электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 539.3

Исследование механических свойств композитов, армированных углеродными нанотрубками

Тарасова Е.С., *студент*
Россия,105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
Кафедра «Прикладная математика»

Научный руководитель: Кувыркин Г.Н., д.т.н., профессор,
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана

Зарубин В.С., д.т.н., профессор
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
zarubin@bmstu.ru

Введение

В наше время очень широкое распространение получили композиты, армированные нанотрубками. Это можно объяснить тем, что такие материалы имеют лучшие упругие и жесткостные свойства по сравнению с неармированными материалами. Это является очень важным для дальнейшего развития техники. Применяя различные математические модели, на примере композита алюминия, армированного углеродными нанотрубками, рассмотрим его механические свойства и выявим зависимости изменения параметров среды от изменения параметров углеродных нанотрубок.

1. Трансверсально изотропная среда

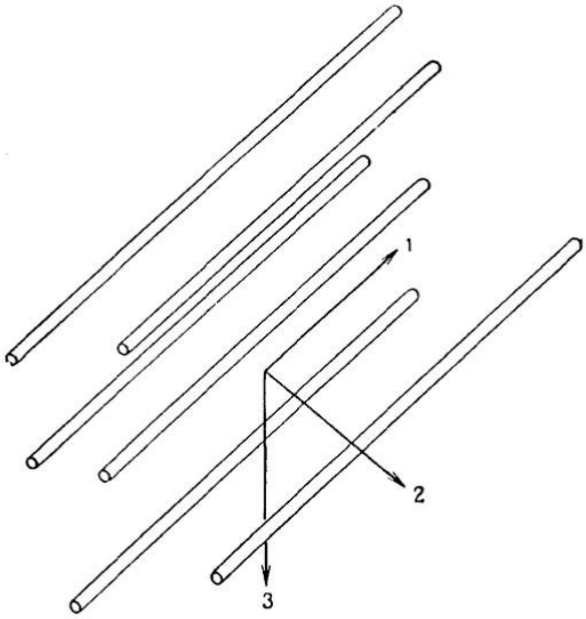

Рис. 1. Система параллельных волокон является трансверсально изотропной средой

Основным параметром нанотрубки, характеризующим её прочность на растяжение, является продольный модуль Юнга E, который определяется выражением

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} + \frac{N}{2\pi R h \varepsilon},$$

где σ — продольное напряжение, ε — относительное растяжение нанотрубки при растяжении, R — радиус нанотрубки, h — толщина её стенок. Растяжение цилиндрической оболочки обычно сопровождается сокращением её поперечного размера. Это свойство характеризуется коэффициентом Пуассона ν, величина которого определяется как отношение относительного поперечного сжатия ε' к относительному продольному растяжению ε:

$$\nu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}.$$

Иногда для характеристики механических свойств материалов используют объёмный модуль упругости K, определяемый соотношением

$$p = -K\frac{\Delta V}{V}.$$

Здесь p — однородное давление, которому подвергается объект, а $\frac{\Delta V}{V}$ — вызванное этим воздействием относительное изменение объёма.

Для изотропных материалов связь между объёмным модулем упругости и модулем Юнга имеет следующий вид:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}.$$

Пока упаковка волокон в поперечном сечении носит стохастический характер, можно сделать допущение, что среда эффективно гомогенна. Среды такого типа (рис. 1) обладают симметрией в плоскости, перпендикулярной к направлению ориентации волокон, и называются трансверсально изотропными [2]. Прообразом нанотрубки является графеновая плоскость, которая в макромасштабе обладает изотропией упругих свойств. Тогда нанотрубка — это сплошной цилиндр, сделанный из особого анизотропного материала — нановолокно. Такой материал сохраняет степень изотропии, присущую нанотрубкам, а именно изотропию свойств в плоскости, поперечной оси трубки [1]. Нановолокно можно считать частью трансверсально изотропной среды. Для таких сред компоненты C_{ijkl} тензора упругих констант могут быть полностью определены экспериментально, причем

$$\sigma_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl},$$

где σ_{ij} и ε_{kl} — компоненты тензоров напряжений и деформации соответственно. Действительно, допустим, что ось 1 – ось симметрии. Тогда соотношения напряжение – деформация можно записать в виде [2]:

$$\begin{gathered}
\sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33}, \\
\sigma_{22} = C_{12}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{23}\varepsilon_{33}, \\
\sigma_{33} = C_{12}\varepsilon_{11} + C_{23}\varepsilon_{22} + C_{22}\varepsilon_{33}, \\
\sigma_{12} = 2C_{66}\varepsilon_{12}, \\
\sigma_{23} = (C_{22} - C_{23})\varepsilon_{23}, \\
\sigma_{31} = 2C_{66}\varepsilon_{31}.
\end{gathered} \tag{1}$$

