НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

Формулы Фейнмана для эволюционных полугрупп

03, март 2014

DOI: 10.7463/0314.0701581

Бутко Я. А.

УДК 517.987.4

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

yanabutko@yandex.ru

1. Введение

В работе описывается подход к решению начальных и начально-краевых задач для эволюционных уравнений, основанный на представлении решений таких задач в виде пределов кратных интегралов при стремлении кратности к бесконечности. Такие представления называются формулами Фейнмана. Формулы Фейнмана позволяют проводить непосредственные вычисления решений эволюционных уравнений, пригодны для аппроксимации переходных вероятностей случайных процессов, могут быть использованы для компьютерного моделирования классической, квантовой и стохастической динамики. Настоящий подход был впервые предложен в работах [48, 49] и в настоящее время активно применяется для описания различных типов динамики в областях евклидовых пространств и римановых многообразий, в бесконечномерных линейных и нелинейных пространствах, в пространствах над полем p-адических чисел (см., например, работы [20, 50]).

Формулы Фейнмана позволяют также связать решения эволюционных уравнений с функциональными интегралами. Допредельные выражения в формулах Фейнмана дают аппроксимации функциональных интегралов либо по вероятностным мерам, порожденным некоторыми случайными процессами, либо по псевдомерам Фейнмана, сосредоточенным на траекториях в конфигурационном или в фазовом пространстве некоторой квантовой системы. Представления решений эволюционных уравнений с помощью функциональных интегралов по вероятностным мерам позволяют применить для описания и исследования рассматриваемой эволюции методы стохастического анализа, в частности, метод Монте-Карло. Функциональные интегралы по псевдомерам Фейнмана играют одну из центральных ролей в аппарате современной квантовой физики, представления решений эволюционных уравнений с помощью таких интегралов полезны при исследовании квазиклассических асимптотик, при построении рядов теории возмущений и т.д. Существует множество различных подходов к строгому определению интегралов Фейнмана, причем различные подходы приводят к различным классам интегрируемых функций. В одном из подходов, восходящем к самому Р. Фейнману [29], рассматривается интеграл Фейнмана по (бесконечному) пространству траекторий как предел интегралов по конечномерным пространствам при стремлении размерности пространств к бесконечности. Формализация такого подхода и приводит к формулам Фейнмана. При этом метод формул Фейнмана позволяет не только строго определить некоторые функциональные интегралы, но и исследовать такие вопросы теоретической физики, как различение процедуры квантования на языке интегралов Фейнмана [6, 13, 19]. Кроме того, метод формул Фейнмана позволяет установить связи между интегралами по псевдомерам Фейнмана и интегралами по вероятностным мерам. Эта связь помогает исследовать и вычислять интегралы Фейнмана. Более того, соответствующие таким интегралам формулы Фейнмана также доставляют средство для их вычисления [22, 39, 42].

В настоящей работе обобщаются и развиваются некоторые из результатов статей [5, 21, 23]. В частности, получены новые формулы Фейнмана для эволюционных полугрупп, порожденных мультипликативными возмущениями генераторов некоторых исходных полугрупп; при этом рассматриваются полугруппы на некоторых банаховых пространствах непрерывных функций, определенных на произвольном метрическом пространстве. Подход к построению формул Фейнмана для полугрупп с мультипликативно и/или аддитивно возмущенными генераторами иллюстрируется на примерах задачи Коши для уравнения Шредингера, аппроксимации переходных вероятностей некоторых марковских случайных процессов. Кроме того, описан подход к построению формул Фейнмана для решения начально-краевой задачи Коши — Дирихле для дифференциального уравнения параболического типа; получены формулы Фейнмана для решения задачи Коши и Коши — Дирихле для параболического уравнения второго порядка с неограниченными переменными коэффициентами. Обсуждаются функциональные интегралы по вероятностным мерам и псевдомерам Фейнмана, которые могут быть вычислены с помощью полученных формул Фейнмана.

2. Предварительные сведения, обозначения

В настоящей работе рассматриваются эволюционные уравнения вида $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,q) = Lf(t,q)$, где L — некоторый линейный оператор, действующий на функцию $f(t,\cdot)$ переменной $q \in Q$; Q — некоторое пространство, которое мы будем называть конфигурационным пространством системы, описываемой этим уравнением; $t \geq 0$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,q) = Lf(t,q), \\ f(0,q) = f_0(q). \end{cases} \tag{1}$$

Если L — ограниченный оператор на некотором банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$ функций переменной q и $f_0 \in X$, то решение задачи Коши представимо в виде $f(t,q) = (e^{tL}f_0)(q)$, где оператор e^{tL} определяется как сумма ряда $e^{tL} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L^n$, причем ряд сходится в равномерной операторной топологии. При этом, $\|e^{tL}\| \le e^{t\|L\|}$, то есть оператор e^{tL} снова является ограниченным для любого $t \ge 0$. Кроме того, как видно из определения e^{tL}, справедливы соотношения $e^{tL} \circ e^{sL} = e^{(t+s)L}$ и $e^{0L} = \mathrm{Id}$, где Id — тождественный оператор на X.

Как правило, однако, оператор L не является ограниченным. В этом случае приведенная выше схема решения задачи Коши (1) обобщается описанным ниже образом. Пусть символ $\mathcal{L}(X)$ обозначает пространство всех непрерывных линейных операторов на X с сильной топологией (последовательность операторов $T_n \in \mathcal{L}(X)$ сходится к оператору $T \in \mathcal{L}(X)$ в сильной топологии, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\|_X = 0$). Если $\mathrm{Dom}(L) \subset X$ — линейное подпространство и $L\colon \mathrm{Dom}(L) \to X$ — линейный оператор, то $\mathrm{Dom}(L)$ означает область определения L. Однопараметрическое семейство $(T_t)_{t\ge0}$ ограниченных линейных операторов $T_t\colon X \to X$ называется *сильно непрерывной полугруппой*, если $T_0 = \mathrm{Id}$, $T_{s+t} = T_s \circ T_t$ для всех $s,\, t \ge 0$ и $\lim\limits_{t\to0} \|T_t\varphi - \varphi\|_X = 0$ для всех $\varphi \in X$. Если $(T_t)_{t\ge0}$ — сильно непрерывная полугруппа на банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$, то *генератором* этой полугруппы называется оператор L, определенный по формуле

$$L\varphi := \lim_{t\to0} \frac{T_t\varphi - \varphi}{t}$$

с областью определения

$$\mathrm{Dom}(L) := \left\{ \varphi \in X\colon \lim_{t\to0} \frac{T_t\varphi - \varphi}{t} \text{ существует как сильный предел} \right\}.$$

Таким образом, если L — ограниченный оператор на X, то $T_t = e^{tL}$ — сильно непрерывная полугруппа на X с генератором L. И в случае, если генератор L — неограниченный оператор, будем иногда использовать обозначение e^{tL} для соответствующей полугруппы.

Теорема 1 (ср. [40], стр. 102**).** Пусть $(L, \mathrm{Dom}(L))$ — плотно определенный на банаховом пространстве X оператор с непустым резольвентным множеством Задача Коши (1) имеет единственное непрерывно дифференцируемое по $t \in [0, \infty)$ решение f для каждого начального условия $f_0 \in \mathrm{Dom}(L)$ тогда и только тогда, когда $(L, \mathrm{Dom}(L))$ является генератором некоторой сильно непрерывной полугруппы $(T_t)_{t\ge0}$ на X. При этом решение такой задачи Коши (1) для каждой $f_0 \in \mathrm{Dom}(L)$ представляется в виде $f(t,q) = T_t f_0(q)$.

Замечание 1. Резольвентным множеством оператора L называется множество $\rho(L)$ всех таких комплексных чисел λ, для которых оператор $R(\lambda, L) = (\lambda\,\mathrm{Id} - L)^{-1}$ является ограниченным оператором в X. Семейство $\{R(\lambda, L)\}_{\lambda\in\rho(L)}$ называется резольвентой оператора L.

Замечание 2. Для всех начальных условий $f_0 \in X$ функцию $f(t,q) = T_t f_0(q)$ по-прежнему будем называть решением задачи Коши (1) (в англоязычной литературе в этом случае используется термин «mild solution», см., например, [40]).

Замечание 3. Если $(T_t)_{t\ge0}$ — сильно непрерывная полугруппа на банаховом пространстве X, то существуют константы $a \ge 0$, $M \ge 1$, такие, что $\|T_t\| \le Me^{at}$ для всех $t \ge 0$ [40]. Кроме того, если сильно непрерывная полугруппа $(T_t)_{t\ge0}$ удовлетворяет неравеству $\|T_t\| \le Me^{at}$, то семейство $(S_t)_{t\ge 0}$, где $S_t = e^{-at}T_t$, также является сильно непрерывной полугруппой на X, причем $\|S_t\| \le M$ для всех $t \ge 0$. Введя на X новую норму $|||\cdot|||$, $|||f||| = \sup_{t\ge 0}\|S_t f\|$, получим, что $\|f\| \le |||f||| \le M\|f\|$, то есть нормы $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ эквивалентны. Причем по отношению к норме $|||\cdot|||$ полугруппа $(S_t)_{t\ge 0}$ является сжимающей полугруппой [27, 28], т.е. $\|S_t\| \le 1$ для всех $t \ge 0$.

Замечание 4. Если $(T_t)_{t\ge 0}$ — сильно непрерывная полугруппа на банаховом пространстве X с генератором $(L, \mathrm{Dom}(L))$, то справедливы также следующие утверждения ([28], предложение 1.5, следствие 1.6):

а) если $\varphi \in X$ и $t \ge 0$, то $\int_0^t T_s f ds \in \mathrm{Dom}(L)$ и $T_t f - f = L\int\limits_0^t T_s f ds$;

б) если $f \in \mathrm{Dom}(L)$ и $t \ge 0$, то $T_t f \in \mathrm{Dom}(L)$ и $\dfrac{d}{dt}T_t f = LT_t f = T_t L f$;

в) если $f \in \mathrm{Dom}(L)$ и $t \ge 0$, то $T_t f - f = \int\limits_0^t LT_s f ds = \int\limits_0^t T_s L f ds$;

г) генератор $(L, \mathrm{Dom}(L))$ — замкнутый оператор, множество $\mathrm{Dom}(L)$ всюду плотно в X.

Итак, решение задачи Коши (1) равносильно построению полугруппы $(T_t)_{t\ge 0}$ на X с заданным генератором L. Как правило, полугруппу $(T_t)_{t\ge 0}$ не удается получить в явном виде, но удается различными методами ее аппроксимировать. В настоящей работе используется метод приближения, основанный на теореме Чернова [24, 48]).

Теорема 2 (Чернова)**.** Пусть X — банахово пространство, $F\colon [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ — (сильно) непрерывное отображение, такое, что $F(0) = \mathrm{Id}$ и $\|F(t)\| \le e^{at}$ для некоторой константы $a \in$ $\in [0, \infty)$ и всех $t \ge 0$. Пусть D — линейное подпространство $\mathrm{Dom}(F'(0))$, такое, что сужение оператора $F'(0)$ на D замыкаемо. Пусть $(L, \mathrm{Dom}(L))$ — соответствующее замыкание. Если $(L, \mathrm{Dom}(L))$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $(T_t)_{t\ge 0}$, то для всех $t_0 > 0$ последовательность операторов $(F(t/n))^n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к $(T_t)_{t\ge 0}$ при $n \to \infty$ в сильной топологии равномерно по $t \in [0, t_0]$, т.е. $T_t = \lim\limits_{n\to\infty}(F(t/n))^n$.

Заметим, что производная в нуле функции $F\colon [0,\varepsilon) \to \mathcal{L}(X)$, $\varepsilon > 0$, — линейное отображение $F'(0)\colon \mathrm{Dom}(F'(0)) \to X$, такое, что

$$F'(0)g := \lim_{t\searrow 0}\frac{F(t)g - F(0)g}{t},$$

где $\mathrm{Dom}(F'(0))$ — векторное пространство всех тех элементов $g \in X$, для которых этот предел существует (в сильной топологии).

