НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

Софья Ковалевская: поэт от математики

07, июль 2014

Феоктистова О. П., Чернышева И. Н.

УДК 929

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

chernisheva.i@yandex.ru

Софья Ковалевская

Ее называли «принцессой математики». Она поражала современников своими открытиями. Первая в мире женщина-профессор, осмелившаяся выступать с публичными лекциями! Но если бы не было в жизни Софьи Ковалевской страстей и сомнений, мешавших ее работе, безусловно, свершения ее были куда значительнее. А если бы не было в ее жизни науки – возможно, она смогла бы стать по-настоящему счастливой женщиной. Софья Васильевна Ковалевская умерла молодой. Ей было всего 41 год. И когда весь мир сокрушался об утрате, ее ближайшая подруга Анна Эдгрен, маркиза де Кампосага, в некрологе сказала: «Коротка или продолжительна жизнь – это вопрос второстепенный; вся суть в том, насколько она богата содержанием – для себя и для других. А при такой точке зрения жизнь Ковалевской длиннее жизни большинства людей. Она жила ускоренной жизнью, пила полною чашей из источника счастья и из источника горя».

Таинственная стена

Софья Васильевна Корвин-Круковская родилась в Москве 3 января 1850 года. Семейная легенда возводила родословную Корвин-Круковских к венгерскому королю Матиашу Корвину, покровителю наук и искусств. Сама «принцесса математики» верила, что таланты она унаследовала именно от него: «Я получила страсть к науке от предка, венгерского короля Матвея Корвина; любовь к математике, музыке и поэзии от деда матери с отцовской стороны, астронома Шуберта; личную свободу от Польши; от цыганки-прабабки – любовь к бродяжничеству и неумение подчиняться принятым обычаям; остальное от России».

Отец ее, генерал Василий Васильевич Корвин-Круковский, человек сухой и замкнутый, женился поздно, к жене относился, как к дочери, а к детям – как к внукам: существам любимым, но далеким и непонятным. Мать, Елизавета Федоровна Шуберт, хорошенькая и кокетливая немка, в молодости обожала развлечения и балы, и в детскую практически не заходила. Трое детей – Аня, Софа и Федя – были предоставлены няне и гувернантке-француженке. Впрочем, первенца, живую и общительную Аню, иногда из детской вызывали, чтобы представить гостям или даже свозить на детский бал. Младший, Федя, единственный сын, тоже являлся предметом гордости родителей: наследник рода! А вот средняя, Софа, росла дичком и считалась «нелюбимой», о чем она не раз слышала от няни, рассказывавшей кому-нибудь из дворни, как разочаровались родители, когда вместо долгожданного сына родилась Софья.

Софе было шесть, когда отец вышел в отставку и вся семья переехала в имение Палибино в Витебской губернии. Гувернантку-француженку уволили, наняли гувернантку-англичанку мисс Маргарет Смит. Увы, она оказалась слишком косной и примитивной натурой, чтобы оценить богатый духовный мир своей воспитанницы. Гувернантка старалась воспитать из Софы благопристойную леди, и боролась с любыми проявлениями вольнодумия, в том числе – с любовью к чтению и с тягой к творчеству.

«Самый размер стихов всегда производил на меня такое чарующее действие, что уже с пятилетнего возраста я сама стала сочинять стихи. Но гувернантка моя этого занятия не одобряла; у нее в уме сложилось вполне определенное представление о том здоровом, нормальном ребенке, из которого потом выйдет примерная английская мисс, и сочинение стихов с этим представлением никак не вяжется. Поэтому она жестоко преследует все мои стихотворные попытки; если, на мою беду, ей попадется на глаза клочок бумажки, исписанный моими виршами, она тотчас же приколет его мне к плечу, и потом, в присутствии брата и сестры, декламирует мое несчастное произведение, разумеется, жестоко коверкая и искажая. Однако гонение это на мои стихи не помогало. В двенадцать лет я была глубоко убеждена, что буду поэтессой. Из страха гувернантки я не решалась писать своих стихов, но сочиняла их в уме, как старинные барды», — вспоминала Софья Васильевна.

Из-за чувства одиночества, уязвленная проявлениями безразличия родителей, Софа постоянно соперничала с сестрой и братом. И если появлялся какой-то родственник или знакомый, который вдруг уделял ей внимания больше, чем им, девочка привязывалась к нему всей душой.

Огромной удачей для Софы стало увольнение гувернантки. И то, что генерал Корвин-Круковский вдруг понял, что старшая дочь его плохо образована и пишет с ошибками. Он решил нанять для младшей настоящего учителя и пригласил в поместье Иосифа Игнатьевича Малевича. Именно этот человек открыл в маленькой упрямой Софе талант к математике. Правда, интерес к этой науке Софа проявляла и раньше. Она вообще очень любила слушать, например, как рассказывал о последних научных открытиях другой ее дядя, брат отца Петр Васильевич Корвин-Круковский. Самый вид математических формул казался девочке завораживающим…

Стены в одной из детских комнат в Палибино были обклеены листами литографированных лекций Остроградского о дифференциальном и интегральном исчислении. «Я помню, как я в детстве проводила целые часы перед этой таинственной стеной, пытаясь разобрать хоть отдельные фразы и найти тот порядок, в котором листы должны бы следовать друг за другом. От долгого ежедневного созерцания внешний вид многих формул так и врезался в моей памяти, да и самый текст оставил по себе глубокий след в мозгу, хотя в самый момент прочтения он и остался для меня непонятным, — рассказывала Ковалевская. — Когда, много лет спустя, уже пятнадцатилетней девочкой, я брала первый урок дифференциального исчисления у известного преподавателя математики в Петербурге, Александра Николаевича Страннолюбского, он удивился, как скоро я охватила и усвоила себе понятия о пределе и о производной, «точно я наперед их знала». Я помню, он именно так и выразился. И дело, действительно, было в том, что в ту минуту, когда он объяснял мне эти понятия, мне вдруг живо припомнилось, что все это стояло на памятных мне листах».