Пять констант $C_{11}, C_{12}, C_{22}, C_{23}$ и C_{66} определяют пять независимых эффективных свойств среды. Обычно всеми константами пользуются редко, поскольку экспериментальное их определение сопряжено со значительными трудностями. Поэтому на практике удобно использовать так называемые технические константы. Рассмотрим состояние одноосного нагружения, при котором $\sigma_{11} \neq 0, \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$. Из (1) легко найдем, что $\sigma_{11} = E_{11}\varepsilon_{11}$, где [2]

$$E_{11} = C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}}. \tag{2}$$

Величина E_{11}, определяемая непосредственно из эксперимента, является модулем упругости при одноосном нагружении (модуль Юнга). Константу C_{11} также можно найти экспериментально при условиях $\sigma_{11} \neq 0, \varepsilon_{11} \neq 0, \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$. Изменение поперечных размеров образца при одноосном нагружении используется для определения коэффициентов Пуассона через соотношения

$$\nu_{12} = \frac{-\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}, \quad \nu_{13} = \frac{-\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}},$$

где в обозначении ν_{ij} принято, что первый индекс i относится к направлению приложения напряжения (деформации), а второй j – к направлению вызванной им поперечной деформации. Из (1) следует, что при одноосном нагружении в направлении 1

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}}. \tag{3}$$

Рассмотрим состояние плоского сжатия, $\varepsilon_{11} = 0$, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma, \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon$. Тогда

из (1) следует, что $\sigma = 2K_{23}\varepsilon$, где

$$K_{23} = \frac{C_{22} + C_{23}}{2}. \tag{4}$$

Величина K_{23} является поперечным модулем сжатия. И наконец, модули сдвига можно выразить следующим образом:

$$\mu_{12} = \mu_{31} = C_{66}, \tag{5}$$

$$\mu_{23} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2} \tag{6}$$

Соотношения (2) – (6) могут быть преобразованы к виду [2]:

$$C_{11} = E_{11} + 4\nu_{12}^2 K_{23},$$

$$C_{12} = 2K_{23}\nu_{12},$$

$$C_{22} = \mu_{23} + K_{23},$$

$$C_{23} = -\mu_{23} + K_{23},$$

$$C_{66} = \mu_{12}.$$

Обозначим [3]

$\mu_{23} \equiv G_T$ — поперечный модуль сдвига,

$K_{23} \equiv K_T$ — поперечный модуль сжатия,

$\mu_{12} \equiv G_L$ — продольный модуль сдвига,

$E_{11} \equiv E_L$ — продольный модуль Юнга.

Выведенные соотношения можно преобразовать:

$$C_{11} = E_L + 4\nu_{12}^2 K_T,$$
$$C_{12} = \sqrt{K_T(C_{11} - E_L)},$$
$$C_{22} = G_T + K_T, \quad (7)$$
$$C_{23} = - \ G_T + K_T,$$
$$C_{66} = G_T.$$

Кроме пяти независимых констант можно определить и другие константы трансверсально изотропной среды. Например, если на тело действует одноосное растягивающее напряжение в направлении, перпендикулярном оси симметрии, то $\sigma_{22} \neq 0, \sigma_{11} = \sigma_{33} == \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$. Из (2) найдем $\sigma_{22} = E_{22}\varepsilon_{22}$, где [2]

$$E_{22} = C_{22} + \frac{C_{12}^2(-C_{22} + C_{23}) + C_{23}(-C_{11}C_{23} + C_{12}^2)}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}. \quad (8)$$

Для трансверсально изотропного материала типа волокнистого армированного композита характерно, что E_{11} много меньше E_{22}. Определяя коэффициенты Пуассона ν_{21}, ν_{23} при помощи выражений $\nu_{12} = \frac{-\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}$, $\nu_{23} = \frac{-\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{22}}$, имеем

$$\nu_{21} = \frac{C_{12}(C_{22} - C_{23})}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}, \quad \nu_{23} = \frac{C_{11}C_{23} - C_{12}^2}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}. \quad (9)$$

Из свойств симметрии среды следует также, что

$$\nu_{31} = \nu_{21}, \quad \nu_{32} = \nu_{23}.$$

Отметим, что $\nu_{12} \neq \nu_{21}$; из приведенных выше формул можно определить связь между этими константами [2]:

$$\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = \frac{\nu_{21}}{E_{22}}.$$

Полезными являются и следующие соотношения [2]:

$$E_{22} = \frac{4\mu_{23}K_{23}}{K_{23} + \mu_{23} + 4\nu_{12}^2\mu_{23}K_{23}/E_{11}}, \quad (10)$$

$$\nu_{21} = \frac{K_{23} - \mu_{23} - 4\nu_{12}^2\mu_{23}K_{23}/E_{11}}{K_{23} + \mu_{23} + 4\nu_{12}^2\mu_{23}K_{23}/E_{11}}, \quad (11)$$

$$\nu_{12}^2 = \frac{4\nu_{12}^2\mu_{23}K_{23}}{E_{11}(K_{23} + \mu_{23}) + 4\nu_{12}^2\mu_{23}K_{23}}.$$