Замечание 5. Условие $\|F(t)\| \le e^{at}$, $\forall\, t \ge 0$, в теореме 2 можно заменить условием $\|F^m(t)\| \le Me^{amt}$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$ и $t \ge 0$ [27].

Замечание 6. Комбинируя условия теоремы 2 с условиями теоремы Хилле — Иосиды, можно получить версию теоремы Чернова, утверждающую существование искомой полугруппы [27].

Замечание 7. Существуют различные обобщения теоремы 2. В частности, в книге [28] теорема Чернова обобщена на случай многозначных генераторов (следствие 6.6), в работе [36] теорема Чернова обобщена на случай полугрупп в банаховом пространтсве, непрерывных в более слабом смысле (в смысле локально выпуклой топологии на X более слабой, чем топология, порожденная нормой), в работе [17] теорема Чернова обобщена на случай полугрупп нелинейных сжимающих отображений на замкнутых выпуклых подмножествах гильбертова пространства.

Семейство операторов $(F(t))_{t\geq 0}$ называется *эквивалентным по Чернову* полугруппе $(T_t)_{t\geq 0}$ (будем обозначать это так: $F(t) \sim T_t$), если это семейство удовлетворяет всем требованиям теоремы Чернова по отношению к этой полугруппе, то есть по теореме Чернова 2 в пространстве $\mathcal{L}(X)$ локально равномерно по t выполняется равенство

$$T_t = \lim_{n\to\infty}(F(t/n))^n. \tag{2}$$

Это равенство мы будем называть *формулой Фейнмана*. Мы используем такую терминологию, так как во многих случаях операторы $F(t)$ оказываются интегральными операторами, то есть в правой части формулы Фейнмана стоит предел кратных интегралов при возрастании кратности к бесконечности. Именно Ричард Фейнман (см. [29]) впервые рассмотрел конструкцию функционального интеграла как предела обыкновенных многократных интегралов по пространствам неограниченно возрастающей размерности. Любое представление решения начальной (или начально–краевой) задачи для эволюционного уравнения (или, эквивалентно, представление полугруппы, разрешающей данную задачу) в виде предела кратных интегралов при возрастании кратности к бесконечности мы будем называть формулой Фейнмана.

Пределы в формулах Фейнмана совпадают с некоторыми функциональными интегралами по вероятностным мерам или по фейнмановским псевдомерам на множестве траекторий некоторой физической системы. Представление решения начальной (или начально–краевой) задачи для эволюционного уравнения (или, эквивалентно, представление поугруппы, разрешающей данную задачу) в виде функционального интеграла обычно называется *формулой Фейнмана — Каца*. Таким образом, кратные интегралы в формуле Фейнмана для некоторой задачи аппроксимируют функциональный интеграл в формуле Фейнмана — Каца, представляющей решение этой же задачи. Такие аппроксимации во многих случаях представляют собой кратные интегралы только от элементарных функций и, следовательно, могут быть использованы для непосредственных вычислений и моделирования рассматриваемой динамики.

Пример 1. Пусть операторы L_1, L_2, L_1+L_2 являются генераторами сильно непрерывных полугрупп e^{tL_1}, e^{tL_2} и $e^{t(L_1+L_2)}$ на некотором банаховом пространстве X соответственно, причем операторы L_1 и L_2 не коммутируют. Тогда $e^{tL_1}\circ e^{tL_2} \neq e^{t(L_1+L_2)} \neq e^{tL_2}\circ e^{tL_1}$. Тем не менее, можно показать, что

$$e^{tL_1}\circ e^{tL_2} \sim e^{t(L_1+L_2)}, \qquad e^{tL_2}\circ e^{tL_1} \sim e^{t(L_1+L_2)},$$

и, значит, из теоремы Чернова следует равенство

$$e^{t(L_1+L_2)} = \lim_{n\to\infty}\left[e^{\frac{t}{n}L_1}\circ e^{\frac{t}{n}L_2}\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left[e^{\frac{t}{n}L_2}\circ e^{\frac{t}{n}L_1}\right]^n.$$

Последняя формула широко известна как формула Троттера.

Пример 2. Следствием теоремы Чернова является также формула Поста — Виддера [27, 40], обобщающая известную теорему анализа о втором замечательном пределе:

$$e^{tL} = \lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{Id} - \frac{t}{n}L\right)^{-n} \equiv \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t}, L\right)\right]^{n},$$

здесь $R(\lambda, L)$ — резольвента оператора L.

З а м е ч а н и е 8. Конечно же, для одной и той же полугруппы e^{tL} существует множество эквивалентных ей по Чернову семейств операторов. Например, если $F(t) \sim e^{tL}$, то для любого ограниченного оператора B имеем также $\left[F(t) + t^2B\right] \sim e^{tL}$. Таким образом, с одной стороны, в множестве семейств, эквивалентных по Чернову искомой полугруппе, естественно выбирать оптимальные для проведения непосредственных вычислений. С другой стороны, различные семейства позволяют установить связь между функциональными интегралами по разным мерам и псевдомерам фейнмановского типа.

Равенство (2) будем называть *лагранжевой формулой Фейнмана*, если $F(t)$, $t > 0$, — интегральные операторы, ядра которых представляются элементарными функциями; если $F(t)$ — псевдо-дифференциальные операторы, то говорим о *гамильтоновой формуле Фейнмана* (см., например, работы [21, 22, 23]). Такая терминология связана с тем, что лагранжевы формулы Фейнмана дают аппроксимации для функциональных интегралов по множеству траекторий в конфигурационном пространстве системы (чья эволюция описывается полугруппой $(T_t)_{t\geq 0}$), в то время как гамильтоновы формулы Фейнмана соответствуют интегралам Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве некоторой эволюционной системы. Конечно же, существуют и другие типы формул Фейнмана, в частности, формулы Фейнмана, соответствующие функциональным интегралам по траекториям в пространстве импульсов.

В дальнейшем используются следующие обозначения:

$x \cdot y$ — скалярное произведение для $x, y \in \mathbb{R}^d$;

$|x|$ — норма вектора $x \in \mathbb{R}^d$;

$\overline{G} = G \cup \partial G$ — замыкание области $G \subset \mathbb{R}^d$;

$C^m(\mathbb{R}^d)$ — пространство m раз непрерывно дифференцируемых функций;

$C^{0,\lambda}(\mathbb{R}^d)$ — пространство функций, удовлетворяющих условию Гельдера с параметром $\lambda \in (0, 1]$;

$C_b(\mathbb{R}^d)$ — пространство ограниченных непрерывных функций;

$C_b^m(\mathbb{R}^d)$ — пространство функций $f \in C^m(\mathbb{R}^d)$, удовлетворяющих условию $\partial^\alpha f \in C_b(\mathbb{R}^d)$, $|\alpha| \leq m$;

$C^{m,\lambda}(\mathbb{R}^d)$ — пространство функций $f \in C^m(\mathbb{R}^d)$, удовлетворяющих условию $\partial^\alpha f \in C^{0,\lambda}(\mathbb{R}^d)$, $|\alpha| = m\}$;

$C_b^{m,\lambda}(\mathbb{R}^d) = C_b^m(\mathbb{R}^d) \cap C^{m,\lambda}(\mathbb{R}^d)$;

$C_c(\mathbb{R}^d)$ — пространство непрерывных на $\mathbb{R}^d$ функций с компактным носителем;

$C_c^m(\mathbb{R}^d) = C_c(\mathbb{R}^d) \cap C^m(\mathbb{R}^d)$;

$C_c^{m,\lambda}(\mathbb{R}^d) = C_c(\mathbb{R}^d) \cap C^{m,\lambda}(\mathbb{R}^d)$;

$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ — пространство бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^d$ функций с компактным носителем;

$C_\infty(\mathbb{R}^d)$ — пространство всех непрерывных на $\mathbb{R}^d$ функций, убывающих на бесконечности к нулю (это банахово пространство с нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|$).

3. Формулы Фейнмана для полугрупп, порожденных аддитивными возмущениями генераторов

Теорема 3. Пусть X — банахово просранство с нормой $\|\cdot\|_X$. Пусть $(T_k(t))_{t\geq 0}$, $k = 1, \ldots, m$, — сильно непрерывные полугруппы на X с генераторами L_k соответственно. Предположим, что оператор $L = L_1 + \cdots + L_m$ с областью определения $\mathrm{Dom}(L) = \bigcap\limits_{k=1}^{m} \mathrm{Dom}(L_k)$ замыкаем и это замыкание является генератором сильно непрерывной полугруппы $(T(t))_{t\geq 0}$ на X. Пусть $(F_k(t))_{t\geq 0}$, $k = 1, \ldots, m$, — семейства операторов на X, эквивалентные по Чернову полугруппам $(T_k(t))_{t\geq 0}$ соответственно, т.е. для каждого $k \in \{1, \ldots, m\}$ выполнены соотношения $F_k(0) = \mathrm{Id}$, $\|F_k(t)\| \leq e^{a_k t}$ для некоторого $a_k > 0$ и существует множество $D_k \subset \mathrm{Dom}(L_k)$, являющееся существенной областью определения оператора L_k, такое, что $\lim\limits_{t\to 0}\left\| \frac{F_k(t)\varphi - \varphi}{t} - L_k\varphi \right\|_X = 0$ при всех $\varphi \in D_k$. Если существует множество $D \subset D_1 \cap \ldots \cap D_m$, являющееся существенной областью определения для оператора L, то семейство $(F(t))_{t\geq 0}$, где $F(t) = F_1(t) \circ \cdots \circ F_m(t)$, эквивалентно по Чернову полугруппе $(T(t))_{t\geq 0}$ и, следовательно, формула Фейнмана

$$T_t = \lim_{n\to\infty} \left[F(t/n)\right]^n,$$

где предел понимается как предел в сильной операторной топологии, справедлива локально равномерно относительно $t \geq 0$.

Доказательство. Очевидно, что семейство $(F(t))_{t\geq 0}$ сильно непрерывно, $F(0) = \mathrm{Id}$ и

$$\|F(t)\| \leq \|F_1(t)\| \cdot \ldots \cdot \|F_m(t)\| \leq e^{(a_1+\cdots+a_m)t}.$$

Пусть множество $D \subset D_1 \cap \ldots \cap D_m$ является существенной областью определения для оператора L. Тогда для любого $\varphi \in D$ имеем

$$\lim_{t\to 0}\left\| \frac{F(t)\varphi - \varphi}{t} - L\varphi \right\|_X = \lim_{t\to 0}\left\| \frac{F_1(t)\circ\cdots\circ F_m(t)\varphi - \varphi}{t} - L_1\varphi - \cdots - L_m\varphi \right\|_X =$$
$$= \lim_{t\to 0}\Bigg\| F_1(t)\circ\cdots\circ F_{m-1}(t)\circ \frac{F_m(t)\varphi - \varphi}{t} - L_m\varphi + \frac{F_1(t)\circ\cdots\circ F_{m-1}(t)\varphi - \varphi}{t} -$$
$$- L_1\varphi - \cdots - L_{m-1}\varphi \Bigg\|_X \leq \lim_{t\to 0}\left\| \frac{F_1(t)\circ\cdots\circ F_{m-1}(t)\varphi - \varphi}{t} - L_1\varphi - \cdots - L_{m-1}\varphi \right\|_X \leq$$
$$\leq \ldots \leq \lim_{t\to 0}\left\| \frac{F_1(t)\varphi - \varphi}{t} - L_1\varphi \right\|_X = 0.$$

Таким образом, все требования теоремы Чернова выполнены и $F(t) \sim T_t$. Теорема доказана.

Отметим, что если некоторые из полугрупп $(T_k(t))_{t\geq 0}$ известны явно и если $\|T_k(t)\| \leq e^{a_k t}$ для некоторого $a_k \geq 0$, то в формулах Фейнмана можно взять $F_k(t) \equiv T_k(t)$.

