вектор координатного базиса дифференциальных переменных состояния размерностью m . F - вектор-функция правых частей системы ОДУ размерностью m , t – независимая переменная (обычно время). Заданы начальные условия $X_0=X(0)$ и отрезок интегрирования $t=[T_0, T_K]$, T_0 – заданное время начала интегрирования, T_K – заданное время окончания интегрирования.

2) Дифференциально-алгебраическая форма разных индексов в полном координатном базисе дифференциально-алгебраических переменных (полуявная форма):

$$\begin{cases} dX / dt = F(X, Y, t) \\ G(X, Y) = 0 \end{cases} ,$$

где Y - вектор алгебраических переменных полного координатного базиса дифференциально-алгебраических переменных размерностью k . G - вектор-функция размерностью k . Заданы согласованные начальные условия: $X_0=X(0)$, $Y_0=Y(0)$ и отрезок интегрирования $t=[T_0, T_K]$.

3) Дифференциально-алгебраическая форма в полном координатном базисе дифференциально-алгебраических переменных (неявная форма):

$$G(X, dX / dt, Y, t) = 0$$

$$dX / dt = F(X, t)$$

где G - вектор-функция размерностью $m + k$. Заданы согласованные начальные условия и отрезок интегрирования. Задача решения систем ОДУ-ДАУ в данной постановке была поставлена в полном координатном базисе дифференциально-алгебраических переменных Линдой Петзолд и ее научным руководителем, известным математиком Гиром в 1982 г. и была разработана программа DASS (Differential Algebraic Systems Solver) на основе метода BDF (Backward Differential Formula), заменой в вышеприведенной формуле вектора производных по формулам Гира $dX / dt = BDF(X, h)$ и решением на каждом шаге интегрирования замкнутой системы нелинейных алгебраических уравнений (НАО) $G(X, Y)=0$ относительно дифференциально-алгебраических переменных X и Y [7].

Программа-решатель систем ДАУ (DAE Solver) в ПМК ПА10 (SADEL-PA10), рассматривает системы ДАУ в еще более **расширенном координатном пространстве пере-**

менных, в котором к дифференциально-алгебраическим переменным добавлены **производные дифференциальных переменных**. Задача решения систем ДАУ в расширенном координатном пространстве переменных в отличие от классических постановок будет не доопределена по отношению к векторам неизвестных:

$$G(PX, X, Y, t) = 0, \quad (1)$$

где $PX = dX/dt$ - вектор производных дифференциальных переменных по времени для расширенного координатного пространства переменных размерностью m . G - вектор-функция размерностью $m + k$. Заданы начальные условия $X_0 = X(0)$ и отрезок интегрирования $t = [T_0, T_K]$. Новые алгоритмы для решения системы (1) основаны на совместном решении систем НАУ $G_i(X, Y, PX, t_i) = 0$ и **систем из m алгебраических уравнений численного интегрирования $H_i(X, PX, h) = 0$** , которые доопределяют систему (1) на соответствующих стадиях методов интегрирования, относительно векторов дифференциально-алгебраических переменных X , Y и производных дифференциальных переменных PX [3]. Параметры алгебраических уравнений численного интегрирования $H_i(X, PX, h) = 0$ были получены на основе анализа 5-ти базовых классов задач для фундаментальных решений линейных неоднородных систем ОДУ [2]. При невысокой математической точности интегрирования шаг интегрирования может стать таким большим, что **не АL-устойчивые методы интегрирования могут попасть в область устойчивости, не соответствующей некоторым фундаментальным решениям**. Область абсолютной устойчивости АL-устойчивых методов интегрирования показана на рис.1.

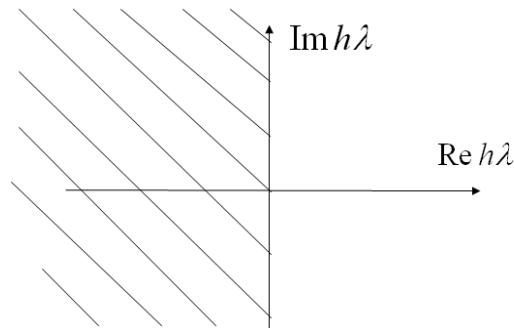


Рис. 1. Область абсолютной устойчивости (заштрихована) АL-устойчивых методов интегрирования