2. Полидисперсная модель среды с цилиндрическими включениями

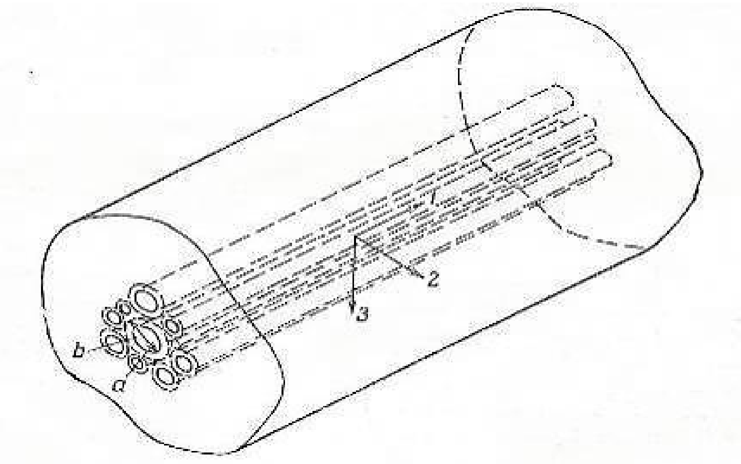

Рис. 2. Полидисперсная модель с цилиндрическими включениями

Наиболее часто применимой является полидисперсная модель среды с цилиндрическими включениями. Принимается, что волокна представляют собой бесконечно длинные круговые цилиндры, заключенные в непрерывную матрицу. Согласно этой модели, с каждым отдельным волокном радиусом a связана оболочка из материала матрицы радиусом b. Каждая отдельная комбинация волокна и матрицы образует составной цилиндр. Практичность подобной модели объяснена тем, что для определения четырех из пяти эффективных модулей представительного элемента объема достаточно рассматривать отдельный составной цилиндр (рис. 2) [1]. Цель заключается вначале в определении E_{11} при одноосном нагружении. Для этого примем $\varepsilon_{11} = \varepsilon$, $\sigma_{22} = \sigma_{33} == \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$, где ось 1 в прямоугольной декартовой системе координат совпадает с направлением оси составного цилиндра. Перейдём к цилиндрической системе координат и предположим, что существует поле перемещений [2]:

$$u_{rF} = A_{Fr}, \quad u_{rM} = A_{Mr} + \frac{B_M}{r}, \quad u_z = \varepsilon z,$$

где A_F относится к внутреннему цилиндру (волокну), а A_M и B_M — к оболочке (матрице). Для определения этих констант используем условия на границе [2]

$$r = a: \quad u_{rF} = u_{rM}, \quad \sigma_{rF} = \sigma_{rM},$$
$$r = b: \quad \sigma_{rM} = 0. \qquad (12)$$

В нашей задаче эффективный модуль E_{11} определяется выражением [2]

$$E_{11} = \frac{\langle \sigma_{zz} \rangle}{\varepsilon},$$

которое можно записать в виде [2]

$$E_{11} = \frac{1}{\pi b^2 \varepsilon} \iint_A \sigma_{zz}(r)\, da, \tag{13}$$

где A — площадь поперечного сечения представительного элемента. Проинтегрируем (13), получим [2]

$$E_{11} = cE_F + (1-c)E_M + \frac{4c(1-c)(\nu_F - \nu_M)^2 \mu_M}{(1-c)\mu_M/(K_F + \mu_F/3) + c\mu_M/(K_M + \mu_M/3) + 1}, \tag{14}$$

где c — концентрация армирующего волокна в среде. Выражение (14) определяет эффективный модуль упругости при одноосном нагружении в направлении оси одиночного составного цилиндра [2]. Поставленная задача позволяет определить эффективное значение коэффициента Пуассона ν_{12}, если ось 1 совпадает с направлением волокон и $\nu_{12} \neq \nu_{21}$. В соответствии с рассматриваемой задачей ν_{12} можно определить по формуле [2]

$$\nu_{12} = -u_r|_{r=b}/(\varepsilon b),$$

т.е. имеем отрицательное значение отношения поперечной деформации к заданной продольной деформации тела. Можно показать, что [2]

$$\nu_{12} = (1-c)\nu_M + c\nu_F + \frac{c(1-c)(\nu_F - \nu_M)[\mu_M/(K_M + \mu_M/3) - \mu_M/(K_F + \mu_F/3)]}{(1-c)\mu_M/(K_F + \mu_F/3) + c\mu_M(K_M + \mu_M/3) + 1}. \tag{15}$$

Задачи об определении ещё двух констант можно сформулировать и решить аналогично. Можно показать, что [2]

$$K_{23} = K_M + \frac{\mu_M}{3} + \frac{c}{1/[K_F - K_M + 1/3(\mu_F - \mu_M)] + (1-c)/(K_M + 4/3\mu_M)}, \tag{16}$$

$$\frac{\mu_{12}}{\mu_M} = \frac{\mu_F(1+c) + \mu_M(1-c)}{\mu_F(1-c) + \mu_M(1+c)}. \tag{17}$$

Остаётся определить последнюю константу, модуль сдвига μ_{23} в плоскости изотропии, но это оказывается трудной задачей, если использовать полидисперсную модель. В следующем разделе рассмотрим модель, позволяющую определить μ_{23} и для полидисперсной модели с цилиндрическими включениями.