Пример 3 (возмущения шредингеровского типа)**.** Пусть $X = C_\infty(\mathbb{R}^d)$; $(T_t)_{t\geq 0}$ — сильно непрерывная полугруппа с генератором $(L, \mathrm{Dom}(L))$; $(F(t))_{t\geq 0}$ — семейство операторов, эквивалентное по Чернову полугруппе $(T_t)_{t\geq 0}$; $c(\cdot)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — непрерывная ограниченная сверху функция. Тогда функция $e^{tc(\cdot)}$ является ограниченной при всех $t \geq 0$. При этом оператор c умножения на функцию $c(\cdot)$ плотно определен в пространстве X (так как корректно определен, например, на множестве непрерывных финитных функций) и порождает сильно непрерывную полугруппу e^{tc} операторов умножения на функцию $e^{tc(\cdot)}$. Рассмотрим оператор $L + c$, где $\mathrm{Dom}(L + c) = \mathrm{Dom}(L) \cap \mathrm{Dom}(c)$ и $(L + c)\varphi(q) = L\varphi(q) + c(q)\varphi(q)$ для всех $\varphi \in \mathrm{Dom}(L + c)$. Предположим, что этот оператор порождает сильно непрерывную полугруппу $(T_t^{L+c})_{t\geq 0}$ на $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ (такое предположение справедливо, например, если функция $c(\cdot)$ является ограниченной или если оператор умножения на функцию $c(\cdot)$ является L-ограниченным оператором). Тогда по теореме 3 справедлива формула Фейнмана

$$T_t^{L+c} = \lim_{n\to\infty} \left[e^{\frac{t}{n}c} \circ F(t/n)\right]^n.$$

В частности,

$$T_t^{L+c} = \lim_{n\to\infty} \left[e^{\frac{t}{n}c} \circ T_{t/n}\right]^n,$$

если $\|T_t\| \leq e^{at}$ для некоторого $a \geq 0$. Аналогичным образом показывается справедливость этих формул Фейнмана и в других банаховых пространствах.

Пример 4 (возмущения градиентного типа)**.** Пусть $X = C_\infty(\mathbb{R}^d)$; $b(\cdot)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ — ограниченное непрерывное векторное поле; $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial q_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial q_d}\right)$ — оператор Гамильтона. Рассмотрим оператор $b\nabla$, где $b\nabla\varphi(q) = b(q)\cdot\nabla\varphi(q)$ для всех $\varphi \in D(b\nabla)$, и семейство $(S(t))_{t\geq 0}$ операторов на $C_\infty(\mathbb{R}^d)$, определенных по формуле

$$S(t)\varphi(q) = \varphi(q + tb(q)). \tag{3}$$

Отметим, что в случае постоянного векторного поля $b(\cdot) \equiv b \in \mathbb{R}^d$ семейство $(S(t))_{t\geq 0}$ совпадает с полугруппой сдвигов $(e^{tb\nabla})_{t\geq 0}$. Если векторное поле $b(\cdot)$ уже не является постоянным, то семейство $(S(t))_{t\geq 0}$ не является полугруппой, но эквивалентно по Чернову полугруппе $e^{tb\nabla}$, порожденной оператором $b\nabla$. Действительно, $S(0) = \mathrm{Id}$, $\|S(t)\| = 1$ и для всех $\varphi \in D(b\nabla) \cap C^2(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{S(t)\varphi - \varphi}{t} - b\nabla\varphi\right\|_\infty = \lim_{t\to 0}\sup_{q\in\mathbb{R}^d}\left|\frac{\varphi(q + tb(q)) - \varphi(q)}{t} - b(q)\cdot\nabla\varphi(q)\right| \leq$$
$$\leq \lim_{t\to 0} t\left(\sup_{q\in\mathbb{R}^d,\, s\in[0,t]}\left|b(q)\cdot \mathrm{Hess}\,\varphi(q + sb(q))\,b(q)\right|\right) = 0,$$

где Hess φ — гессиан φ. Таким образом, $\frac{d}{dt}S(t)\Big|_{t=0}\varphi = b\nabla\varphi$ для любой $\varphi \in D(b\nabla)\cap C^2(\mathbb{R}^d)$. Отметим, что множество $\varphi \in D(b\nabla)\cap C^2(\mathbb{R}^d)$ является существенной областью определения оператора $b\nabla$.

Пусть теперь $(T_t)_{t\geq 0}$ — сильно непрерывная полугруппа на $X = C_\infty(\mathbb{R}^d)$ с генератором $(L, \mathrm{Dom}(L))$ и семейство $(F(t))_{t\geq 0}$ эквивалентно по Чернову полугруппе $(T_t)_{t\geq 0}$. Рассмотрим оператор $L+b\nabla$, определенный соотношением $(L+b\nabla)\varphi(q) = L\varphi(q)+b(q)\cdot\nabla\varphi(q)$ для всех $\varphi \in \mathrm{Dom}(L+b\nabla) = \mathrm{Dom}(L)\cap\mathrm{Dom}(b\nabla)$. Предположим, что оператор $L+b\nabla$ порождает сильно непрерывную полугруппу $(T_t^{L+b\nabla})_{t\geq 0}$ на $C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Отметим, что предположение выполняется, например, если оператор $b\nabla$ является L-ограниченным, т.е. $\mathrm{Dom}(L) \subset \mathrm{Dom}(b\nabla)$ и для всех $\varphi \in \mathrm{Dom}(L)$ и некоторых $\lambda \in [0, 1)$, $\gamma \geq 0$ выполняется оценка

$$\|b\nabla\varphi\|_X \leq \lambda\|L\varphi\|_X + \gamma\|\varphi\|_X$$

В частности, $b\nabla$ является L-ограниченным для $L = -(-\Delta)^{\alpha/2}$, $\alpha \in (1, 2]$. По теореме 3 семейство $(S(t)\circ F(t))_{t\geq 0}$ эквивалентно по Чернову полугруппе $(T_t^{L+b\nabla})_{t\geq 0}$ и справедлива формула Фейнмана

$$T_t^{L+b\nabla} = \lim_{n\to\infty}\big[S(t/n)\circ F(t/n)\big]^n.$$

Пример 5 (лагранжева формула Фейнмана для возмущений полугруппы, порожденной лапласианом**).** Пусть $X = C_\infty(\mathbb{R}^d)$; $b(\cdot)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ — ограниченное непрерывное векторное поле; $c(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}^d)$. Рассмотрим оператор Лапласа $L = \frac{1}{2}\Delta$, $\mathrm{Dom}(L) = C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Замыкание этого оператора порождает полугруппу $(T_t)_{t\geq 0}$ [45, теорема 31.5], разрешающую задачу Коши для уравнения теплопроводности $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta f$, где

$$T_t\varphi(q) = (2\pi t)^{(-d/2)}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|q-y|^2}{2t}}\varphi(y)\,dy.$$

Тогда для полугруппы $(T_t^L)_{t\geq 0}$, порожденной оператором $L := \frac{1}{2}\Delta + b\nabla + c$, по теореме 3 справедлива формула Фейнмана

$$T_t^L\varphi(q_0) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\pi t}{n}\right)^{\left(-\frac{dn}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\cdots\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{t}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}c(q_{k-1})} e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{|q_{k-1}+b(q_{k-1})t/n-q_k|^2}{2t/n}}\varphi(q_n)\,dq_1\ldots dq_n.$$

Так как $|x+b(x)t-y|^2 = |x-y|^2 + 2tb(x)\cdot(x-y) + t^2|b(x)|^2$, то

$$T_t^L\varphi(q_0) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\cdots\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{t}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}c(q_{k-1})} e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}b(q_{k-1})\cdot(q_{k-1}-q_k)}\times$$
$$\times\, e^{-\frac{t}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}|b(q_{k-1})|^2} p_{t/n}^{BM}(q_0-q_1)\ldots p_{t/n}^{BM}(q_{n-1}-q_n)\varphi(q_n)\,dq_1\ldots dq_n,$$

где $p_t^{BM}(x) = (2\pi t)^{(-d/2)} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{2t}\right\}$ — переходная плотность вероятности броуновского движения. Можно показать, что предел в правой части последней формулы совпадает с функциональным интегралом

$$\mathbb{E}^{q_0}\left[e^{\int\limits_0^t c(\xi_s)ds} e^{\int\limits_0^t b(\xi_s)\cdot d\xi_s} e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^t |b(\xi_s)|^2 ds} f(\xi_t)\right] \tag{4}$$

по мере Винера, сосредоточенной на траекториях, начинающихся в точке q_0. Таким образом, аппарат формул Фейнмана дает еще один способ доказательства формулы Фейнмана — Каца (4) и формулы Гирсанова. Кроме того, с помощью формул Фейнмана удается обобщить их на случай переменного коэффициента диффузии. Этому посвящен параграф 5 настоящей работы.

Пример 6 (лагранжева формула Фейнмана для динамики квантовой частицы в потенциальном и магнитном полях**).** Пусть $X = L_2(\mathbb{R}^d)$. Рассмотрим оператор $L = \frac{i}{2}\Delta$, $\mathrm{Dom}(L) = C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Замыкание этого оператора порождает (по теореме IX.27 из [43] и теореме Стоуна) (полу)группу $(T_t \equiv e^{\frac{it}{2}\Delta})_{t\geq 0}$, разрешающую задачу Коши для уравнения Шредингера $i\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Delta f$:

$$T_t\varphi(q) = (2\pi it)^{(-d/2)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i\frac{|q-y|^2}{2t}} \varphi(y)\,dy,$$

где правая часть понимается в регуляризованном смысле [43, формула IX.31]. Пусть $b \in \mathbb{R}^d$, $c(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}^d)$. Тогда замыкание определенного на $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ оператора $L = \frac{i}{2}\Delta - b\nabla - ic$ порождает (по теореме X.22 из [43] и теореме Стоуна) сильно непрерывную (полу)группу $(T_t^L)_{t\geq 0}$, для которой по теореме 3 справедлива формула Фейнмана

$$T_t^L\varphi(q_0) = \lim_{n\to\infty}\left[e^{-i\frac{t}{n}c} \circ e^{-\frac{t}{n}b\nabla} \circ T_{t/n}\right]^n \varphi(q_0) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}(2\pi it)^{(-dn/2)} \int\limits_{\mathbb{R}^d}\dots\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i\frac{t}{n}\sum\limits_{k=1}^n c(q_{k-1})} e^{i\sum\limits_{k=1}^n \frac{|q_k-q_{k-1}+\frac{t}{n}b|^2}{2t/n}} \varphi(q_n)\,dq_1\dots dq_n,$$

причем интегралы снова понимаются в регуляризованном смысле. Отметим, что выражение в последней строке может быть интерпретировано как интеграл Фейнмана по траекториям в конфигурационном пространстве системы, квантование которой описывается гамильтонианом $H = -\frac{1}{2}\Delta - ib\nabla + c$:

$$T_t^L\varphi(q_0) \equiv e^{-itH}\varphi(q_0) = \int e^{-i\int\limits_0^t [c(\xi(s)) - \frac{1}{2}|b|^2]ds} e^{i\int\limits_0^t b\cdot d\xi(s)} \varphi(\xi(t))\Phi^{q_0}(d\xi),$$

причем интеграл берется по псевдомере Фейнмана Φ^{q_0}, сосредоточенной на траекториях, начинающихся в точке q_0, и эвристический «стохастический интеграл» $\int\limits_0^t b\cdot d\xi(s)$ требует отдельного определения (ср. [15, теорема 5.4], [12]). Аналогичная формула Фейнмана остается справедливой и для более широкого класса магнитных и потенциальным полей $b(\cdot)$ и $c(\cdot)$ (ср. [12, 42]).