Были разработаны системы из m **линейных алгебраических уравнений численного интегрирования $H_i(X, PX, h) = 0$** S -стадийных неявных методов интегрирования систем ДАУ вида (1) в расширенном координатном пространстве дифференциально-алгебраических переменных и производных дифференциальных переменных X , Y и PX -DAbs методы, как развитие Ab^Tс методов Бутчера [3]:

$$\begin{aligned}
& H_i(PX_i, X_i, X_{n-1}, PX_{n-1}, h_n) = \\
& = h_n \sum_{j=1}^s d_{ij} PX_j - \sum_{j=1}^s a_{ij} X_j - b_i X_{n-1} - h_n c_i PX_{n-1} = 0 \\
& X_n = X_s, PX_n = PX_s, i = 1, \dots, s, t_n = t_s, \\
& s - \text{число стадий}, \\
& h_n = (t_n - t_{n-1}) - n - \text{й шаг интегрирования}, \\
& d_{ij}, a_{ij}, b_i, c_i - \text{параметры метода}.
\end{aligned}$$

Эти алгебраические уравнения численного решения систем ОДУ-ДАУ **не требуют** получения «правой» части системы ОДУ-ДАУ (вектор-функции F в известных формулах численного решения систем ОДУ-ДАУ). На основе этих алгебраических уравнений численного решения систем ОДУ-ДАУ были определены параметры и реализованы три метода интегрирования [5,6]:

М1 - А-устойчивый неявный метод первого порядка точности (совпадает по параметрам с неявным методом Эйлера);

М2 – АL-устойчивый неявный метод второго порядка точности (совпадает по параметрам с неявным методом трапеций);

М3 - АL-устойчивый неявный метод четвертого порядка точности (совпадает по параметрам с неявным методом Лобатто IIIA [10])

Для достоверного численного моделирования динамических систем необходимо обеспечить достоверность численного решения систем ОДУ-ДАУ, но при программной реализации численных методов решения систем ОДУ-ДАУ можно контролировать только локальную погрешность интегрирования (вышеупомянутый параметр ϵ_{rs} в программах численного решения систем ОДУ-ДАУ), но при невысоких требованиях к математической точности интегрирования ($\epsilon_{rs}=0.001$) возможно получение не достоверного численного решения.

Точность решения систем ОДУ-ДАУ в методах М2-М3 обеспечивается контролем локальной погрешности используемого метода интегрирования, а достоверность обеспечивается АL-устойчивостью данных методов интегрирования. В результате выполненных научных исследований были решены две кардинальные проблемы реализации вышеприведенных АL-устойчивых S-стадийных DAbc методов интегрирования:

1. Главный недостаток АL-устойчивых методов состоял в наличии «ложных (паразитных) колебаний» (“ringing”) при больших шагах интегрирования. В книгах [10, 11, 12, 13] для жестких систем ОДУ-ДАУ это свойство методов интегрирования называется нежелательным, поэтому эти методы не нашли широкого применения на практике. Решение данной проблемы изложено в статье [14] – алгоритм Маничева-Ильницкого.

2. Проблема решения систем ЛАУ с повышенной точностью вычислений (extra precision calculations). Данная проблема подробно описана в статье [7] и была решена с помощью метода Arbitrary Precision Arithmetic в рамках библиотеки SADEL [5,6].

Результаты численных экспериментов

Классические постановки задач решения систем ЛАУ ориентированы на получение решения для любых невырожденных систем ЛАУ и не гарантируют компьютерной точности в 15 верных значащих цифр для всех элементов вектора неизвестных, особенно для плохо обусловленных систем ЛАУ с числом обусловленности многим больше 1. Постановка задачи решения систем ЛАУ с повышенной точностью для программ библиотеки SADEL отличается от классических требованием гарантированного получения решений с точностью в 15 верных значащих цифр (удвоенная точность *double precision* на языке Си) для всех элементов вектора решений систем ЛАУ. Сравнение программ-решателей систем ЛАУ приведено и сравнение программ-решателей систем ОДУ-ДАУ с решателем МЗ библиотеки SADEL при невысоких требованиях к точности интегрирования ($\epsilon_{ps}=0.001$) [5,6].

Был разработан прототип ПК ПА10 – программа PA10mini.

Программа PA10mini предназначена для освоения основ математического и численного моделирования динамических систем, математические модели которых описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), а также для решения не сложных систем ОДУ в нормальной форме Коши или систем дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) в общем виде (систем ОДУ-ДАУ) и предоставляет студенту два альтернативных варианта интерфейса: редактор ввода систем ОДУ-ДАУ в текстовом виде и схемный редактор формальных схем с ненаправленными связями на основе математических моделей двухполюсников.