3. Трёхфазная модель среды с цилиндрическими включениями

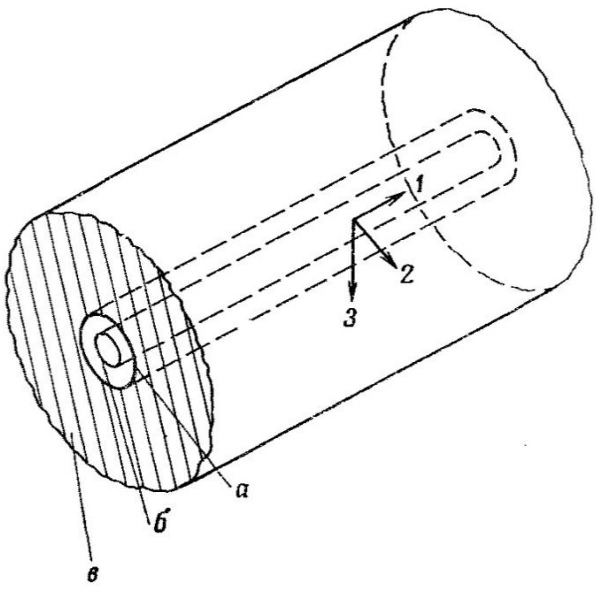

Рис. 3. Трёхфазная модель: *а* — матрица; *б* — волокно; *в* — эквивалентная гомогенная среда

Заменим все, кроме одного, составные цилиндры эквивалентной гомогенной средой, как показано на рис. 3. При помощи этой модели попытаемся определить эффективный модуль сдвига в плоскости изотропии. Рассмотрим представительный элемент объёма, подверженный деформации сдвига.

Деформированное состояние эквивалентной гомогенной среды в полярной системе координат выражается в виде [2]

$$u_{rE} = \frac{b}{4\mu_{23}}\left[\frac{2r}{b} + (\nu+1)\frac{b}{r}a_3 + \frac{b^3}{r^3}c_3\right]\cos 2\theta, \tag{18}$$

$$u_{\theta E} = \frac{b}{4\mu_{23}}\left[\frac{-2r}{b} - (\nu-1)\frac{b}{r}a_3 + \frac{b^3}{r^3}c_3\right]\sin 2\theta. \tag{19}$$

При $r \to \infty$ соотношения (18), (19) описывают состояние чистого сдвига. Модуль μ_{23} и коэффициент Пуассона являются неизвестными эффективными константами эквивалентной гомогенной среды. Перемещения в матрице выразим в виде [2]

$$u_{rM} = \frac{b}{4\mu_M}\left[(\eta_M - 3)\frac{r^3}{b^3}a_2 + \frac{r}{b}d_2 + (\eta_M + 1)\frac{b}{r}c_2 + \frac{b^3}{r^3}b_2\right]\cos 2\theta,$$

$$u_{\theta M} = \frac{b}{4\mu_M}\left[(\eta_M + 3)\frac{r^3}{b^3}a_2 - \frac{r}{b}d_2 + (\eta_M - 1)\frac{b}{r}c_2 + \frac{b^3}{r^3}b_2\right]\sin 2\theta.$$

Перемещения в волокне выразим в виде [2]

$$u_{rF} = \frac{b}{4\mu_M}\left[(\eta_M - 3)\frac{r^3}{b^3}a_1 + \frac{r}{b}d_1\right]\cos 2\theta,$$

$$u_{\theta F} = \frac{b}{4\mu_M}\left[(\eta_M + 3)\frac{r^3}{b^3}a_1 - \frac{r}{b}d_1\right]\sin 2\theta,$$

где $\eta_M = 3 - 4\nu_M$, $\eta_F = 3 - 4\nu_F$.

Определим восемь неизвестных констант $a_1, a_2, a_3, b_2, c_2, c_3, d_1, d_2$. Зададим условия неразрывности перемещений и напряжений $\sigma_r, \sigma_{r\theta}, u_r, u_\theta$ на границах раздела $r = a$,

$r = b$. Получим систему из восьми независимых уравнений [2]

$$d_1 - d_2 + 4\left(\frac{b}{a}\right)^2 c_2 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^4 b_2 = 0,$$

$$a_1 - a_2 + \left(\frac{b}{a}\right)c_2 + \left(\frac{b}{a}\right)^6 b_2 = 0,$$

$$[(\eta_M - 3)\mu_F - (\nu_F - 3)\mu_M]\mathrm{a}_2 + \left(\frac{b}{a}\right)^4[(\eta_M + 1)\mu_F + (\eta_F + 1)\mu_M]c_2 + (\mu_F -$$

$$- \mu_M)\left(\frac{b}{a}\right)^2 d_2 + (\mu_F + \eta_F\mu_M)\left(\frac{b}{a}\right)^6 b_2 = 0,$$

$$[(\eta_M+3)\mu_F-(\nu_F+3)\mu_M]a_2+\left(\frac{b}{a}\right)^4[(\eta_M-1)\mu_F-(\eta_F-1)\mu_M]c_2-(\mu_F- \tag{20}$$

$$-\mu_M)\left(\frac{b}{a}\right)^2 d_2+(\mu_F+\eta_F\mu_M)\left(\frac{b}{a}\right)^6 b_2=0,$$