4. Формулы Фейнмана для полугрупп, порожденных мультипликативными возмущениями генераторов

Пусть Q — метрическое пространство; $X = C_b(Q)$ — банахово пространство ограниченных непрерывных (числовых) функций на Q с нормой $\|f\|_\infty = \sup_{q\in Q} |f(q)|$. (В качестве Q можно взять, например, метрический граф. Мы не предполагаем локальной компактности Q, так что в качестве Q можно рассматривать также и гильбертово пространство.) Пусть $(T_t)_{t\geq 0}$ — сильно непрерывная полугруппа на X с генератором $(L, \mathrm{Dom}(L))$; функция $a(\cdot) : Q \to [c_1, c_2] \subset (0, \infty)$ непрерывна на Q. Тогда $aX \subset X$. При этом оператор $\widetilde{L}$, определенный по формуле $\widetilde{L}\varphi(q) = a(q)(L\varphi)(q)$, $\mathrm{Dom}(\widetilde{L}) = \mathrm{Dom}(L)$, также является генератором сильно непрерывной полугруппы [38, теорема 1], которую мы обозначим $(\widetilde{T}_t)_{t\geq 0}$. Оператор $\widetilde{L}$ будем называть *мультипликативным возмущением* генератора L, а полугруппу $(\widetilde{T}_t)_{t\geq 0}$ — *полугруппой с мультипликативно возмущенным* функцией $a(\cdot)$ *генератором*.

Теорема 4. Пусть $(F(t))_{t\geq 0}$ — сильно непрерывное семейство ограниченных операторов на банаховом пространстве X, эквивалентное по Чернову полугруппе $(T_t)_{t\geq 0}$. Тогда семейство операторов $(\widetilde{F}(t))_{t\geq 0}$, определенное по формуле

$$\widetilde{F}(t)\varphi(q) = (F(a(q)t)\varphi)(q) \tag{5}$$

и действующее в пространстве X, эквивалентно по Чернову полугруппе $(\widetilde{T}_t)_{t\geq 0}$ с мультипликативно возмущенным функцией $a(\cdot)$ генератором, т.е. локально равномерно по $t \geq 0$ в $\mathcal{L}(X)$ справедлива формула Фейнмана

$$\widetilde{T}_t = \lim_{n\to\infty} \left[\widetilde{F}(t/n)\right]^n.$$

Доказательство. Если $(F(t))_{t\geq 0}$ — сильно непрерывное семейство $(F(t))_{t\geq 0}$ ограниченных операторов на банаховом пространстве X, эквивалентное по Чернову полугруппе $(T_t)_{t\geq 0}$, то $\|F(t)\| \leq e^{kt}$ для некоторого $k > 0$ и всех $t \geq 0$, а также $F'(0)\varphi = L\varphi$ для всех $\varphi \in D$, где D — некоторая существенная область определения генератора L. Покажем сначала, что это семейство действует из X в X. Пусть $\varphi \in X = C_b(Q)$; проверим, что для каждого $t \geq 0$ функция $\widetilde{F}(t)\varphi$ является ограниченной и непрерывной на Q функцией. Обозначим расстояние в Q между точками q и q_0 через $\rho(q, q_0)$. Фиксируем $t \geq 0$ и $q_0 \in Q$. Тогда

$$\lim_{\rho(q,q_0)\to 0} |\widetilde{F}(t)\varphi(q) - \widetilde{F}(t)\varphi(q_0)| = \lim_{\rho(q,q_0)\to 0} |F(a(q)t)\varphi(q) - F(a(q_0)t)\varphi(q_0)| \leq$$

$$\leq \lim_{\rho(q,q_0)\to 0} \Big(|F(a(q)t)\varphi(q) - F(a(q_0)t)\varphi(q)| + |F(a(q_0)t)\varphi(q) - F(a(q_0)t)\varphi(q_0)|\Big) \leq$$

$$\leq \lim_{\rho(q,q_0)\to 0} \|[F(a(q)t) - F(a(q_0)t)]\varphi\|_\infty + \lim_{\rho(q,q_0)\to 0} |F(a(q_0)t)\varphi(q) - F(a(q_0)t)\varphi(q_0)|.$$

Второе слагаемое в последней строке равно нулю, так как для каждого $q_0 \in Q$ оператор $F(a(q_0)t)$ действует из X в X, т.е. $F(a(q_0)t)\varphi$ является непрерывной на Q (а значит и в точке q_0) функцией. Кроме того,

$$\lim_{\rho(q,q_0)\to 0} \big\|[F(a(q)t) - F(a(q_0)t)]\varphi\big\|_\infty = \lim_{\tau\to\tau_0=a(q_0)t} \big\|F(\tau)\varphi - F(\tau_0)\varphi\big\|_\infty = 0$$

в силу сильной непрерывности отображения $t \to F(t)$. Таким образом, функция $\widetilde{F}(t)\varphi$ является непрерывной. При этом,

$$\|\widetilde{F}(t)\varphi\|_\infty = \sup_{q\in Q} |\widetilde{F}(t)\varphi(q)| = \sup_{q\in Q} |F(a(q)t)\varphi(q)| \le \sup_{q,q_0\in Q} |F(a(q_0)t)\varphi(q)| \le$$

$$\le \sup_{q_0\in Q} \|F(a(q_0)t)\varphi\|_\infty \le \sup_{q_0\in Q} \|F(a(q_0)t)\| \cdot \|\varphi\|_\infty = e^{c_2kt}\|\varphi\|_\infty < \infty.$$

Таким образом, функция $\widetilde{F}(t)\varphi$ является также ограниченной, а значит, принадлежит пространству X. Кроме того, мы показали, что для любого $t \ge 0$ справедлива оценка $\|\widetilde{F}(t)\| \le \le e^{c_2kt}$. Заметим, что условие $\widetilde{F}(0) = \mathrm{Id}$ также выполнено.

Проверим сильную непрерывность семейства $(\widetilde{F}(t))_{t\ge 0}$. Имеем:

$$\lim_{t\to t_0} \big\|\widetilde{F}(t)\varphi - \widetilde{F}(t_0)\varphi\big\|_\infty = \lim_{t\to t_0} \sup_{q\in Q} \big|F(a(q)t)\varphi(q) - F(a(q)t_0)\varphi(q)\big| \le$$

$$\le \lim_{t\to t_0} \sup_{q\in Q} \big\|F(a(q)t)\varphi - F(a(q)t_0)\varphi\big\|_\infty = \lim_{t\to t_0} \sup_{c\in[c_1,c_2]} \big\|F(ct)\varphi - F(ct_0)\varphi\big\|_\infty.$$

В силу сильной непрерывности семейства $(F(t))_{t\ge 0}$ на $[0,\infty)$ для любого фиксированного $T > 0$ и любой фиксированной $\varphi \in X$ выполняется следующее: для любых $t_0 \in [0,T]$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon(t_0) > 0$, что при $t \in [0,T]$, удовлетворяющем условию $|t - t_0| < \delta_\varepsilon(t_0)$, справедливо неравенство $\|F(t)\varphi - F(t_0)\varphi\|_\infty < \varepsilon$. Фиксируем t_0, T, при котором $t_0 \in [0,T]$, и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $U^\varepsilon_{t_0} = \Big(t_0 - \dfrac{1}{2}\delta_\varepsilon(t_0),\ t_0 + \dfrac{1}{2}\delta_\varepsilon(t_0)\Big)$. Тогда $(U^\varepsilon_{t_0})_{t_0\in[0,T]}$ — открытое покрытие компакта $[0,\,T]$. Выберем из него конечное подпокрытие $\big(U^\varepsilon_{t_0(k)}\big)_{k=1}^n$. Пусть $\delta_\varepsilon = \min\{\delta_\varepsilon(t_0(1)), \ldots, \delta_\varepsilon(t_0(n))\}$. Тогда для любых $t_1, t_2 \in [0,T]$, $|t_1 - t_2| < \delta_\varepsilon/2$, существует такое $t_0(k)$, что $t_1,\ t_2 \in \big(t_0(k) - \delta_\varepsilon(t_0(k)),\ t_0(k) + \delta_\varepsilon(t_0(k))\big)$. При этом

$$\|F(t_1)\varphi - F(t_2)\varphi\|_\infty \le \|F(t_1)\varphi - F(t_0(k))\varphi\|_\infty + \|F(t_2)\varphi - F(t_0(k))\varphi\|_\infty < 2\varepsilon.$$

Теперь возьмем такое $\delta'_\varepsilon > 0$, что $c_2\delta'_\varepsilon \in \big(0,\ \delta_\varepsilon/2\big)$. Пусть $t \in [0,T]$ таково, что $|t - t_0| < \delta'_\varepsilon$. Тогда для любого $c \in [c_1,c_2]$ выполнено неравенство $|ct - ct_0| < \delta_\varepsilon/2$. Следовательно, $\sup\limits_{c\in[c_1,c_2]} \|F(ct)\varphi - F(ct_0)\varphi\|_\infty < 2\varepsilon$ и, значит,

$$\lim_{t\to t_0} \sup_{c\in[c_1,c_2]} \|F(ct)\varphi - F(ct_0)\varphi\|_\infty = 0.$$

Тем самым сильная непрерывность семества $(\widetilde{F}(t))_{t\ge 0}$ показана.

Найдем производную в нуле семейства $(\widetilde{F}(t))_{t\ge 0}$ на множестве D. Для любой $\varphi\in D$

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{\widetilde{F}(t)\varphi-\varphi}{t}-\widetilde{L}\varphi\right\|_\infty=\lim_{t\to 0}\sup_{q\in Q}\left|\frac{F(a(q)t)\varphi(q)-\varphi(q)}{t}-a(q)L\varphi(q)\right|\le$$

$$\le\lim_{t\to 0}\sup_{q_0,q\in Q}\left|\frac{F(a(q_0)t)\varphi(q)-\varphi(q)}{t}-a(q_0)L\varphi(q)\right|=\lim_{t\to 0}\sup_{q_0\in Q}\left\|\frac{F(a(q_0)t)\varphi-\varphi}{t}-a(q_0)L\varphi\right\|_\infty=$$

$$=\lim_{t\to 0}\sup_{c\in[c_1,c_2]}\left\|\frac{F(ct)\varphi-\varphi}{t}-cL\varphi\right\|_\infty\le c_2\cdot\lim_{z\to 0}\left\|\frac{F(z)\varphi-\varphi}{z}-L\varphi\right\|_\infty=0.$$

Таким образом, все условия теоремы Чернова выполнены, а значит, семейство $(\widetilde{F}(t))_{t\ge 0}$ эквивалентно по Чернову полугруппе $(\widetilde{T}_t)_{t\ge 0}$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 9. Пусть операторы T_t при всех $t\ge 0$ удовлетворяют условию $\|T_t\|\le e^{tk}$ при некотором $k>0$. Тогда в качестве семейства операторов $(F(t))_{t\ge 0}$ на X, можно взять саму полугруппу $(T_t)_{t\ge 0}$:

$$\widetilde{F}(t)\varphi(q)=(T_{a(q)t}\varphi)(q),\quad \varphi\in X,\quad q\in Q.$$

Заметим, что такое семейство $(\widetilde{F}(t))_{t\ge 0}$ уже не является однопараметрической полугруппой. Однако по теореме 4 это семейство $(\widetilde{F}(t))_{t\ge 0}$ эквивалентно по Чернову полугруппе $(\widetilde{T}_t)_{t\ge 0}$.

З а м е ч а н и е 10. Утверждение теоремы 4 можно перенести на случай, когда банахово пространство X есть не $C_b(Q)$, а некоторое линейное пространство функций на Q, полное относительно супремум-нормы $\|\varphi\|_\infty=\sup\limits_{q\in Q}|\varphi(q)|$. При этом надо дополнительно накладывать/проверять условие, что семейство операторов $(\widetilde{F}(t))_{t\ge 0}$ действует из X в X.