Вопрос образования

Софье Корвин-Круковской бесспорно повезло в том, что к моменту ее взросления в России самым актуальным сделался вопрос женского образования. Самой популярной дамой среди мыслящих представителей российского общества была женщина-хирург Суслова, а барышни мечтали получать образование – биологическое, юридическое, химическое, медицинское – с тем же пылом, с которым их ровесницы десятилетием раньше мечтали о любви. Теперь же любовь сделалась не модной. Модно было сбегать из дома, чтобы уехать за границу, жить в коммуне с «братьями и сестрами» и учиться в университете. Или выйти замуж по расчету, за «союзника» и «освободителя», который не станет претендовать на исполнение супружеских обязанностей, а просто поможет выехать в Европу и выучиться.

Двадцатичетырехлетняя сестра Софы Анна увлеклась идеей «освобождения» и планировала найти «союзника», который женится на ней и увезет ее вместе с сестрой из дома. Семнадцатилетняя Софья целиком разделяла интересы сестры. Сбежать вопреки родительской воле барышням Корвин-Круковским казалось настолько интересным, что они даже не задумались о том, что отец, поощрявший Анну в ее литературном труде, а Софью в занятиях математикой, скорее всего и сам бы предоставил им возможность учиться в Европе, если бы они его попросили. Вместо этого Анна познакомилась с молодым ученым-палеонтологом Владимиром Онуфриевичем Ковалевским, который собирался уехать в Европу для продолжения образования, и готов был помочь жаждущим свободы барышням. Жениться он собирался на Анне, но влюбился в Софью, едва ее увидел.

Софья Корвин-Круковская и Владимир Ковалевский обвенчались 1 октября 1868 года в селе Палибино. После торжественного обеда к крыльцу была подана карета и молодые сразу же уехали в Петербург.

Владимир был в восторге от своей фиктивной супруги и писал брату, зоологу Александру Ковалевскому: «Несмотря на свои 18 лет, воробышек образована великолепно, знает все языки как свой собственный и занимается до сих пор главным образом математикой, причем проходит уже сферическую тригонометрию и интегралы — работает, как муравей, с утра до ночи и при всем этом жива, мила и очень хороша собой. Вообще это такое счастье свалилось на меня, что трудно себе и представить…»

Жили супруги в разных комнатах, встречались за обедом и ужином, и оба испытывали дискомфорт из-за неестественности такой ситуации: их называли мужем и женой, а между тем, они были совершенно чужими друг другу.

Побег к науке

Весной 1869 года Ковалевские уехали в Гейдельберг.

Софья увезла с собой подругу Юлию Лермонтову, лично уговорив ее родителей отпустить девушку. Вместе они поступили в Гейдельбергский университет, только на разные факультеты: Софья – на математический, Юлия – на химический. Вместе они снимали квартиру и вели жизнь скромную, на грани бедности. Владимир жил отдельно.

В Гейдельберге Софья своим ярким талантом обратила на себя внимание всех преподавателей, и скоро сделалась местной знаменитостью: даже матери на улице показывали на нее детям.

Еще через год в Гейдельберг приехала Анна с подругой, сбежавшей из дома. Анна вскоре перебралась в Париж, где увлеклась революционным движением.

А Софья в 1870 году уехала в Берлин.

Она мечтала учиться у профессора математики Берлинского университета Карла Вейерштрасса.

Карл Вейерштрасс, профессор математики Берлинского университета

Это было нелегкой задачей: Вейерштрасс в ту пору вообще не брал учеников, да и к женскому образованию относился с предубеждением. Юной иностранке он задал самые трудные задачи. Но когда она через день принесла их, с блеском решенные, Вейерштрасс был потрясен – и согласился учить Софью. Он стал одним из ближайших ее друзей. Когда им случалось разлучаться, они писали друг другу, и Вейерштрасс неизменно старался поддержать Софью, невзирая на обстоятельства и расстояния: «Говоря серьезно, милая, дорогая Соня, будь уверена, я никогда не забуду, что именно я обязан моей ученице тем, что обладаю не только моим лучшим, но и единственным настоящим другом... Ты можешь быть твердо уверена: я всегда буду преданно поддерживать тебя в твоих научных стремлениях».

«Через год она представила в Геттингенский университет три работы, из которых каждая заслуживала степени доктора, – о кольце Сатурна, об Абелевских функциях и о дифференциальных уравнениях с частными производными; последняя тотчас была напечатана в известном математическом журнале Крелля, а первые две появились в печати несравненно позднее. Здесь мы наталкиваемся на интересный вопрос: почему же две первые работы не были напечатаны так долго? Ответ мы найдем в особенностях нравственной природы Ковалевской. Она всегда стремилась к чему-нибудь трудному, с глубокой страстью любила все сокровенное, недоступное, постоянно ставила себе сложные задачи в науке и в жизни, но пользоваться и наслаждаться плодами своего труда было не в ее характере. В этом проглядывала прежде всего черта, свойственная всем русским: не ценить своего труда; можно с достоверностью сказать, что менее важная работа не залежалась бы ни у одного немца. Но Ковалевская так настойчиво стремилась к достижению цели и, достигнув ее, настолько уставала, что не могла радоваться, но погружалась в меланхолию и чувствовала недовольство собою», — писала первый биограф Ковалевской, ее современница Елизавета Федоровна Литвинова.