$$2-4a_3-3c_3-d_2+4c_2+3b_2=0,$$

$$-2-2a_3-3c_3-6a_2+d_2+2c_2+3b_3=0,$$

$$\mu_M[2+(\eta+1)a_3+c_3]-\mu_{23}[(\eta_M-3)a_2+d_2+(\eta_M+1)c_2+b_2]=0,$$

$$\mu_M[-2-(\eta-1)a_3+c_3]-\mu_{23}[(\eta_M+3)a_2-d_2-(\eta_M-1)c_2+b_2]=0.$$

Принятый критерий определения эффективных свойств требует равенства энергий деформирования гетерогенной среды и эквивалентной гомогенной среды. Запишем это условие [2]

$$U=U_{EH}.$$

С использованием принципа Эшелби [2] получим

$$U_0=U_{EH},$$

$$\int_0^{2\pi}(\sigma_{rr}u_r^0+\sigma_{r\theta E}u_\theta^0-\sigma_{rr}^0 u_{rE}-\sigma_{r\theta}^0 u_{\theta E})_{r=b}d\theta=0,$$

где

$$\begin{gathered}\sigma_{rr}^0=\cos 2\theta,\\ \sigma_{r\theta}^0=-\sin 2\theta,\\ u_r^0=\frac{r}{2\mu_{23}}\cos 2\theta,\\ u_\theta^0=\frac{r}{2\mu_{23}}\sin 2\theta,\\ \sigma_{rrE}|_{r=b}=(1-2a_3-3/2c_3)\cos 2\theta,\\ \sigma_{r\theta E}|_{r=b}=-(1+a_3+3/2c_3)\sin 2\theta,\end{gathered} \tag{21}$$

а $u_{rE}|_{r=b}$, $u_{\theta E}|_{r=b}$ выражены в соответствии (18), (19). Подставив (18), (19) и (21) и проведя интегрирование, получим [2]

$$a_3=0.$$

Выразив a_3 из (20) и приравняв его к нулю, получим соотношения для определения μ_{23}

$$A\left(\frac{\mu_{23}}{\mu_M}\right)^2+2B\left(\frac{\mu_{23}}{\mu_M}\right)+C=0, \tag{22}$$

где [2]

$$A=3c(1-c)^2\left(\frac{\mu_F}{\mu_M}-1\right)\left(\frac{\mu_F}{\mu_M}+\eta_F\right)+$$

$$+\left[\frac{\mu_F}{\mu_M}\eta_M+\eta_F\eta_M-\left(\frac{\mu_F}{\mu_M}-\eta_F\right)c^3\right]\left[c\eta_M\left(\frac{\mu_F}{\mu_M}-1\right)-\left(\frac{\mu_F}{\mu_M}+1\right)\right],$$

$$B=-3c(1-c)^2\left(\frac{\mu_F}{\mu_M}-1\right)\left(\frac{\mu_F}{\mu_M}+\eta_F\right)+$$

$$+\left[\frac{\mu_F}{\mu_M}\eta_M+\left(\frac{\mu_F}{\mu_M}-1\right)c+1\right]\left[(\eta_M-1)-\frac{\mu_F}{\mu_M}+\eta_F-2\left(\frac{\mu_F}{\mu_M}\eta_M-\eta_F\right)c^3\right]+$$

$$+\frac{c}{2}(\eta_M+1)\left(\frac{\mu_F}{\mu_M}-1\right)\left[\frac{\mu_F}{\mu_M}+\eta_F+\left(\frac{\mu_F}{\mu_M}\eta_M-\eta_F\right)c^3\right],$$

$$C=3c(1-c)^2\left(\frac{\mu_F}{\mu_M}-1\right)\left(\frac{\mu_F}{\mu_M}+\eta_F\right)\left[\frac{\mu_F}{\mu_M}\eta_M+\left(\frac{\mu_F}{\mu_M}-1\right)c+1\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\mu_F}{\mu_M}+\eta_F+\left(\frac{\mu_F}{\mu_M}\eta_M-\eta_F\right)c^3\right].$$

При малых объёмных долях волокон уравнение (22) можно преобразовать к виду [2]

$$\frac{\mu_{23}}{\mu_M}=1+\frac{c}{\mu_M/(\mu_F-\mu_M)+(K_M+7/3\mu_M)/(2K_M+8/3\mu_M)}. \tag{23}$$

Соотношение (23) позволяет найти модуль сдвига μ_{23} через характерные параметры и объёмные доли компонент.

4. Результаты расчётов

4.1. Трансверсально изотропная среда

По формуле (2) объёмный модуль упругости равен $4{,}89\cdot10^{11}$ Па.