Предложение 1. Теорема 4 верна и в случае, если

$$X=C_\infty(Q):=\Big\{\varphi\in C_b(Q)\colon \lim_{\rho(q,q_0)\to\infty}\varphi(q)=0\Big\},$$

где q_0 — произвольная фиксированная точка неограниченного множества Q.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно проверить, что $\lim\limits_{\rho(q,q_0)\to\infty}(\widetilde{F}(t)\varphi)(q)=0$ для любой $\varphi\in X$. Фиксируем $\varphi\in X$. Тогда

$$\lim_{\rho(q,q_0)\to\infty}|\widetilde{F}(t)\varphi(q)|=\lim_{\rho(q,q_0)\to\infty}|(F(a(q)t)\varphi)(q)|\le$$

$$\le\lim_{\rho(q,q_0)\to\infty}\sup_{q'\in Q}|F(a(q')t)\varphi(q)|=\lim_{\rho(q,q_0)\to\infty}\sup_{\tau\in[c_1t,c_2t]}|F(\tau)\varphi(q)|.$$

Так как семейство $(F(t))_{t\ge 0}$ действует из X в X, то для любого $t\ge 0$ и любого $\varepsilon>0$ существует $R_{\varepsilon,t}>0$, такое, что для любого $q\in Q$, $\rho(q_0,q)>R_{\varepsilon,t}$, выполняется неравенство $|F(t)\varphi(q)|<\varepsilon/2$.

Так как семейство $(F(t))_{t\geq 0}$ сильно непрерывно, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_\varepsilon > 0$, такое, что для любых $\tau, \tau' \in [c_1 t, c_2 t]$, удовлетворяющих условию $|\tau - \tau'| < \delta_\varepsilon$, выполняется неравенство $\|F(\tau)\varphi - F(\tau')\varphi\|_\infty < \varepsilon/2$ (это было проверено в ходе доказательства теоремы 4).

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Разобьем отрезок $[c_1 t,\ c_2 t]$ точками $\tau_0 = c_1 t < \tau_1 < \ldots < \tau_N = c_2 t$ на части так, что $\max\limits_{1\leq k\leq N} |\tau_k - \tau_{k-1}| < \delta_\varepsilon$. При этом для любого $\tau \in [c_1 t,\ c_2 t]$ существует такое τ_k, что $|\tau - \tau_k| < \delta_\varepsilon$. Пусть теперь $R_\varepsilon = \max\limits_{0\leq k\leq N} R_{\varepsilon,\tau_k}$. Тогда для любых $q \in Q$, $\rho(q, q_0) > R_\varepsilon$, и $\tau \in [c_1 t,\ c_2 t]$ имеем:

$$|F(\tau)\varphi(q)| \leq |F(\tau)\varphi(q) - F(\tau_k)\varphi(q)| + |F(\tau_k)\varphi(q)| \leq \\ \leq \|F(\tau)\varphi - F(\tau_k)\varphi\|_\infty + |F(\tau_k)\varphi(q)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, $\lim\limits_{\rho(q,q_0)\to\infty} \sup\limits_{\tau\in[c_1 t, c_2 t]} |F(\tau)\varphi(q)| = 0$, что и доказывает предложение. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть дан марковский случайный процесс $(X_t)_{t\geq 0}$ с пространством состояний Q и переходной вероятностью $P_t(q, dy)$. Предположим, что соответствующая процессу полугруппа $(T_t)_{t\geq 0}$, заданная соотношением

$$T_t\varphi(q) = \mathbb{E}e^q[\varphi(X_t)] \equiv \int\limits_Q \varphi(y) P_t(q, dy),$$

является сильно непрерывной полугруппой на банаховом пространстве X, где $X = C_b(Q)$ или $X = C_\infty(Q)$. Тогда семейство операторов $(\widetilde{F}(t))_{t\geq 0}$, действующее по формуле

$$\widetilde{F}_t\varphi(q) = \int\limits_Q \varphi(y) P_{a(q)t}(q, dy),$$

эквивалентно по Чернову полугруппе $(\widetilde{T}_t)_{t\geq 0}$ с генератором, мультипликативно возмущенным функцией $a(\cdot)$ и справедлива лагранжева формула Фейнмана

$$\widetilde{T}_t\varphi(q_0) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_Q \cdots \int\limits_Q \varphi(q_n) P_{a(q_0)t/n}(q_0, dq_1) P_{a(q_1)t/n}(q_1, dq_2) \ldots P_{a(q_{n-1})t/n}(q_{n-1}, dq_n). \quad (6)$$

Это следствие вытекает из теоремы 4.

З а м е ч а н и е 11. Следствие 1 выполняется, в частности, в случае, если $(X_t)_{t\geq 0}$ — феллеровский процесс, т.е. $Q = \mathbb{R}^d$, $(T_t)_{t\geq 0}$ — сильно непрерывная, сохраняющая положительность сжимающая полугруппа на пространстве $C_\infty(\mathbb{R}^d)$.

З а м е ч а н и е 12. Мультипликативное возмущение генератора марковского процесса равносильно процедуре случайной замены времени [11, 28]. Отметим, что $P(t, x, dy) = P_{a(x)t}(x, dy)$ в общем случае не является переходной вероятностью какого-либо случайного процесса. Тем не менее, если переходная вероятность $P_t(q, dy)$ исходного процесса известна, то формула (6) позволяет аппроксимировать не выражающуюся в явном виде переходную вероятность модифицированного процесса.

Пример 7 (формула Фейнмана для диффузии с переменным коэффициентом**).** Рассмотрим процесс броуновского движения в $\mathbb{R}^d$. Генератором этого процесса является оператор Лапласа $L = \dfrac{1}{2}\Delta$. Плотность переходной вероятности задается гауссовской экспонентой

$$p_t^{BM}(x) = (2\pi t)^{-d/2} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{2t}\right\}.$$

Пусть $(\widetilde{T}_t)_{t\geq 0}$ — полугруппа на $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ с генератором L, мультипликативно возмущенным функцией $a(\cdot)$. Эта полугруппа соответствует диффузионному процессу с переменным коэффициентом диффузии $\sqrt{a}$. По теореме 4 для любого $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$ справедлива формула Фейнмана

$$\widetilde{T}_t\varphi(q_0) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^d} (2\pi a(q_0)t/n)^{-d/2} \exp\left\{-\frac{|q_0-q_1|^2}{2a(q_0)t/n}\right\} \times$$

$$\times\, (2\pi a(q_{n-1})t/n)^{-d/2} \exp\left\{-\frac{|q_{n-1}-q_n|^2}{2a(q_{n-1})t/n}\right\}\varphi(q_n)\, dq_1 \ldots dq_n.$$

Пример 8 (процесс типа Коши с переменным коэффициентом**).** Рассмотрим процесс Коши в $\mathbb{R}^d$. Плотность его переходной вероятности задается формулой

$$p_t(x) = \Gamma\left(\frac{d}{2} + \frac{1}{2}\right) \frac{t}{[\pi|x|^2 + t^2]^{(d+1)/2}},$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера. Рассмотрим мультипликативное возмущение генератора процесса Коши функцией $a(\cdot)$. Тогда для соответствующей полугруппы $(\widetilde{T}_t)_{t\geq 0}$ с мультипликативно возмущенным генератором по теореме 4 имеем:

$$\widetilde{T}_t\varphi(q_0) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left[\Gamma\left(\frac{d}{2} + \frac{1}{2}\right)\right]^n \frac{a(q_0)t/n}{[(a(q_0)t/n)^2 + (\pi|q_0-q_1|)^2]^{(d+1)/2}} \times$$

$$\times\, \frac{a(q_{n-1})t/n}{[(a(q_{n-1})t/n)^2 + (\pi|q_{n-1}-q_n|)^2]^{(d+1)/2}}\varphi(q_n)\, dq_1 \ldots dq_n.$$

5. Формулы Фейнмана для параболического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

В этом параграфе мы обобщим результаты примеров 5 и 7 на более широкий класс переменных коэффициентов.

Пусть $A(\cdot)\colon \mathbb{R}^d \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ — такое непрерывное отображение, что для любого $x \in \mathbb{R}^d$ оператор $A(x)$ является симметричным и положительно определенным. Пусть Δ_A — дифференциальный оператор, действующий на дважды дифференцируемую на $\mathbb{R}^d$ функцию φ следующим образом:

$$(\Delta_A\,\varphi)(x) := \mathrm{tr}(A(x)\,\varphi^{(2)}(x)), \tag{7}$$

где $\varphi^{(2)}(x) := (\mathrm{Hess}\,\varphi)(x)$ — гессиан φ в точке $x \in \mathbb{R}^d$. Пусть отображения $b(\cdot)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ и $c(\cdot)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ непрерывны. В этом параграфе мы будем рассматривать оператор L, определенный на множестве дважды дифференцируемых на $\mathbb{R}^d$ функций следующим образом:

$$L\varphi(x) := \frac{1}{2}(\Delta_A\varphi)(x) + b(x)\cdot\nabla\varphi(x) + c(x)\varphi(x). \tag{8}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = Lf(t,x), \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^d;\\ &f(0,x) = f_0(x), \quad x\in\mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{9}$$

При $f_0 \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$ будем искать такую функцию $f\colon [0,\infty)\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, что $f(t,\cdot)$ дважды дифференцируема на $\mathbb{R}^d$ при всех $t>0$, $f(\cdot,x)$ дифференцируема на $(0,\infty)$ при всех $x\in\mathbb{R}^d$ и $f(t,\cdot)\in C_\infty(\mathbb{R}^d)$ при всех $t\geq 0$.

Рассмотрим семейство операторов $(F_1(t))_{t\geq 0}$ (на пространстве $C_\infty(\mathbb{R}^d)$, как будет показано в дальнейшем), для которого $F_1(0) := \mathrm{Id}$ и при всех $t>0$ оператор $F_1(t)$ определяется по формуле

$$F_1(t)\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)^d \det A(x)}}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\exp\left(-\frac{A^{-1}(x)(x-y)\cdot(x-y)}{2t}\right)\varphi(y)\,dy. \tag{10}$$

Если $A(\cdot)$ — постоянная матрица, то семейство операторов $(F_1(t))_{t\geq 0}$ совпадает с полугруппой $(e^{\frac{t}{2}\Delta_A})_{t\geq 0}$. Если $A(\cdot)$ не является постоянной матрицей, то семейство $(F_1(t))_{t\geq 0}$ уже не является полугруппой. При этом, если $A(x)$ при всех $x\in\mathbb{R}^d$ является диагональной матрицей, у которой все диагональные элементы равны $a(x)$, где $a(\cdot)$ — некоторая непрерывная, ограниченная, отделенная от нуля функция, то $F_1(t)\varphi(x) = (T_{a(x)t}\varphi)(x)$, где $T_t = e^{\frac{t}{2}\Delta}$. Значит, по теореме 4 семейство $(F_1(t))_{t\geq 0}$ эквивалентно по Чернову полугруппе $(\widetilde{T}_t \equiv e^{\frac{t}{2}\Delta_A})_{t\geq 0}$. Как будет показано далее, эквивалентность по Чернову сохраняется и в общем случае.

Лемма 1. Семейство $(F_1(t))_{t\geq 0}$ является непрерывным семейством сжатий на пространстве $C_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство. Линейность операторов $F_1(t)$ очевидна. Кроме того, для любой функции $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d) \subset C_\infty(\mathbb{R}^d)$ функция $F_1(t)\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$ в силу свойств гауссовской экспоненты (в случае как ограниченного, так и неограниченного отображения $A(\cdot)$).

При этом, для любой $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|F_1(t)\varphi(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|\frac{1}{\sqrt{\det A(x)(2\pi t)^d}}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\exp\left(\frac{-A^{-1}(x)(x-y)\cdot(x-y)}{2t}\right)\varphi(y)\,dy\right| \leq$$

$$\leq \|\varphi\|_\infty \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|\frac{1}{\sqrt{\det A(x)(2\pi t)^d}}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\exp\left(\frac{-A^{-1}(x)(x-y)\cdot(x-y)}{2t}\right)dy\right| = \|\varphi\|_\infty. \tag{11}$$

Так как $C_c(\mathbb{R}^d)$ плотно в $C_\infty(\mathbb{R}^d)$, то по теореме об ограниченном линейном отображении [43] $F_1(t)$ продолжается до сжатия на пространстве $C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Это продолжение также действует по формуле (10).