Попытка женской жизни

Владимир Ковалевский готов был на все, лишь бы Софья жила рядом с ним. Он уговорил Софью перебраться в Петербург. Владимир мечтал сделать Софью счастливой. Подарить ей все то, в чем она нуждалась. Сам Владимир мог вести жизнь аскетическую. «Ему нужен стакан чаю да книга», — говорила о нем Софья. Но госпожа Ковалевская в те периоды, когда не была увлечена работой, отдавала должное и нарядам, и театрам, а еще она была сладкоежкой… Когда скончался тесть, оставив Софье в наследство тридцать тысяч, Владимир решил отказаться от научной деятельности и заняться тем, что могло принести им с женой богатство. Он вложил деньги в строительство домов, надеясь, что потом, будучи домовладельцем, сможет спокойно жить на прибыль и снова вернется к палеонтологии. Софья его поддержала. У нее начался один из тех периодов духовного затишья, которые неоднократно случались в ее жизни. Вейерштрасс посылал ей новые труды по математике, пытаясь понудить ученицу вернуться к работе, но Софья не находила в себе сил даже прочесть эти труды, даже ответить профессору. Она вела светскую жизнь, общаясь, правда, преимущественно с учеными: ее друзьями в ту пору стали Чебышев, Сеченов, Бутлеров, Менделеев. Иногда Софья спохватывалась и ужасалась, что время идет, а она ничего не делает для науки. Однако новые переживания мешали ей сосредоточиться на формулах: Софья наконец решилась стать настоящей женой Владимиру. В октябре 1878 года у них родилась дочь Соня.

В 1878 году открылись Высшие женские курсы, в учреждении которых Ковалевская принимала активное участие. Ее выбрали в число членов комитета, однако же читать лекции не пригласили, что ее чрезвычайно обидело: Софья надеялась сделать весомый вклад в развитие женского образования в России и даже заранее отказалась от платы за лекции!

Между тем, материальное положение Ковалевских становилось все хуже. Владимир запутался в своих делах, терял все больше денег, пытался мухлевать – и погорел. Отчаяние сводило его с ума в буквальном смысле. Потеряв все в Петербурге, супруги переехали в Москву. Разлад между ними углублялся.

Друзья уговаривали Софью вернуться к занятиям математикой: ведь она – гений, она не имеет права погубить свой талант! Да и Софья соскучилась ролью жены и матери. В 1880 году, по настоянию Чебышева, она приняла участие в съезде естествоиспытателей. И неожиданно, всплеском, вдохновение вернулось к ней. Она забыла все окружающее, перестала замечать мужа и даже дочку, она работала не поднимая головы.

Еще в 1876 году Софья познакомилась с гельсингфорсским профессором Гестой Миттаг-Леффлером, бывшим учеником Вейерштрасса.

Он посетил Ковалевскую в Петербурге в 1880 году. Они подружились и с тех пор не прекращали переписку. Год спустя в Стокгольме был основан новый университет. Миттаг-Леффлер пообещал Ковалевской, что добьется для нее кафедры, но для этого она должна напомнить о себе европейской науке.

Надежда на то, что ей доверят преподавание, окрылило Софью. Она наскоро собралась, взяла дочь и няню, и уехала в Берлин. Владимир Ковалевский, разбитый несчастьями, одинокий, отправился к брату в Одессу.

«Я чувствую, что предназначена служить истине — науке и прокладывать новый путь женщинам, потому что это значит — служить справедливости. Я очень рада, что родилась женщиной, так как это дает мне возможность одновременно служить истине и справедливости», — говорила Ковалевская.

Судьба мужа ее больше не интересовала. Она полностью погрузилась в свои работы, общалась только с Вейерштрассом и усердно изучала мемуары Ляме о преломлении света в кристаллах. Ковалевская говорила Лермонтовой: «Я только тогда и счастлива, когда погружена в мои созерцания».

15 апреля 1883 году Владимир Ковалевский покончил с собой, отравившись эфиром. А к лету того же года Софья завершила свою работу «О преломлении света в кристаллах». Путь к кафедре в Стокгольмском университете был открыт.

Стокгольмские открытия и премия Бордена

Ковалевскую приняли в Стокгольме восторженно. Восторги возросли, когда она в рекордные сроки выучила шведский так, что сумела на нем изъясняться. Лекции она читала на немецком, и они были так популярны, что студенты устраивали ей овации и засыпали цветами.

Вообще, шведский период жизни был самым счастливым в жизни Софьи Ковалевской. Здесь ее все любили. Здесь у нее появилась новая близкая подруга, писательница Анна Эдгрен, которая одновременно заботилась о благополучном быте Софьи (чего сама Ковалевская совершенно не умела) и восхищалась не только научными, но и литературными ее дарованиями. Госпожа Эдгрен убедила Ковалевскую, что ей следует писать, и под ее влиянием Софья вернулась к литературной деятельности.

В Россию Ковалевская возвращалась регулярно: навещала дочь и сестру. Анна тяжело болела, была разочарована в жизни, потому что супруг ее вернулся в Париж, и пребывание рядом с ней угнетало Ковалевскую. Однако свой сестринский долг она исполнила до конца. От постели умирающей сестры она писала госпоже Эдгрен: «Я и теперь пробую работать по мере возможности и пользуюсь всякою свободною минутой, чтобы обдумывать свое математическое сочинение или изучать гениальные трактаты Пуанкаре. Я не могу заниматься литературою; все в жизни кажется таким бледным и неинтересным. В такие минуты нет ничего лучше математики».

Дочь Соню госпожа профессор привезла в Швецию и отдала в частную школу.

В 1888 году Ковалевская должна была представить работу на премию Бордена во Французскую Академию наук. Эта работа казалась ей особенно интересной и важной, была настоящим вызовом ее уму. Собственно говоря, этой научной работе о вращении твердого тела с одной неподвижной точкой предстояло стать главной в ее жизни и принести ей мировую славу.

Еще Эйлером и Пуансо был исследован случай вращения твердого тела, подверженного действию силы тяжести, когда центр тяжести тела совпадает с точкой опоры.