Эффективность численного решения систем ОДУ в значительной степени определяется спектром матрицы Якоби системы ОДУ. Сложность задачи можно оценить величиной ρT , где ρ - спектральный радиус матрицы Якоби, T - величина интервала интегрирования. Трудности возникают при больших значениях ρT (больше 103). В зависимости от расположения наибольших по модулю собственных значений такие «трудные» задачи подразделяются на жесткие (наибольшие собственные значения в левой полуплоскости), быстро осциллирующие (вблизи мнимой оси) и локально-неустойчивые (в правой полуплоскости). В SPICE симуляторах реализованы неявные методы интегрирования, поэтому жесткие задачи будут «легкими». Тестовые задачи второго и третьего типа будут «трудными» для SPICE симуляторов, поэтому далее рассматриваются только такие «трудные» тестовые задачи.

Примеры решения двух «трудных» тестовых задач с помощью PA10mini .

Тест 1 Ван дер Поля

Пример расчета жесткой системы ОДУ 2-го порядка (MU – параметр жесткости) – тест Ван дер Поля.

$$dx_1 / dt = x_2$$

$$dx_2 / dt = -x_1 + MU \cdot (1 - x_1^2) \cdot x_2$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned}x_1(0) &= -1, \\x_2(0) &= 1 \\t &\in (0, 8.4 \cdot MU)\end{aligned}$$

На практике встречаются значения жесткости $MU = 10^6$ и $MU = 10^9$, на рис. 2 приведено решение для значения жесткости $MU = 10^6$.

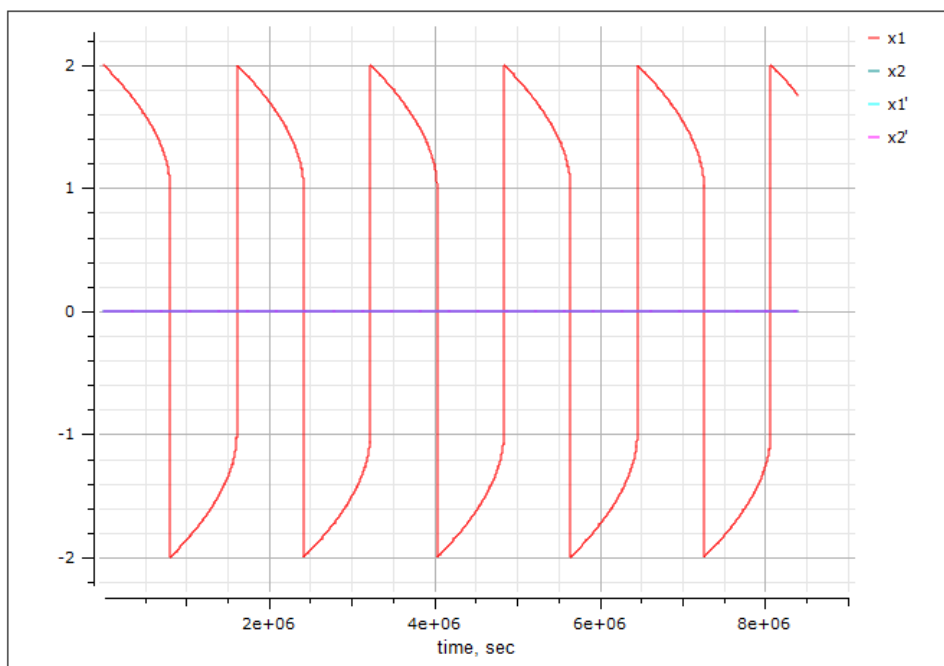


Рис. 2 Решение теста 1 для значения жесткости $MU = 10^6$

Большинство математических программ дает неверное решение для данной задачи.

Тест 2 RLC-цепь

Пример моделирования электронной схемы (рис.3) с многопериодным решением.

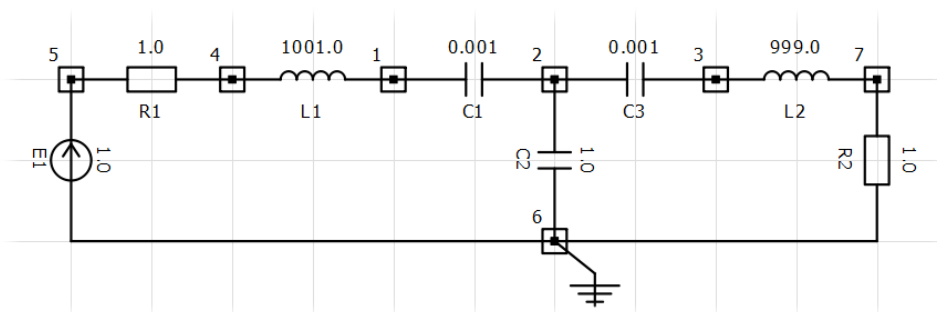


Рис. 3 Электронная схема для теста 2.