Покажем теперь, что семейство $(F_1(t))_{t\geq 0}$ является непрерывным. Достаточно показать, что $\lim\limits_{t\to t_0}\|F(t)\varphi - F(t_0)\varphi\|_\infty = 0$ для каждой $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ и любого $t_0 \geq 0$, а далее воспользоваться (3ε)-приемом. Для $t_0 > 0$ равенство верно, так как все функции в формуле (10) непрерывны по $t \in (0, +\infty)$, φ имеет компактный носитель и отображение

$$(t, x, y) \mapsto \exp\Big(\frac{-\langle A^{-1}(x)(x-y), x-y\rangle}{2t}\Big)$$

является непрерывным на $[t_1, t_2] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, где $t_0 \in (t_1, t_2)$ и $[t_1, t_2] \subset (0, \infty)$.

Для $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ имеем также

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{1}{\sqrt{\det A(x)(2\pi t)^d}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\frac{-A^{-1}(x)(x-y)\cdot(x-y)}{2t}\right)\varphi(y)\,d(y) = \varphi(x),$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^d$, так как для каждого фиксированного $x \in \mathbb{R}^d$ функция

$$y \mapsto \frac{1}{\sqrt{\det A(x)(2\pi t)^d}} \exp\left(\frac{-A^{-1}(x)(x-y)\cdot(x-y)}{2t}\right)$$

стремится к дельта-функции Дирака δ_x при $t \searrow 0$, а функция φ ограничена и равномерно непрерывна. Таким образом, $\lim\limits_{t\searrow 0} F(t)\varphi = \varphi$ в $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ для всех $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Теорема доказана.

Лемма 2. Для $\varphi \in C_c^{2,\gamma}(\mathbb{R}^d)$, $0 < \gamma \leq 1$, имеем

$$F_1(t)\varphi(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\Delta_A\varphi(x) + o(t)$$

при $t \searrow 0$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^d$.

Доказательство. Пусть $c(t,x) := ((2\pi t)^d \mathrm{det} A(x))^{-1/2}$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$. Тогда

$$\frac{1}{t}\big(F_1(t)\varphi - \varphi\big)(x) = \frac{c(t,x)}{t} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\Big(-\frac{A^{-1}(x)(x-y)\cdot(x-y)}{2t}\Big)(\varphi(y) - \varphi(x))\,dy.$$

Так как $\varphi \in C_c^{2,\gamma}(\mathbb{R}^d)$, то ее разложение Тейлора с центром в точке x влечет для некоторого $\vartheta \in [0,1]$ равенство

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \varphi^{(1)}(x)(y-x) + \frac{1}{2!}\varphi^{(2)}(\vartheta x + (1-\vartheta)y)(y-x)^2,$$

где $\varphi^{(k)}(x)$ понимается как k-линейный функционал на $(\mathbb{R}^d)^k$, а обозначение $\varphi^{(k)}(x)(y-x)^k$ указывает на применение функционала $\varphi^{(k)}(x)$ к вектору $(y-x) \in \mathbb{R}^d$, взятому k раз.

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{t}(F_1(t)\varphi-\varphi)(x) = \\
&\quad = \frac{c(t,x)}{t}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{-A^{-1}(x)(x-y)\cdot(x-y)}{2t}}\Big(\varphi^{(1)}(x)(y-x)+\frac{1}{2}\varphi^{(2)}(\vartheta x+(1-\vartheta)y)(y-x)^2\Big)\,dy = \\
&\qquad = \frac{c(t,x)}{2t}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\exp\Bigg(\frac{-A^{-1}(x)(x-y)\cdot(x-y)}{2t}\Bigg)\varphi^{(2)}(x)(y-x)^2dy + \\
&+\frac{c(t,x)}{2t}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\exp\Bigg(\frac{-A^{-1}(x)(x-y)\cdot(x-y)}{2t}\Bigg)\big(\varphi^{(2)}(\vartheta x+(1-\vartheta)y)-\varphi^{(2)}(x)\big)(y-x)^2dy.
\end{aligned}
$$

Так как $\varphi^{(2)}$ удовлетворяет условию Гельдера, второе слагаемое последнего равенства стремится к нулю при $t\searrow 0$ равномерно по $x\in\mathbb{R}^d$. И, как и в случае постоянной матрицы A, первое слагаемое совпадает с $\frac{1}{2}\Delta_A\varphi(x)$ для всех $x\in\mathbb{R}^d$. Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть $A(\cdot)\colon\mathbb{R}^d\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ — такое непрерывное отображение, что для любого $x\in\mathbb{R}^d$ оператор $A(x)$ является симметричным и положительно определенным. Предположим, что существует α, $0<\alpha\le 1$, для которого оператор $(\Delta_A, C_c^{2,\alpha}(\mathbb{R}^d))$, действующий по формуле (7), замыкаем, причем это замыкание является генератором сильно непрерывной полугруппы $(e^{t\Delta_A})_{t\ge0}$ на $C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Тогда семейство $(F_1(t))_{t\ge0}$, заданное формулой (10), эквивалентно по Чернову этой полугруппе, т.е.

$$e^{t\Delta_A}=\lim_{n\to\infty}\big[F_1(t/n)\big]^n$$

в $\mathcal{L}(C_\infty(\mathbb{R}^d))$ локально равномерно по $t\ge0$. Кроме того, для любой $\varphi\in C_\infty(\mathbb{R}^d)$ справедлива лагранжева формула Фейнмана

$$e^{t\Delta_A}\varphi(q_0)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\dots\int\limits_{\mathbb{R}^d}p_A(t/n,q_0,q_1)\dots p_A(t/n,q_{n-1},q_n)\varphi(q_n)\,dq_1\dots dq_n, \tag{12}$$

где

$$p_A(t,x,y):=\frac{1}{\sqrt{\det A(x)(2\pi t)^d}}\exp\Bigg(-\frac{A^{-1}(x)(x-y)\cdot(x-y)}{2t}\Bigg)$$

при $x,y\in\mathbb{R}^d$, $t>0$.

Доказательство. Как следует из лемм 1 и 2, все условия теоремы Чернова выполнены. Поэтому утверждение данной теоремы вытекает из теоремы Чернова. Теорема доказана.

Замечание 13. При некоторых дополнительных предположениях [31, 32, 35] для полугруппы $e^{t\Delta_A}$ справедлива следующая формула Фейнмана — Каца:

$$e^{t\Delta_A}\varphi(q_0)=\mathbb{E}^{q_0}\big[\varphi(X_t)\big]\equiv\int\limits_{\mathbb{R}^d}\varphi(y)P_t^A(q_0,dy), \tag{13}$$

где $P_t^A(q_0, dy) = \mathbb{P}\{X_t \in dy \,\big|\, X_0 = q_0\}$ — переходная вероятность диффузионного процесса X_t с переменной матрицей диффузии $A(\cdot)$. Функция $p_A(t, x, y)$ из теоремы 5 отнюдь не является плотностью переходной вероятности этого случайного процесса; его плотность не выражается в элементарных функциях, однако ее можно аппроксиммировать с использованием формулы Фейнмана (12) и формулы Фейнмана — Каца (13).

Из результатов теорем 3 и 5, а также примеров 3 и 4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть $A(\cdot)\colon \mathbb{R}^d \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ — такое непрерывное отображение, что для любого $x \in \mathbb{R}^d$ оператор $A(x)$ является симметричным и положительно определенным. Предположим, что существует α, $0 < \alpha \le 1$, для которого оператор $(\Delta_A, C_c^{2,\alpha}(\mathbb{R}^d))$, действующий по формуле (7), замыкаем, причем это замыкание является генератором сильно непрерывной полугруппы $(e^{t\Delta_A})_{t\ge 0}$ на $C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Пусть $b(\cdot)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ — ограниченное непрерывное векторное поле; $c(\cdot)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \to$ — непрерывная ограниченная сверху функция; Допустим, что существует γ, $\alpha \le \gamma \le 1$, при котором оператор $(L, C_c^{2,\gamma}(\mathbb{R}^d))$, заданный формулой (8), замыкаем, причем это замыкание $(L, \mathrm{Dom}(L))$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $(T_t)_{t\ge 0}$ на $C_\infty(\mathbb{R}^d)$, разрешающей задачу Коши (9) для всех $f_0 \in \mathrm{Dom}(L)$. Рассмотрим семейство $(F_1(t))_{t\ge 0}$ операторов, заданное формулой (10) и семейство $(S(t))_{t\ge 0}$, заданное формулой (3). Тогда верны следующие утверждения:

1) $S(t) \circ e^{tc} \circ F_1(t) \sim T_t$, 3) $e^{tc} \circ S(t) \circ F_1(t) \sim T_t$, 5) $F_1(t) \circ S(t) \circ e^{tc} \sim T_t$,
2) $S(t) \circ F_1(t) \circ e^{tc} \sim T_t$, 4) $F_1(t) \circ e^{tc} \circ S(t) \sim T_t$, 6) $e^{tc} \circ F_1(t) \circ S(t) \sim T_t$.

З а м е ч а н и е 14. Если $c(\cdot)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \to$ — непрерывная ограниченная сверху функция, оператор умножения на эту функцию плотно определен в пространстве $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ (так он как корректно определен, например, на множестве непрерывных финитных функций) и порождает сильно непрерывную полугруппу e^{tc} операторов умножения на функцию $e^{tc(\cdot)}$.

Согласно теореме 6, построено шесть различных семейств, эквивалентных по Чернову полугруппе $(T_t)_{t\ge 0}$. Построим еще одно семейство, пригодное и в случае, если векторное поле $b(\cdot)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ не является ограниченным.

П р е д п о л о ж е н и е 1. Для заданного непрерывного отображения $A(\cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, такого, что для любого $x \in \mathbb{R}^d$ оператор $A(x)$ симметричный и положительно определенный, непрерывного векторного поля $b(\cdot)$ и непрерывной ограниченной сверху функции $c(\cdot)$ предполагаем, что существует α, $0 < \alpha \le 1$, при котором оператор $(L, C_c^{2,\alpha}(\mathbb{R}^d))$, заданный формулой (8), замыкаем, причем это замыкание $(L, \mathrm{Dom}(L))$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $(T_t)_{t\ge 0}$ на $C_\infty(\mathbb{R}^d)$, разрешающей задачу Коши (9) для всех $f_0 \in \mathrm{Dom}(L)$.

З а м е ч а н и е 15. Предположение 1 выполнено, например, при $c(\cdot) \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$, $b(\cdot) \in$ $\in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ и $A(\cdot) \in C_b^3(\mathbb{R}^d)$, если оператор Δ_A является равномерно эллиптическим (т.е. существует такая константа $\gamma > 0$, что для всех $x \in \mathbb{R}^d$ и $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ выполнено неравенство $\xi \cdot A(x)\xi \ge \gamma|\xi|^2$). Этот факт следует из доказательства теоремы 2.1.43 (см. [34, том II]), основанного на теореме Хилле — Иосиды — Рэя. В случае неограниченных коэффициентов вопросы существования соответствующей (феллеровской) полугруппы рассматриваются, например, в работе [18].