Лагранж рассмотрел другой случай, решение этой задачи, а именно случай, когда центр тяжести волчка (в механике вращающееся твердое тело, называют волчком), лежит выше точки опоры.

В обоих случаях были получены решения этой задачи при произвольных начальных условиях. Прошло много лет, других случаев интегрируемости задачи о движении твердого тела с одной неподвижной точкой не появлялось.

В 1888 г. Парижская академия объявила конкурс за дальнейшие успехи в решении этой задачи.

В конкурсе принимали участие многие выдающиеся ученые того времени, участвовал в конкурсе и учитель С.В. Ковалевской, выдающийся математик Вейерштрасс.

Софье Васильевне удалось найти случай, когда система уравнений движения может быть полностью проинтегрирована с помощью эллиптических функций, т.е. функций однозначных и не имеющих на конечном расстоянии других точек, кроме полюсов.

…И в том же 1888 году произошло то, о чем Софья так страстно мечтала: она встретила свою великую любовь.

Максим Максимович Ковалевский был дальним родственником ее мужа. Он находился проездом в Стокгольме, пришел поприветствовать русскую даму-профессора. Софья уже была наслышана об этом человеке: несмотря на молодость, Ковалевский был известным в России и в Европе социологом, окончил юридический факультет Харьковского университета, изучал историю английского общественного строя и посвятил ей две свои диссертации: магистерскую и докторскую – последнюю он писал уже в Лондоне. Он был знаком с Карлом Марксом и Фридрихом Энгельсом, и под их влиянием начал заниматься историей землевладения и экономического роста Европы. Исследования Ковалевского использовал в своих работах Энгельс. Вернувшись в Россию, читал в Московском университете лекции, из-за вольнодумства сделался одним из самых популярных профессоров. Популярен он, правда, был только среди студентов, коллеги завидовали и не одобряли его, последовал донос, из-за которого Ковалевский из Университета был изгнан. Он уехал за границу, поклявшись не возвращаться в Россию, пока там не будет введена конституция. Будучи богатым человеком, в средствах он не нуждался, у него было имение на Украине, вилла около Ниццы. Свободно владея основными европейскими языками, он читал лекции в Англии, Франции и Италии.

Максим Максимович Ковалевский

Человек неординарный, Максим Ковалевский мог оценить такую женщину, как Софья. На другой день после знакомства он уже начал за ней ухаживать. И неожиданно для себя Софья влюбилась.

Всего десять дней провели они вместе – и все, ни о ком другом она думать не могла.

Софья пригласила Максима в Стокгольм, и он согласился читать курс лекций в университете – чтобы находиться рядом с любимой женщиной. При этом Софья понимала: любовь мешает ей сосредоточиться на науке, а ведь она сейчас должна всю себя отдать решению задачи, перед которой отступил великий Лагранж. Софья боролась с любовью, старалась реже видеться с Максимом, снова и снова отказывала ему, предлагавшему руку и сердце. Потом попросила о перерыве в отношениях. И при этом – в обществе ее осуждали. Женщина-ученый должна была хранить строгое целомудрие и верность одной лишь науке!

Под влиянием мучительных внутренних метаний, вызванных любовью к Ковалевскому и потребностью отдать всю себя чистой науке, Софья Ковалевская написала свое любимое стихотворение, которое было опубликовано только десять лет спустя: в феврале 1899 года в журнале «Женское дело». Вот отрывок из него:

Лживые призраки, злые виденья
Сбить тебя будут пытаться с пути;
Против всех вражеских козней спасенье
В собственном сердце ты сможешь найти;
Если хранится в нем искра святая,
Ты всемогущ и всесилен, но знай,
Горе тебе, коль, врагам уступая,
Дашь ты похитить ее невзначай!

Лучше бы было тебе не родиться,
Лучше бы истины вовсе не знать,
Нежели, зная, от ней отступиться,
Чем первенство за похлебку продать
Ведь грозные боги ревнивы и строги,
Их приговор ясен, решенье одно:
С того человека и взыщется много,
Кому было много талантов дано.
Ты знаешь в писанье суровое слово:
Прощенье замолит за все человек;
Но только за грех против духа святого
Прощения нет и не будет вовек.

Софья Ковалевская закончила свое исследование и отправила его в Парижскую академию на соискание премии Бордена «за усовершенствование в каком-нибудь важном пункте теории движения твердого тела».

24 декабря 1888 г. Парижская академия присудила премию «госпоже С.В. Ковалевской».

Но победительницей она себя не чувствовала.

Она писала Миттаг-Леффлеру: «Со всех сторон мне присылают поздравительные письма, а я, по странной иронии судьбы, ни разу в жизни не была так несчастна, как теперь».

Следом за французской, Ковалевская получила премию Шведской академии наук. Затем ее российские коллеги, математики Чебышев, Буняковский и Имшенецкий, решили добиться для Софьи Васильевны звания члена-корреспондента Российской Академии наук. Было принято особое положение «о допущении лиц женского пола к избранию в члены-корреспонденты». И только после этого на заседании Физико-математического отделения академии Ковалевская была избрана членом-корреспондентом. Чебышев писал в Стокгольм: «Наша Академия наук только что избрала Вас членом-корреспондентом, допустив этим нововведение, которому не было до сих пор прецедента. Я очень счастлив видеть исполненным одно из моих самых пламенных и обоснованных желаний».

Казалось бы – вот оно, истинное торжество! Но для счастья Софье не хватало Максима.

Софья так сильно тосковала по Максиму, что прежде любимый Стокгольм казался ей «адом на земле». Она говорила подруге, что желала бы умереть сейчас, но так, чтобы и Максим тоже умер, чтобы он не полюбил другую.