Система ОДУ для ТЕСТА 2

$$\begin{aligned}
 kr &= ku / ki, kc = kt \cdot ki / ku, kl = kt \cdot ku / ki \\
 dx_1 / dt &= x_4 / 0.001 \cdot kc \\
 dx_2 / dt &= x_5 / 0.001 \cdot kc \\
 dx_3 / dt &= (x_4 - x_5) / kc \\
 dx_4 / dt &= (ku - x_1 - x_3 - kr \cdot x_4) \cdot / 1001 \cdot kl \\
 dx_5 / dt &= (-x_2 + x_3 - kr \cdot x_5) / 999 \cdot kl \\
 x_1(0) &= 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, x_4(0) = 0, x_5(0) = 0 \\
 t &\in (0, 12560 \cdot kt)
 \end{aligned}$$

Система ОДУ сгенерированная программой RA10mini по схеме имеет вид:

$$\begin{aligned}
 uR1 &= iR1 \cdot 1.0 \\
 uR1 &= -\phi_1 + \phi_5 \\
 uL1 &= iL1' \cdot 1001.0 \\
 uL1 &= \phi_1 - \phi_2 \\
 iC1 &= uC1' \cdot 0.001 \\
 uC1 &= \phi_2 - \phi_3 \\
 iC2 &= uC2' \cdot 1.0 \\
 uC2 &= \phi_3 \\
 iC3 &= uC3' \cdot 0.001 \\
 uC3 &= \phi_3 - \phi_4 \\
 uL2 &= iL2' \cdot 999.0 \\
 uL2 &= \phi_4 - \phi_7 \\
 uR2 &= iR2 \cdot 1.0 \\
 uR2 &= \phi_7 \\
 uE1 &= 1.0 \\
 uE1 &= \phi_5 \\
 -iR1 + iL1 &= 0 \\
 -iL1 + iC1 &= 0 \\
 -iC1 + iC2 + iC3 &= 0 \\
 -iC3 + iL2 &= 0 \\
 iR1 + iE1 &= 0 \\
 -iL2 + iR2 &= 0
 \end{aligned}$$

Результаты расчета выходного значения $U_{вых}$ (ϕ_7) приведены на рис. 4.

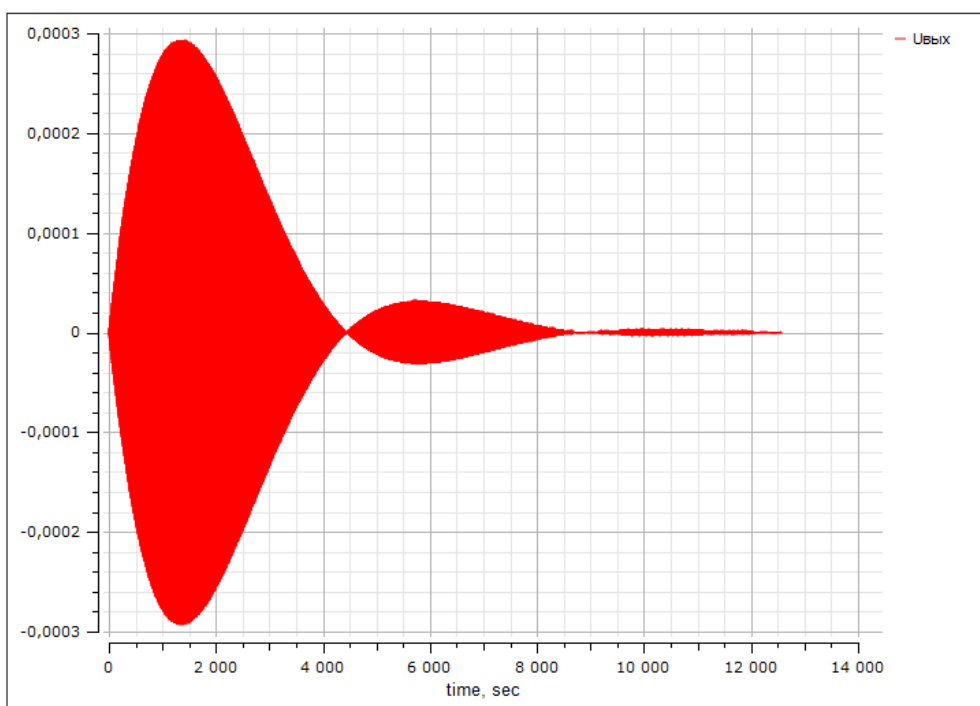


Рис. 4 Решение теста 2 с помощью программы PA10mini.