Вычислим пять констант (в Па) по формуле (7):

$$C_{11}=1{,}19\cdot10^{12},$$

$$C_{12}=3{,}33\cdot10^{11},$$

$$C_{22}=4{,}94\cdot10^{11},$$

$$C_{23}=4{,}85\cdot10^{11},$$

$$C_{66}=4{,}40\cdot10^{9}.$$

Матрица податливости в общем случае имеет вид [2]:

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & \frac{-\nu_{21}}{E_{22}} & \frac{-\nu_{21}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & \frac{-\nu_{32}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{-\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{23}} 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{12}} \end{bmatrix}.$$

Находим из (6) E_{11}, из (8) μ_{12}, из (9) μ_{23}, из (10) E_{22}, из (11) ν_{32}, из (12) ν_{21}. Получаем матрицу коэффициентов податливости

$$[S_{ij}] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}03 \cdot 10^{-12} & -3{,}51 \cdot 10^{-13} & -3{,}51 \cdot 10^{-13} & 0 & 0 & 0 \\ -3{,}51 \cdot 10^{-13} & 5{,}74 \cdot 10^{-11} & -5{,}62 \cdot 10^{-11} & 0 & 0 & 0 \\ -3{,}51 \cdot 10^{-13} & -5{,}62 \cdot 10^{-11} & 5{,}74 \cdot 10^{-11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3{,}81 \cdot 10^{-11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}27 \cdot 10^{-10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3{,}81 \cdot 10^{-11} \end{bmatrix}.$$

4.2. Полидисперсная среда

Используя параметры полидисперсной среды (табл. 1),

Таблица 1

Значение параметров для полидисперсной среды

Физические константы	Алюминий	Углеродное волокно
E, ГПа (модуль упругости)	70	971 (800, 1200)
K, ГПа (объемный модуль)	75,8	190
μ, Гпа (модуль сдвига)	26	744 (450, 850)
ν (Коэффициент Пуассона)	0,34	0,28 (0,23, 0,33)

исследуем зависимость характеристик среды от концентрации армирующего волокна. С помощью формулы (14) найдём значение эффективного модуля упругости при одноосном нагружении в направлении оси одиночного составного цилиндра при различных концентрациях армирующего волокна и значениях модуля Юнга углеродного волокна (табл. 2).

Таблица 2

Зависимость коэффициента E_{11} от концентрации с и модуля Юнга углеродного волокна E_N

c	E_{11}, Гпа		
	При $E_N = 800$ ГПа	При $E_N = 971$ ГПа	При $E_N = 1200$ ГПа
0,0	70	70	70
0,2	216	251	296
0,4	362	532	522
0,6	508	609	748
0,8	654	789	974
1,0	800	971	1200

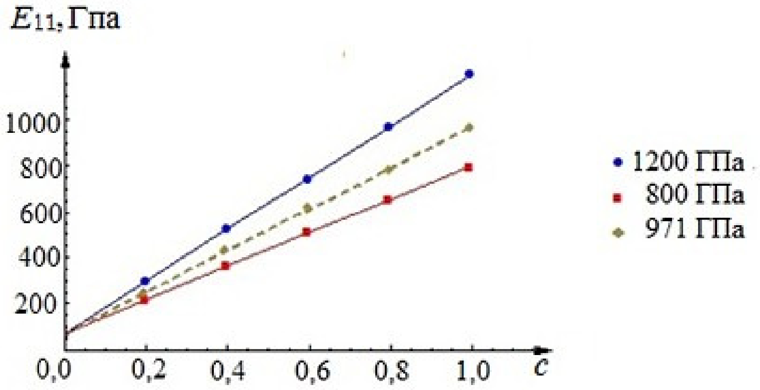

Рис. 4. Зависимость коэффициента E_{11} от концентрации c и модуля Юнга углеродного волокна E_N

На рис. 4 видно, что с ростом концентрации армирующего волокна значение модуля упругости E_{11} увеличивается. От модуля Юнга углеродного волокна наблюдаем прямую зависимость.

С помощью формулы (15) вычислим значение коэффициента Пуассона ν_{12} при различных значениях с и коэффициента Пуассона углеродного волокна ν_N (табл. 3).

Таблица 3

Зависимость коэффициента ν_{12} от концентрации с и коэффициента Пуассона углеродного волокна ν_N

c	ν_{12}		
	При $\nu_N = 0,23$	При $\nu_N = 0,28$	При $\nu_N = 0,33$
0,0	0,340	0,340	0,340
0,2	0,311	0,325	0,338
0,4	0,292	0,313	0,335
0,6	0,271	0,302	0,333
0,8	0,263	0,293	0,332
1,0	0,230	0,280	0,330

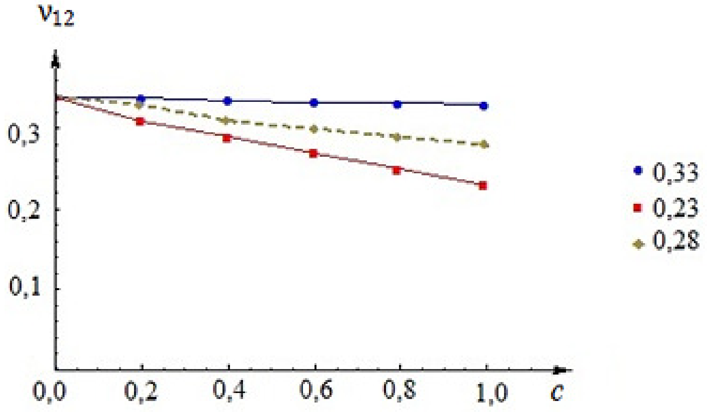

Рис. 5. Зависимость коэффициента ν_{12} от концентрации с и коэффициента Пуассона углеродного волокна ν_N

На рис. 5 видно, что с ростом концентрации армирующего волокна значение коэффициента ν_{12} уменьшается. Это можно объяснить тем, что коэффициент Пуассона углеродного волокна меньше коэффициента Пуассона алюминия. От коэффициента Пуассона углеродного волокна наблюдаем прямую зависимость. С помощью формул (16) и (17) вычислим K_{23} и μ_{12} соответственно при различных значениях с и μ_N для углеродного волокна (табл. 4 и 5).