Софья поехала в Геную, где жил Максим Ковалевский. Там они встретили новый 1891 год. Возвращаясь в Стокгольм, Софья Ковалевская простудилась. Она не обратила внимания на первые признаки недомогания. Она нашла в себе силы читать лекции… Пока не слегла. Воспаление легких развивалось стремительно, усугубляясь пороком сердца. Но к счастью для себя, Софья Васильевна даже не успела осознать, что умирает. Она скончалась ночью 29 января 1891 года, на руках сиделки.

Скоропостижная смерть Ковалевской вызвала шок во всем научном мире. От нее ожидали еще стольких свершений… Похоронили «принцессу математики» в Стокгольме, на Северном кладбище.

От Эйлера до Ковалевской

Чтобы составить представление о замечательном результате, полученном С.В. Ковалевской в задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки, рассмотрим некоторые сведения из кинематики и динамики сферического движения.

1. Кинематические формулы Эйлера. Эйлеровы углы и проекции мгновенной угловой скорости тела на подвижные оси координат

Обозначим через O - неподвижную точку тела. Пусть $Ox_1y_1z_1$ (рис. 1) – неподвижная система координат, а $Oxyz$ - подвижная, жестко связанная с телом. Положение подвижной системы $Oxyz$ относительно неподвижной к осям Ox_1y_1z, полностью определяется углами Эйлера ψ, θ, φ (рис. 1). Для того, чтобы перейти от осей $Ox_1y_1z_1$ к осям $Oxyz$ нужно совершить три поворота, а именно, сначала вокруг оси Oz_1 с угловой скоростью $\dot{\psi}$, затем вокруг оси OK (линии узлов) с угловой скоростью $\dot{\theta}$, а затем вокруг оси Oz, с угловой скоростью $\dot{\varphi}$.

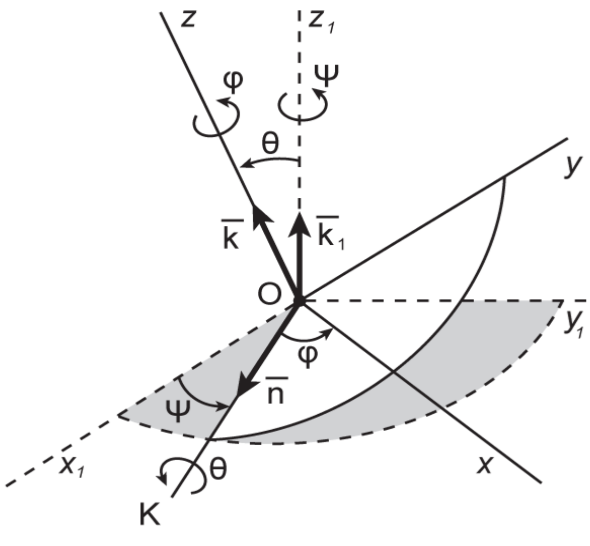

Рис. 1. Связь между неподвижной системой координат $Ox_1 y_1 z_1$ и подвижной системой координат Oxyz.

Таким образом, зная эйлеровы углы как функции времени

$$\psi = f_1(t),\ \theta = f_2(t),\ \varphi = f_3(t) \quad (1),$$

мы можем определить движение тела вокруг неподвижной точки O. Обозначим через $\overline{\omega}$ мгновенную угловую скорость вращения тела, тогда, если ввести единичные орты осей $Oz_1 - \overline{k}_1$, $OK - \overline{n}$, $Oz - \overline{k}$, мы получим, что

$$\overline{\omega} = \dot{\psi}\overline{k}_1 + \dot{\theta}\overline{n} + \dot{\varphi}\overline{k} \tag{2}$$

Проекции $\overline{\omega}$ на подвижные оси O, x, y, z будут иметь вид [1]

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \omega_y &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ \omega_z &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \tag{3}$$

2. Динамические уравнения Эйлера

Считая $Ox_1y_1y_1$ инерциальной системой отсчета, мы можем записать теорему об изменении кинетического момента механической системы в виде:

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \overline{M}_0(\overline{F}_k^{(e)}) \tag{4}$$

где $\overline{K}_0$ - главный момент количеств движения твердого тела относительно точки O. Справа стоит главный момент всех внешних сил относительно той же точки. Так как вектор $\overline{K}_0$ при сферическом движении изменяется как относительно неподвижной системы координат, так и относительно подвижной, мы можем воспользоваться формулой Бура для учета этого изменения

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \frac{d\tilde{\overline{K}}_0}{dt} + \overline{\omega} \times \overline{K}_0 \tag{5}$$

Спроецируем это равенство на подвижные оси $Oxyz$, как это сделал Л. Эйлер, с целью избежания производных от соответствующих моментов инерции, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} &= K_y\omega_z - K_z\omega_y + \sum_k M_x(\overline{F}_k^{(e)}), \\ \frac{dK_y}{dt} &= K_z\omega_x - K_x\omega_z + \sum_k M_y(\overline{F}_k^{(e)}), \\ \frac{dK_z}{dt} &= K_x\omega_y - K_y\omega_x + \sum_k M_z(\overline{F}_k^{(e)}). \end{aligned} \tag{6}$$

Взяв за подвижные оси $Oxyz$ главные оси инерции тела для точки O, получим:

$$\begin{aligned} J_z\frac{d\omega_x}{dt} &= \left(J_y - J_z\right)\omega_y\omega_z + \sum_k M_x(\overline{F}_k^{(e)}), \\ J_y\frac{d\omega_y}{dt} &= \left(J_z - J_x\right)\omega_z\omega_x + \sum_k M_y(\overline{F}_k^{(e)}), \\ J_z\frac{d\omega_z}{dt} &= \left(J_x - J_y\right)\omega_x\omega_y + \sum_k M_z(\overline{F}_k^{(e)}), \end{aligned} \tag{7}$$

где J_x, J_y, J_z - осевые моменты инерции центробежные моменты инерции равны 0, т.е. $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$, оси $Oxyz$ - главные оси инерции для точки O и тогда $K_x = J_x\omega_x$, $K_y = J_y\omega_y$, $K_z = J_z\omega_z$.