Стоит отметить, что решение получено при значениях параметров интегрирования по умолчанию, то есть был задан лишь отрезок моделирования.

К примеру, программный комплекс Multisim 7.0 дает неверное решение этой задачи, верное решение может быть получено только после настройки и подбора множества параметров интегрирования в сочетании с выбором определенного метода интегрирования.

Заключение

Разработка программ-решателей систем ОДУ-ДАУ и ЛАУ на языке Си для библиотеки SADEL и разработка ПМК ПА10 (SADEL-PA10)) позволяют сделать следующие выводы.

1. Корректные математические модели динамических процессов в реальных технических системах и объектах sktletn получать в расширенном дифференциально-алгебраическом координатном базисе переменных на основе фундаментальных физических законов в форме неоднородных систем ДАУ, не разрешенных относительно производных, и решать эти системы без каких-либо эквивалентных математических преобразований и без обязательного получения "правой" части для производных в явном, аналитическом виде.
2. Для достоверного и точного решения систем ДАУ при невысоких требованиях к математической точности результатов следует использовать только АЛ-устойчивые методы интегрирования, при использовании других методов интег-

рирования необходимо гарантировать устойчивость численного решения при увеличении шага интегрирования в случае невысоких значений параметра ϵ_{rs} .

3. При реализации неявных АL-устойчивых методов решения систем ДАУ необходимо использовать алгоритм Маничева-Ильницкого для устранения «ложных колебаний» и решать системы ЛАУ на каждом шаге интегрирования с гарантированной точностью для всех элементов вектора решений системы ЛАУ при использовании общепринятой в математических вычислениях удвоенной точности вычислений.

Новые научные результаты предполагается получить в направлениях разработки новых высокоэффективных неявных DAbc методов интегрирования с полностью заполненными матрицами D и A в новых системах алгебраических уравнений интегрирования, разработки новых методов и алгоритмов автоматического выбора шага для АL-устойчивых неявных методов интегрирования, новых алгоритмов численно-аналитического почленно-го вычисления матриц Якоби, а также эффективных алгоритмов и программ решения систем ЛАУ высокой и сверхвысокой размерности с повышенной точностью вычислений.

Список литературы

1. 1. Евстифеев Ю. А., Маничев В. Б. Эффективный А-устойчивый метод интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений для программ анализа электронных схем // Изв. вузов. Радиоэлектроника. - 1986. - Т. 29. - № 11. С. 31-35.
2. 2. Маничев В. Б., Глазкова В. Н. Методы интегрирования систем ОДУ для адаптируемых программных комплексов анализа РЭС // Радиотехника. - 1988, №4. С. 88-91.
3. 3. Андронов А.В., Жук Д.М., Кожевников Д.Ю., Маничев В.Б. Библиотека математических программ-решателей на языке Си: SADEL. // <http://pa10.ru>.
4. 4. Д.М. Жук, В.Б. Маничев, А.О. Ильницкий Методы и алгоритмы решения дифференциально-алгебраических уравнений для моделирования систем и объектов во временной области. // Информационные технологии. - 2010. – часть 1 - №7, часть 2 - №8.
5. 5. Маничев В.Б., Жук Д.М., Сахаров М.К. SADEL – Си библиотека для решения алгебраических и дифференциальных уравнений с максимально возможной компьютерной точностью // Информационные технологии. – 2012, №10, С. 7-14.
6. 6. В.Б.Маничев, В.В.Глазкова, Д.Ю.Кожевников, Д.А.Кириянов, М.К.Сахаров Решение систем линейных алгебраических уравнений с удвоенной точностью вычислений на языке Си. // Вестник МГТУ, сер. Приборостроение. 2011. - Вып. 4. С. 25-36.
7. 7. Guiyou Mao, Linda R. Petzold. Efficient integration over discontinuities for differential-algebraic systems, Computers & Mathematics with Applications, Volume 43, Issues 1–2, January 2002, Pages 65-79.