Таблица 4

Зависимость коэффициента K_{23} от концентрации с и μ_N углеродного волокна

c	K_{23}, Гпа		
	При μ_N = 450 ГПа	При μ_N = 744 ГПа	При μ_N = 850 Гпа
0,0	84	84	84
0,2	110	110	111
0,4	150	153	155
0,6	225	234	236
0,8	409	447	455
1,0	1616	2590	2950

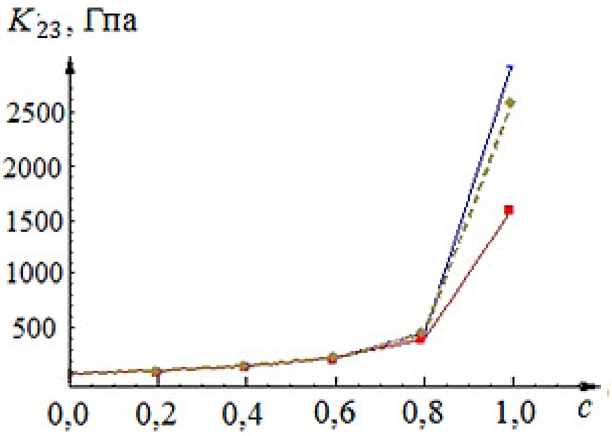

Рис. 6. Зависимость коэффициента K_{23} от концентрации c и μ_N углеродного волокна

Таблица 5

Зависимость коэффициента μ_{12} от концентрации c и μ_N углеродного волокна

c	μ_{12}, Гпа		
	При μ_N = 450 ГПа	При μ_N = 744 ГПа	При μ_N = 850 ГПа
0,0	26	26	26
0,2	37	38	38
0,4	55	56	57
0,6	87	92	93
0,8	155	179	184
1,0	450	744	850

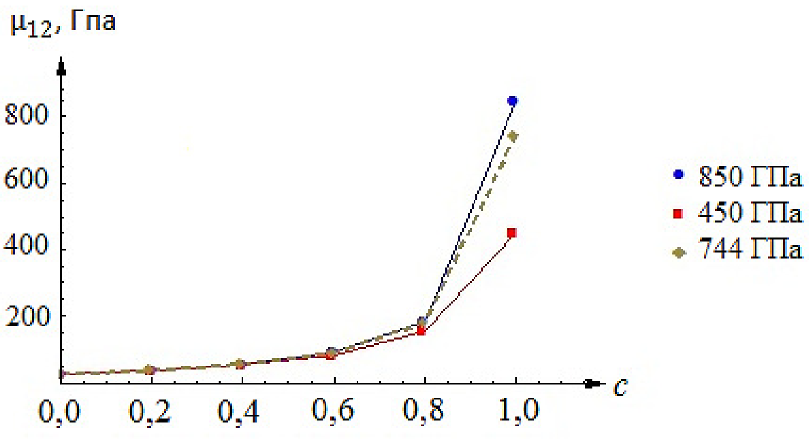

Рис. 7. Зависимость коэффициента μ_{12} от концентрации c и μ_N углеродного волокна

На рис. 6 и рис. 7 показаны зависимость коэффициентов K_{23} и μ_{12} от концентрации армирующего волокна и коэффициента μ_N углеродного волокна. При увеличении концентрации армирующего волокна увеличиваются оба коэффициента. Коэффициенты K_{23} и μ_{12} имеют прямую зависимость от коэффициента μ_N углеродного волокна.

4.3. Трёхфазная модель

С помощью формулы (22) вычислим коэффициент μ_{23} при различных значениях c и параметров углеродного волокна (табл. 6 и 7).

Таблица 6

Зависимость коэффициента μ_{23} от концентрации c и ν_N углеродного волокна

c	μ_{23}, ГПа		
	При $\nu_N = 0{,}23$	При $\nu_N = 0{,}28$	При $\nu_N = 0{,}33$
0,0	32	32	32
0,2	47	46	48
0,4	72	66	72
0,6	98	87	98
0,8	66	66	66
1,0	26	28	26