Определим семейство операторов $(F_2(t))_{t\geq 0}$ на множестве $C_c(\mathbb{R}^d)$ следующим образом: $F_2(0) := \mathrm{Id}$ и при $t > 0$ оператор $F_2(t)$ задается формулой

$$F_2(t)\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{\det A(x)(2\pi t)^d}} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\frac{-A^{-1}(x)(x-y)\cdot(x-y)}{2t}\right) \exp\bigl(-A^{-1}b(x)\cdot(x-y)\bigr)\varphi(y)\,dy, \quad (14)$$

где $A^{-1}b(x) := A^{-1}(x)b(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Лемма 3. Для всех $\varphi \in C_c^{2,\gamma}(\mathbb{R}^d)$, $0 < \gamma \leq 1$, при $t \searrow 0$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^d$ выполняется равенство

$$F_2(t)\varphi(x) = \varphi(x) + \frac{t}{2}\Delta_A\varphi(x) + tb(x)\cdot\nabla\varphi(x) + \frac{t}{2}(A^{-1}b(x)\cdot b(x))\varphi(x) + o(t).$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_c^{2,\gamma}(\mathbb{R}^d)$ и выполнено предположение 1. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^d$ функция $\psi_{x,\varphi}(y) = \exp\bigl(-A^{-1}b(x)\cdot(x-y)\bigr)\varphi(y)$ переменной y принадлежит множеству $C_c^{2,\gamma}(\mathbb{R}^d)$. Кроме того,

$$F_2(t)\varphi(x) = (F_1(t)\psi_{x,\varphi})(x).$$

Таким образом, по лемме 2 при $t \searrow 0$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^d$

$$F_2(t)\varphi(x) = \psi_{x,\varphi}(x) + \frac{t}{2}(\Delta_A\psi_{x,\varphi})(x) + o(t) =$$
$$= \Bigl(\exp\bigl(A^{-1}b(x)\cdot(x-\bullet)\bigr)\varphi\Bigr)(x) + \frac{t}{2}\Delta_A\Bigl(\exp\bigl(-A^{-1}b(x)\cdot(x-\bullet)\bigr)\varphi\Bigr)(x) + o(t) =$$
$$= \varphi(x) + \frac{t}{2}\,\mathrm{tr}\Bigl(A\bigl(\varphi^{(2)} + 2A^{-1}b\otimes\nabla\varphi + (A^{-1}b\otimes A^{-1}b)\varphi\bigr)\Bigr)(x) + o(t) =$$
$$= \varphi(x) + \frac{t}{2}\Delta_A\varphi(x) + tb(x)\cdot\varphi(x) + \frac{t}{2}(A^{-1}b(x)\cdot b(x))\varphi(x) + o(t).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь семейство операторов $(F(t))_{t\geq 0}$, для которых для любой $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$

$$F(t)\varphi(x) = e^{t[c(x)-\frac{1}{2}A^{-1}(x)b(x)\cdot b(x)]}F_2(t)\varphi(x) \equiv$$
$$\equiv \frac{\exp(tc(x))}{\sqrt{\det A(x)(2\pi t)^d}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\frac{-A^{-1}(x)(x-y+tb(x))\cdot(x-y+tb(x))}{2t}\right)\varphi(y)\,dy, \quad (15)$$

Отметим, что операторы $F(t)$ отличаются от операторов в формуле 3) теоремы 6 тем, что у последних коэффициенты $A(\cdot)$ и $A^{-1}(\cdot)$ вычисляются в точке $x + tb(x)$, а не в точке x.

Теорема 7. Пусть выполнено предположение 1. Тогда семейство $(F(t))_{t\geq 0}$ операторов, определенных по формуле (15), эквивалентно по Чернову полугруппе $(T_t)_{t\geq 0}$ на пространстве $X = C_\infty(\mathbb{R}^d)$, разрешающей задачу Коши (9) для всех $f_0 \in \mathrm{Dom}(L)$, т.е.

$$T_t = \lim_{n\to\infty} \big(F(t/n)\big)^n$$

в $\mathcal{L}(C_\infty(\mathbb{R}^d))$ локально равномерно по $t \geq 0$. Таким образом, для любой $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$ справедлива лагранжева формула Фейнмана

$$T_t\varphi(q_0) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\Bigg(-\sum_{k=1}^n A^{-1}(q_{k-1})b(q_{k-1})\cdot(q_{k-1}-q_k)\Bigg) \times$$
$$\times \exp\Bigg(\frac{t}{n}\sum_{k=1}^n c(q_{k-1})\Bigg) \exp\Bigg(-\frac{t}{2n}\sum_{k=1}^n A^{-1}(q_{k-1})b(q_{k-1})\cdot b(q_{k-1})\Bigg) \times$$
$$\times\, \varphi(q_n)p_A(t/n, q_0, q_1)\cdots p_A(t/n, q_{n-1}, q_n)\, dq_1 \dots dq_n, \quad (16)$$

где при $x,\ y \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$

$$p_A(t,x,y) := \frac{1}{\sqrt{\det A(x)(2\pi t)^d}} \exp\Bigg(-\frac{A^{-1}(x)(x-y)\cdot(x-y)}{2t}\Bigg).$$

Замечание 16. При некоторых дополнительных ограничениях на коэфициенты $A(\cdot)$, $b(\cdot)$, $c(\cdot)$ [31, 32, 35] для полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$ справедлива формула Фейнмана — Каца

$$T_t\varphi(q_0) = \mathbb{E}^{q_0}\Bigg[\exp\Bigg(\int\limits_0^t c(\xi_\tau)\,d\tau\Bigg) f_0(\xi_t)\Bigg], \quad (17)$$

где $\mathbb{E}^{q_0}$ — математическое ожидание выпущенного из точки q_0 диффузионного процесса $(\xi_t)_{t\geq 0}$ с переменной матрицей диффузии $A(\cdot)$ и сносом $b(\cdot)$. Таким образом, формула Фейнмана (16) дает пригодные для непосредственных вычислений аппроксимации функционального интеграла в формуле Фейнмана — Каца (17). Кроме того, с учетом формул (12) и (13) можно показать, что выражение в правой части формулы (16) совпадает со следующим функциональным интегралом:

$$T_t\varphi(q_0) = \mathbb{E}^{q_0}\Bigg[\exp\Bigg(\int\limits_0^t c(X_\tau)\,d\tau\Bigg) \exp\Bigg(\int\limits_0^t A^{-1}(X_\tau)\,b(X_\tau)\cdot dX_\tau\Bigg) \times$$
$$\times \exp\Bigg(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t A^{-1}(X_\tau)b(X_\tau)\cdot b(X_\tau)\,d\tau\Bigg) f_0(X_t)\Bigg], \quad (18)$$

где $\mathbb{E}^{q_0}$ — математическое ожидание диффузионного процесса $(X_t)_{t\geq 0}$ с переменной матрицей диффузии $A(\cdot)$ и без сноса, а стохастический интеграл $\int\limits_0^t A^{-1}(X_\tau)b(X_\tau)\cdot dX_\tau$ есть стохастический интеграл Ито. Теперь, приравнивая функциональные интегралы в формулах (17) и (18), получаем аналог формулы Гирсанова — Камерона — Мартина — Реймера — Маруямы (о преобразовании меры, порожденной случайным процесом броуновского движения, при добавлении сноса) для случая диффузионных процессов с переменным коэффициентом диффузии.

Перейдем к доказательству теоремы.

Во-первых, $F(t)\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$ для любой функции $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Действительно, если

$$\|A(x)\|_{\mathrm{Mat}(d\times d)} \to \infty \quad \text{при} \quad |x| \to \infty,$$

то

$$|F(t)\varphi(x)| \le \frac{\|\varphi\|_\infty \exp\Big(t \max\limits_{x\in\mathbb{R}^d} c(x)\Big)}{\sqrt{\det A(x)(2\pi t)^d}} \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi} dy \to 0, \quad |x| \to \infty.$$

Если существует такой путь Γ, что при $x \in \Gamma$, $|x| \to \infty$ имеем $\|A(x)\|_{\mathrm{Mat}(d\times d)} = O(1)$, то существует такая константа $k > 0$, что для любых $x \in \Gamma$, $y \in \mathbb{R}^d$, $t \ge 0$ выполняется неравенство

$$\exp\Big(-\frac{A^{-1}(x)(x + tb(x) - y)\cdot(x + tb(x) - y)}{2t}\Big) \le \exp\Big(-\frac{k|x + tb(x) - y|^2}{2t}\Big).$$

При этом существует такое $t_* > 0$, что для любого $t \in [0, t_*]$ имеем $|x + tb(x)| \to \infty$ при $|x| \to \infty$. Тогда по свойствам гауссовской экспоненты для всех $t \in [0, t_*]$ при $x \in \Gamma$, $|x| \to \infty$ выполняется оценка

$$|F(t)\varphi(x)| \le \frac{\|\varphi\|_\infty \exp\Big(t \max\limits_{x\in\mathbb{R}^d} c(x)\Big)}{\sqrt{\det A(x)(2\pi t)^d}} \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi} \exp\Big(-\frac{k|x + tb(x) - y|^2}{2t}\Big)\, dy \to 0.$$

В этом случае положим $F(t) = F(t_*)$ для всех $t \ge t_*$.

Во-вторых, для любой $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |F(t)\varphi(x)| \le \exp\Big(t \max_{x\in\mathbb{R}^d}(c(x))\Big)\|\varphi\|_\infty \times$$

$$\times \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left| \frac{1}{\sqrt{\det A(x)(2\pi t)^d}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\Big(\frac{-A^{-1}(x)(x - y + tb(x))(x - y + tb(x))}{2t}\Big)\, dy \right| =$$

$$= \exp\Big(t \max_{x\in\mathbb{R}^d}(c(x))\Big)\|\varphi\|_\infty.$$

Значит, по теореме об ограниченном линейном отображении операторы $F(t)$ можно продолжить с множества $C_c(\mathbb{R}^d)$ до линейных ограниченных операторов из $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ в $C_\infty(\mathbb{R}^d)$, причем

$$\|F(t)\| \le \exp\Big(t \max_{x\in\mathbb{R}^d}(c(x))\Big).$$

Далее, по лемме 3 для любой $\varphi \in C_c^{2,\gamma}(\mathbb{R}^d)$, $0 < \gamma \leq 1$, при $t \searrow 0$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^d$ выполняются соотношения:

$$F(t)\varphi(x) = e^{t[c(x)-\frac{1}{2}A^{-1}(x)b(x)\cdot b(x)]}F_2(t)\varphi(x) =$$
$$= e^{t[c(x)-\frac{1}{2}A^{-1}(x)b(x)\cdot b(x)]}\big(\varphi(x) + \frac{t}{2}\Delta_A\varphi(x) + tb(x)\cdot\nabla\varphi(x) + \frac{t}{2}(A^{-1}b(x)\cdot b(x))\varphi(x) + o(t)\big) =$$
$$= \varphi(x) + \frac{t}{2}\Delta_A\varphi(x) + tb(x)\cdot\nabla\varphi(x) + c(x)\varphi(x) + o(t).$$

Таким образом, все условия теоремы Чернова выполнены. Теорема доказана.

Замечание 17. Можно показать, что при надлежащих условиях на коэффициенты $A(\cdot)$, $b(\cdot)$, $c(\cdot)$ оператор $L = -iH$, где

$$H\varphi(x) := -\frac{1}{2}(\Delta_A\varphi)(x) - ib(x)\cdot\nabla\varphi(x) + c(x)\varphi(x),$$

с подходящей областью определения порождает сильно непрерывную полугруппу (и даже группу) e^{-itH} на пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ и семейство $(F(t))_{t\geq 0}$ операторов, таких, что для любой $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$

$$F(t)\varphi(x) = \frac{\exp(-itc(x))}{\sqrt{\det A(x)(2\pi it)^d}}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\exp\Big(i\frac{A^{-1}(x)(x-y-tb(x))\cdot(x-y-tb(x))}{2t}\Big)\varphi(y)dy,$$

(ср. с формулой примера 6 и формулой (15)) эквивалентно по Чернову этой полугруппе (ср. [12, 42]).