Для получения решения системы уравнений движения (7) их нужно рассматривать совместно с уравнениями (3).

Видно, что системы (7) и (3) – это системы нелинейных уравнений. Проинтегрировать эти уравнения и получить решение, а именно получить $\psi(t), \theta(t), \varphi(t)$ до С.В.Ковалевской удалось Л. Эйлеру и Лагранжу.

3. Движение тяжелого твердого тела

Пусть единственной заданной силой является сила тяжести

$$\overline{P} = -Mg\overline{k}_1 = -Mg\left(\overline{\tau}\gamma_1 + \overline{j}\gamma_2 + \overline{k}\gamma_3\right)$$

Обозначив x_c, y_c, z_c координаты центра тяжести C тела относительно подвижной системы $Oxyz$, мы имеем:

$$\begin{aligned} J_x\frac{d\omega_x}{dt} &= \left(J_y - J_z\right)\omega_y\omega_z + Mg\left(\gamma_2 z_c - \gamma_3 y_c\right), \\ J_y\frac{d\omega_y}{dt} &= \left(J_z - J_x\right)\omega_z\omega_x + Mg\left(\gamma_3 x_c - \gamma_1 z_c\right), \\ J_z\frac{d\omega_z}{dt} &= \left(J_x - J_y\right)\omega_x\omega_y + Mg\left(\gamma_1 y_c - \gamma_2 x_c\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Применим формулу Бура к вектору $\overline{k}_1$, орту оси Oz_1,

откуда получим:

$$\frac{d\overline{k}_1}{dt} = 0 = \frac{d\tilde{\overline{k}}_1}{dt} + \overline{\omega}\times\overline{k}_1$$

$$\frac{d\tilde{\overline{k}}_1}{dt} = \overline{k}_1\times\overline{\omega},$$

откуда получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{dt} &= \gamma_2\omega_z - \gamma_3\omega_y \\ \frac{d\gamma_2}{dt} &= \gamma_3\omega_x - \gamma_1\omega_z \\ \frac{d\gamma_3}{dt} &= \gamma_1\omega_y - \gamma_3\omega_x \end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим орт $\overline{k}_1$ оси Oz, обозначим через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ косинусы его углов с подвижными осями $Oxyz$, имеем

$$\overline{k}_1 = \overline{\tau}\gamma_1 + \overline{j}\gamma_2 + \overline{k}\gamma_3,$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$

причем

$$\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi,$$

$$\gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi,$$
$$\gamma_3 = \cos\theta.$$

4. Случай Эйлера-Пуансо

В 1758 г. Л. Эйлер рассмотрел случай, когда все заданные силы сводятся к равнодействующей, проходящей через неподвижную точку O.

Известные первые интегралы движения

I. Первый интеграл – геометрический

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ - косинусы орта $\bar{k}_1$, оси Oz_1 (рис. 1) его углов с подвижными осями $Oxyz$.

II. Второй первый интеграл

$$J_x\omega_x\gamma_1 + J_y\omega_y\gamma_2 + J_z\omega_z\gamma_3 = const.$$

Он имеет физическое значение, так если векторное равенство (4) спроецировать на вертикальную ось Oz_1, относительно которой момент силы тяжести равен нулю, то мы будем иметь сохранение главного момента количеств движения относительно оси Oz_1.

$$K_{z_1} = const.$$

III. Третий первый интеграл

$$\frac{1}{2}\left(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2\right) = -Mg\left(\gamma_1 x_c + \gamma_2 y_c + \gamma_3 z_c\right) = const$$

где x_c, y_c, z_c - координаты центра тяжести C твердого тела относительно подвижной системы $Oxyz$. Этот интеграл также имеет физическое значение. Он является интегралом живых сил.

Л. Эйлер получил четвертый первый интеграл в виде

$$J_x^2\omega_x^2 + J_y^2\omega_y^2 + J_z^2\omega_z^2 = const,$$

что означает в данном случае

$$\bar{K}_0 = const.$$

Задача свелась к квадратурам, причем в окончательном результате $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ выражаются посредством эллиптических функций времени. О.И. Сомов произвел все вычисления до конца и выразил углы Эйлера как функции времени более элементарным путем, чем до него сделал Якоби.

5. Случай Лагранжа-Пуассона

В 1788 г. Лагранж и независимо от него Пуассон в 1815 г. рассмотрел случай $J_x = J_y$, $x_c = y_c = 0$, где x_c, y_c - координаты центра тяжести тела, и, следовательно, центр тяжести тела лежит на оси Oz, называемой осью кинематической симметрии; в данном случае эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения вокруг оси Oz.

В 1834 г. Пуансо дал геометрическую интерпретацию для случая Эйлера – это эллипсоид инерции с уравнением

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 = const,$$

построенной для точки опоры и связанный с телом, катится по некоторой неподвижной плоскости; при этом некоторая кривая на эллипсоиде катится по кривой, лежащей в неподвижной плоскости. Если построить для точки опоры так называемый гироционный эллипсоид, характеризуемый уравнением

$$\frac{x^2}{J_x} + \frac{y^2}{J_y} + \frac{z^2}{J_z} = const$$

и его связать с телом, то он во все время движения проходит через две неподвижные точки, симметрично расположенные относительно неподвижной точки тела.

Четвертый интеграл, полученный Лагранжем $\omega_z = const$, т.е. тело вращается вокруг оси кинематической симметрии Oz с постоянной угловой скоростью. Задача сводится к квадратурам, которые были проведены до конца О.И. Сомовым; результат выражается в эллиптических функциях.

6. Случай С.В. Ковалевской

Рассмотрим подробно случай интегрируемости уравнений (7), проведенный С.В. Ковалевской.