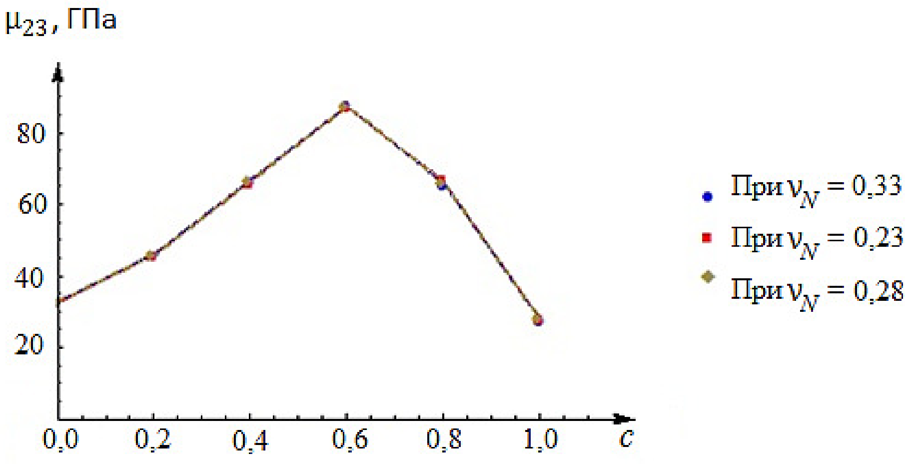

Рис. 8. Зависимость коэффициента μ_{23} от концентрации c и ν_N углеродного волокна

Таблица 7

Зависимость коэффициента μ_{23} от концентрации c и μ_N углеродного волокна

c	μ_{23}, Гпа		
	При $\mu_N = 450$ ГПа	При $\mu_N = 744$ ГПа	При $\mu_N = 850$ ГПа
0,0	32	32	32
0,2	44	46	46
0,4	63	66	67
0,6	81	87	89

0,8	65	66	66
1,0	29	28	27

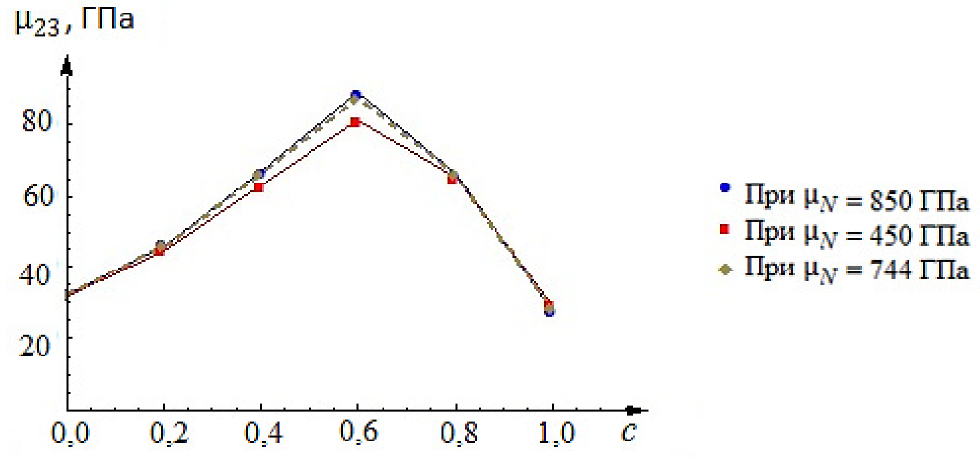

Рис. 9. Зависимость коэффициента μ_{23} от концентрации c и μ_N углеродного волокна

На рис. 8 и рис. 9 видно, что при концентрации армирующего волокна, равной 60 %, достигается максимальное значение коэффициента μ_{23}. Это можно объяснить неточностью модели или ошибкой в формуле в источнике [2]. Из рис. 8 можно сделать вывод, что изменение коэффициента Пуассона углеродного волокна незначительно влияет на изменение коэффициента μ_{23}. Из рис. 9 можно сделать вывод, что коэффициент μ_{23} имеет прямую зависимость от коэффициента μ_N на всех концентрациях армирующего волокна, кроме 100 %.

5. Выводы

Проведено исследование механических свойств композитов, армированных углеродными нанотрубками. В качестве исследуемого материала был выбран алюминий. Механические свойства композита были исследованы с помощью трёх моделей среды: трансверсально изотропной, полидисперсной и трёхфазной. С помощью трансверсально изотропной можно найти матрицу податливости среды и пять констант, определяющих среду. Трансверсально изотропная модель не даёт информации об изменении характеристик среды в зависимости от концентрации углеродных нанотрубок.

С помощью полидисперсной модели среды определили зависимость некоторых характеристик среды от концентрации углеродных нанотрубок в композите. Некоторые характеристики композита ухудшаются с ростом концентрации углеродных нанотрубок. Это может быть связано как с особенностями композита, так и с погрешностью модели.

С помощью трёхфазной модели нашли характеристики среды, которые нельзя определить с помощью полидисперсной среды.

Список литературы

1. Колмогоров Г.Л., Латышева Т.В., Снигирева М.В. Трансверсально изотропные характеристики сверхпроводящих длинномерных композиционных материалов. Режим доступа: http://book.uraic.ru/project/conf/txt/008/2008/.../98-29.02.08.html (дата обращения 20.09.2013)
2. Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 335 с.
3. Ченцов А.В. Разработка дискретно-континуальных моделей деформирования и разрушения наноматериалов Режим доступа: http://www.twirpx.com/file/617876/ (дата обращения 22.09.2013).
4. Елецкий А.В. Механические свойства углеродных наноструктур и материалов на их основе. Режим доступа: http://ufn.ru/ru/articles/2007/3/a/ (дата обращения 22.09.2013).