Пусть $J_x = J_y = 2J_z$, $z_c = 0$.

Поворотом осей координат в плоскости Oxy можно добиться того, чтобы сделать $y_c = 0$.

Введем обозначение $C_0 = \dfrac{Mgx_c}{J_z}$ и запишем уравнение (8) в виде:

$$\begin{aligned} 2\frac{d\omega_x}{dt} &= \omega_y \omega_z, \\ 2\frac{d\omega_y}{dt} &= -\omega_z \omega_x + C_0 \gamma_3, \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= -C_0 \gamma_2. \end{aligned} \qquad (10)$$

Известных три первых интеграла С.В. Ковалевская записывает в виде:

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1 \\ 2(\gamma_1 \omega_x + \gamma_2 \omega_y) + \gamma_3 \omega_z &= 2l \\ 2(\omega_x^2 + \omega_y^2) + \omega_z^2 &= -2C_0 \gamma_1 + 6l_1, \end{aligned} \qquad (11)$$

где l и l_1 - произвольные постоянные.

Используя теорию функций комплексного переменного, ей удалось получить свой четвертый интеграл.

Так как $i = \sqrt{-1}$, то умножив второе уравнение (10) на i и складывая с первым, получим:

$$2\frac{d}{dt}(\omega_x + i\omega_y) = -i\omega_2(\omega_x + i\omega_y) + C_0 i \gamma_3 \qquad (12)$$

Затем, умножим второе из уравнений (9) на i и складывая с первым, она находит:

$$\frac{d}{dt}(\gamma_1 + i\gamma_2) = -i\omega_z(\gamma_1 + i\gamma_2) + i\gamma_3(\omega_x + i\omega_y) \tag{13}$$

Умножим уравнение (12) на $(\omega_x + i\omega_y)$ и прибавив уравнение (13), умноженное на $(-C_0)$, С.В. Ковалевская получает:

$$2(\omega_x + i\omega_y)\frac{d}{dt}(\omega_x + i\omega_y) - \frac{d}{dt}C_0(\gamma_1 + i\gamma_2) = -i\omega_z\left[(\omega_x + i\omega_y)^2 - C_0(\gamma_1 + i\gamma_2)\right],$$

и

$$\frac{dA}{dt} = -i\omega_z A,\; A = (\omega_x + i\omega_y)^2 - C_0(\gamma_1 + i\gamma_2);$$

отсюда вытекает

$$\frac{d}{dt}\ln A = -i\omega_z \tag{14}$$

Заменяя i на $-i$, она находит:

$$\frac{d}{dt}\ln \bar{A} = -i\omega_z$$

$$\bar{A} = (\omega_x - i\omega_y)^2 - C_0(\gamma_1 - i\gamma_2); \tag{15}$$

складывая (14) и (15), она находит:

$$\frac{d}{dt}\ln A + \frac{d}{dt}\ln \bar{A} = \frac{d}{dt}\ln(A\bar{A}) = 0,$$

откуда вытекает

$$A\bar{A} = \left[(\omega_x + i\omega_y)^2 - C_0(\gamma_1 + i\gamma_2)\right]\cdot\left[(\omega_x - i\omega_y)^2 - C_0(\gamma_1 - i\gamma_2)\right] = const \tag{16}$$

Записывая (16) в виде

$$\left[(\omega_x^2 - \omega_y^2 - C_0\gamma_1) + i(2\omega_x\omega_y - C_0\gamma_2)\right]\times\left[(\omega_x^2 - \omega_y^2 - C_0\gamma_1) - i(2\omega_x\omega_y - C_0\gamma_2)\right] = const$$

С.В. Ковалевская получила четвертый первый интеграл для своего случая

$$(\omega_x^2 - \omega_y^2 - C_0\gamma_1)^2 + (2\omega_x\omega_y - C_0\gamma_2)^2 = k^2 \tag{17}$$

Для приведения к квадратурам С.В. Ковалевская вводит вспомогательные переменные S_1 и S_2 как корни квадратного уравнения

$$4\omega_y^2\left(S - \frac{1}{2}l_1\right)^2 - 4\left(S - \frac{1}{2}l_1\right)\left\{(\omega_x^2 + \omega_y^2)^2 - 6l_1(\omega_x^2 + \omega_y^2) + 4lC_0\omega_x - C_0^2 + k^2\right\} -$$
$$-\left\{6l_1(\omega_x^2 + \omega_y^2)^2 + (C_0^2 - k^2)\omega_x^2 - 8lC_0\omega_x(\omega_x^2 + \omega_y^2) - 6l_1(C_0^2 - k^2) - 4C_0 l^2\right\} = 0,$$

пользуясь известными формулами для суммы и произведения корней, можно получить два соотношения, позволяющие выразить ω_x и ω_y в функции S_1 и S_2 и произвольных постоянных l, l_1 и k; пользуясь выражениями (11) и (17), можно выразить четыре остальные функции $\omega_z, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ через ω_x и ω_y. Таким образом С.В. Ковалевская выражает все шесть неизвестных функций через S_1 и S_2 и постоянные l, l_1 и k. Для нахождения S_1 и S_2 в зависимости от t она устанавливает две зависимости

$$\frac{dS_1}{\sqrt{R(S_1)}}+\frac{dS_2}{\sqrt{R(S_2)}}=0$$

и

$$\frac{S_1 dS_1}{\sqrt{R(S_1)}}+\frac{S_2 dS_2}{\sqrt{R(S_2)}}=dt \qquad (18)$$

где $R(S)$ - многочлен пятой степени.

$$R(S)=\left[k^2-(2S-l_1)^2\right]\left\{S^3-\frac{1}{4}S\left(k^2-C_0^2+2l_1^2\right)-\frac{l_1}{4}\left(k^2-C_0^2-l_1^2\right)+\frac{C_0^2 l^2}{4}\right\} \qquad (19)$$

При помощи квадратур:

$$F(S_1)+F(S_2)=C_1,$$
$$F_1(S_1)+F_1(S_2)=t+C_2 \qquad (20)$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные: $F(S)$ и $F_1(S)$ имеют следующие значения

$$F(S)=\int\frac{dS}{\sqrt{R(S)}},\quad F_1(S)=\int\frac{SdS}{\sqrt{R(S)}}.$$

Из уравнений (20) можно найти S_1 и S_2:

$$S_1=\varphi_1(t,C_1C_2)$$
$$S_2=\varphi_2(t,C_1C_2);$$

так как все шесть неизвестных функций $\omega_x,\omega_y,\omega_z,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ были выражены в зависимости от S_1 и S_2 и констант l,l_1 и k, то, пользуясь (20), их можно выразить в функции времени и пяти произвольных постоянных l,l_1,k,C_1 и C_2; после этого по формулам

$$\cos\theta=\gamma_3,\quad tg\,\psi=\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \qquad (21)$$

можно найти θ и φ; для нахождения угла ψ необходимо по формуле (22)

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{\omega_z-\dot{\varphi}}{\cos\theta},\quad \psi=\int\frac{\omega_z-\dot{\varphi}}{\cos\theta}dt \qquad (22)$$

еще одна квадратура, при которой войдет шестая произвольная постоянная. Таким образом будут выражены эйлеровы углы ψ,θ и φ в функции времени и шести произвольных постоянных т.е. найден общий интеграл уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки для случая С.В. Ковалевской.

Работы С.В. Ковалевской пробудили во всем мире большой интерес к задаче о вращении твердого тела вокруг точки и послужили мощным толчком к дальнейшим исследованиям, причем, как справедливо заметил Н.Е. Жуковский, «… новый случай в задаче о движении тяжелого твердого тела почти всецело исследован русскими учеными». Н.Е. Жуковский иллюстрирует различные случаи движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки тремя волчками (рис. 2).

И до сих пор не утихают споры о том, все ли Софья Васильевна сделала в решении этой задачи, есть ли еще какие-то решения. Причем, что интересно: весьма уважаемые и солидные ученые утверждают, что – нет, не все; что можно и дальше развивать решение задачи, давая все новые и новые предложения. Их оппоненты, тоже весьма уважаемые и солидные говорят – она сделала все, никакого развития больше не может быть, т.к. все последующее лишь частные случаи предыдущего. Возможно, кто-то из изучающих сейчас математику и теоретическую механику в МГТУ им. Баумана поставит наконец точку в этом более чем вековом споре… Однако, рассмотрев все три случая интегрируемости задачи о движении твердого тела с одной неподвижной точкой, а именно:

I. Случай Эйлера

Все заданные силы сводятся к равнодействующей, проходящей через неподвижную точку и $x_c = y_c = z_c = 0$.

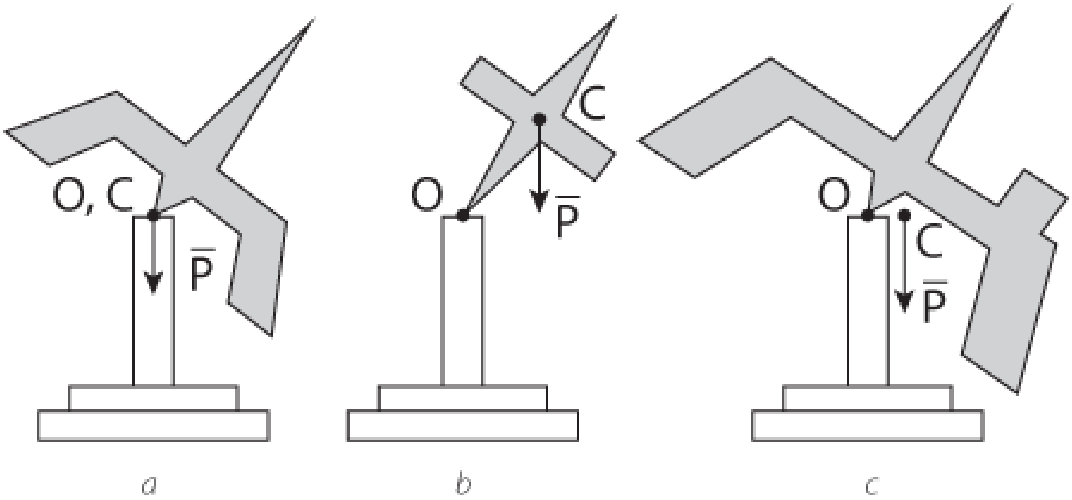

Рис. 2. а) случай Эйлера; b) случай Лагранжа; c) случай Ковалевской.

II. Случай Лагранжа

$$J_x = J_y, \quad x_c = y_c = 0,$$

т.е. центр тяжести лежит на оси Oz, называемой осью кинетической симметрии.

III. Случай С.В. Ковалевской

$$J_x = J_y = 2J_z, z_c = 0 .$$

С определенной долей уверенности и пользуясь наглядной иллюстрацией Н.Е. Жуковского и построением эллипсоида инерции для точки O, можно утверждать, что других случаев интегрируемости при произвольных начальных условиях нет, так как нет других положений неподвижной точки и положения центра масс.

Список литературы

1. Аппель П. Теоретическая механика. – Государственное издательство физико-математической литературы. М., 1960 г.
2. Воронцова Л. А. Софья Ковалевская: Жизнь замечательных людей. – Молодая гвардия, 1959.
3. Ковалевская С. В. Воспоминания и письма. —М.: Издательство АН СССР, Изд. 2-е, испр. — М., 1961.

4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. — Высшая школа, М., 1990 г.
5. Démonstration des formules de M. Jacobi relatives à la theorie de la rotation d'un corps solide. T 42 (1851)