6. Формулы Фейнмана для решения начально-краевых задач

Существуют различные подходы к получению формул Фейнмана для начально-краевых задач. С одной стороны, начиная с решения начально-краевой задачи для более простого уравнения, можно применять теоремы 3 и 4 об аддитивных и мультипликативных возмущениях для получения решения исходной задачи (см., например, [7]). С другой стороны, начиная с решения задачи Коши для исходного уравнения, можно «подправлять» соответствующее семейство эквивалентных по Чернову операторов таким образом, чтобы выполнялись краевые условия (см., например, [21, 10]). Опишем второй подход для решения краевой задачи Коши — Дирихле для некоторого класса уравнений.

Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $X = C_\infty(\mathbb{R}^d)$ и дифференциальный оператор $(L, \mathrm{Dom}(L))$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$ на X. Пусть также дано семейство операторов $(F(t))_{t\geq 0}$ на X, эквивалентное по Чернову полугруппе $(T_t)_{t\geq 0}$, причем $\|F(t)\| \leq e^{at}$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$ и всех $t \geq 0$, $F'(0)\varphi = L\varphi$ для всех $\varphi \in D \subset \mathrm{Dom}(L)$, где D — некоторая существенная область определения оператора L. Рассмотрим следующую задачу Коши — Дирихле:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial t}(t,q) = Lf(t,q), \quad t > 0, \quad q \in G; \\ &f(0,q) = f_0(q), \quad q \in G; \\ &f(t,q) = 0, \quad q \in \partial G. \end{aligned} \tag{19}$$

Пусть $Y = C_0(\overline{G}) := \{\varphi \in C(G), \lim\limits_{q\to\partial G} \varphi(q) = 0\}$ — пространство непрерывных функций, обращающихся в нуль на границе области. Это банахово пространство с нормой $\|f\|_Y = \sup_{x\in G} |f(x)|$.

П р е д п о л о ж е н и е 2. Предполагаем, что существует сильно непрерывная полугруппа $(T_t^o)_{t\geq 0}$ на пространстве Y, разрешающая задачу Коши — Дирихле (19), т.е. если $(L_o, \mathrm{Dom}(L_o))$ — генератор полугруппы $(T_t^o)_{t\geq 0}$, то для любой $\varphi \in \mathrm{Dom}(L_o)$ функция $f(t,\cdot) = T_t^o\varphi \in Y$ является решением задачи (19) с начальным условием $f_0 := \varphi$.

Условия существования полугруппы, разрешающей начально-краевую задачу (19), могут быть найдены, например в [37, теорема 3.2.5 и следствие 3.1.4].

Множество $C_0(\overline{G})$ можно различными способами вложить в пространство $C_c(\mathbb{R}^d)$ непрерывных на $\mathbb{R}^d$ функций с компактными носителями.

П р е д п о л о ж е н и е 3. Предполагаем, что существует вложение E: $C_0(\overline{G}) \to C_c(\mathbb{R}^d)$, для которого:

(E0) каждая функция $\varphi \in C_0(\overline{G})$ продолжается до функции $E(\varphi) \in C_c(\mathbb{R}^d)$, т.е. $E(\varphi)\big|_{\overline{G}} = \varphi$;

(E1) вложение линейно, т.е. для всех функций $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0(\overline{G})$ и чисел $a,\ b \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $E(a\varphi_1 + b\varphi_2) = aE(\varphi_1) + bE(\varphi_2)$;

(E2) вложение сохраняет норму, т.е. для любой $\varphi \in Y = C_0(\overline{G})$ справедливо равенство $\|\varphi\|_Y = \sup\limits_{q\in\mathbb{R}^d} |E(\varphi)(q)| \equiv \|E(\varphi)\|_X$;

(E3) вложение сохраняет существенную область, т.е. если $D\big|_G$ — множество сужений на G функций из $D \subset \mathrm{Dom}(L)$, то для любой $\varphi \in \mathrm{Dom}(L_o) \cap D\big|_G$ ее продолжение $E(\varphi) \in D$.

З а м е ч а н и е 18. Пусть, например, $L = \Delta$, $D = C_c^2(\mathbb{R}^d)$. Тогда требование $(E3)$ равносильно требованию сохранения при вложении гладкости до второго порядка включительно.

П р е д п о л о ж е н и е 4. Предполагаем, что множество

$$D_o := \mathrm{Dom}(L_o) \cap [C^1(\mathbb{R}^d) \cap D]\big|_G$$

является существенной областью определения генератора L_o полугруппы $(T_t^o)_{t\geq 0}$, разрешающей поставленную задачу Коши — Дирихле (19).

З а м е ч а н и е 19. Пусть оператор L задан формулой (8), причем коэффициенты являются функциями класса $C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ для некоторого $\alpha \in (0,1)$, матрица $A(q)$ симметрична при всех $q \in \mathbb{R}^d$ и оператор Δ_A равномерно эллиптичен. Рассмотрим в качестве D множество $C_c^{2,\alpha}(\mathbb{R}^d) \subset C_\infty(\mathbb{R}^d) \equiv X$, тогда $D_o = \{\varphi \in C^{2,\alpha}(G) : \varphi,\ L\varphi \in Y\}$. Если граница области G является гладкой класса $C^{4,\alpha}$, то предположения 2, 3 и 4 верны (см. [16]).

Пусть $s : (0,\infty) \to (0,\infty)$ гладкая функция, монотонно убывающая к нулю при $t \searrow 0$, причем $s(t) = o(t)$ (например $s(t) = k \operatorname{arctg} t^2$, где $k \in (0,\ \mathrm{diam}(G)/\pi)$). Рассмотрим множество $G_{s(t)} \subset G$, определенное по формуле $G_{s(t)} = \{q \in G\colon \mathrm{dist}(q, \partial G) > s(t)\}$. Рассмотрим теперь семейство $(\psi_{s(t)})_{t>0}$ бесконечно дифференцируемых функций $\psi_{s(t)}\colon \mathbb{R}^d \to [0,1]$, таких, что

$$\psi_{s(t)}(q) = \begin{cases} 1, & q \in G_{s(t)}; \\ 0, & q \in \mathbb{R}^d \setminus G, \end{cases}$$

и $\lim\limits_{t\to t^*} \|\psi_{s(t)} - \psi_{s(t^*)}\|_\infty = 0$ для любого $t^* > 0$. Отметим, что при $t \searrow 0$ функции $\psi_{s(t)}$ поточечно сходятся к индикатору области G.

Рассмотрим семейство $(F_o(t))_{t\ge 0}$ операторов, действующих по формуле

$$F_o(t)\varphi(q) = \begin{cases} \mathrm{Id}, & t = 0; \\ \psi_{s(t)}(q)[F(t)E(\varphi)](q), & t > 0. \end{cases} \tag{20}$$

где семейство $(F(t))_{t\ge 0}$ эквивалентно по Чернову полугруппе $(T_t)_{t\ge 0}$, разрешающей задачу Коши в пространстве X, соответствующую нашей начально-краевой задаче (19). Это семейство операторов действует в пространстве Y. Действительно, если $\varphi \in Y = C_0(\overline{G})$, то $E(\varphi) \in C_c(\mathbb{R}^d) \subset C_\infty(\mathbb{R}^d) = X$, $F(t)E(\varphi) \in X$, $\psi_{s(t)}[F(t)E(\varphi)] \in Y$.

Теорема 8. Пусть выполнены предположения 2, 3 и 4. Тогда семейство $(F_o(t))_{t\ge 0}$, заданное формулой (20), эквивалентно по Чернову полугруппе $(T_t^o)_{t\ge 0}$, разрешающей задачу Коши — Дирихле (19).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим выполнение условий теоремы Чернова. Так как $F_o(0) =$ Id по определению, то необходимо проверить сильную непрерывность семейства $(F_o(t))_{t\ge 0}$, оценить норму операторов $F_o(t)$ и найти (сильную) производную $F_o(t)$ в нуле на существенной области D_o определения генератора L_o. Итак,

$$\|F_o(t)\| = \sup_{\varphi\in Y} \frac{\|F_o(t)\varphi\|_Y}{\|\varphi\|_Y} = \sup_{\varphi\in Y} \frac{\sup_{q\in G} |\psi_{s(t)}(q)[F(t)E(\varphi)](q)|}{\|E(\varphi)\|_X} \le \sup_{\varphi\in X} \frac{\|F(t)\varphi\|_X}{\|\varphi\|_X} \le e^{at}.$$

Теперь проверим сильную непрерывность семейства $(F_o(t))_{t\ge 0}$. Во-первых, для любой $\varphi \in Y$

$$\lim_{t\to 0} \|F_o(t)\varphi - \varphi\|_Y = \lim_{t\to 0} \sup_{q\in G} \big|\psi_{s(t)}(q)[F(t)E(\varphi)](q) - \varphi(q)\big| =$$

$$= \lim_{t\to 0} \sup_{q\in G} \big|\psi_{s(t)}(q)\big([F(t)E(\varphi)](q) - E(\varphi)(q)\big) + \varphi(q)[\psi_{s(t)}(q) - 1]\big| \le$$

$$\le \lim_{t\to 0} \|F(t)E(\varphi) - E(\varphi)\|_X + \lim_{t\to 0} \sup_{q\in \overline{G}\setminus G_{s(t)}} |\varphi(q)| = 0$$

в силу сильной непрерывности семейства $(F(t))_{t\ge 0}$ на пространстве X и равномерной непрерывности φ на компакте $\overline{G} \setminus G_{s(t)}$. Во-вторых, для любого $t^* > 0$ и для любой $\varphi \in Y$

$$\lim_{t\to t^*} \|F_o(t)\varphi - F_o(t^*)\varphi\|_Y = \lim_{t\to t^*} \sup_{q\in G} \big|\psi_{s(t)}(q)[F(t)E(\varphi)](q) - \psi_{s(t^*)}(q)[F(t^*)E(\varphi)](q)\big| =$$

$$= \lim_{t\to t^*} \sup_{q\in G} \big|\psi_{s(t)}(q)\big([F(t)E(\varphi)](q) - [F(t^*)E(\varphi)](q)\big) + (\psi_{s(t)}(q) - \psi_{s(t^*)}(q))[F(t^*)E(\varphi)](q)\big| \le$$

$$\le \lim_{t\to 0} \|\psi_{s(t)}\|_Y \cdot \|[F(t)E(\varphi)] - [F(t^*)E(\varphi)]\|_X + \|F(t^*)E(\varphi)\|_X \cdot \|\psi_{s(t)} - \psi_{s(t^*)}\|_Y = 0.$$

Пусть теперь $\varphi \in D_o$. Найдем

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{F_o(t)\varphi-\varphi}{t}-L_o\varphi\right\|_Y=\lim_{t\to 0}\sup_{q\in\overline{G}}\left|\frac{F_o(t)\varphi(q)-\varphi(q)}{t}-L_o\varphi(q)\right|.$$

Отметим, что

$$\left|\frac{F_o(t)\varphi(q)-\varphi(q)}{t}-L_o\varphi(q)\right|=\begin{cases}\left|\dfrac{[F(t)E(\varphi)](q)-\varphi(q)}{t}-L\varphi(q)\right|, & q\in G_{s(t)};\\ \left|\dfrac{\psi_{s(t)}(q)[F(t)E(\varphi)](q)-\varphi(q)}{t}-L\varphi(q)\right|, & q\in G\setminus G_{s(t)};\\ 0, & q\in\partial G.\end{cases}$$

При этом

$$\sup_{q\in G_{s(t)}}\left|\frac{[F(t)E(\varphi)](q)-E(\varphi)(q)}{t}-L\varphi(q)\right|\le\left\|\frac{F(t)E(\varphi)-E(\varphi)}{t}-L(E(\varphi))\right\|_X\to 0$$

при $t\to 0$. Кроме того,

$$\sup_{q\in G\setminus G_{s(t)}}\left|\frac{\psi_{s(t)}(q)[F(t)E(\varphi)](q)-\varphi(q)}{t}-L\varphi(q)\right|=$$

$$=\sup_{q\in G\setminus G_{s(t)}}\left|\frac{\psi_{s(t)}[F(t)E(\varphi)]-\psi_{s(t)}\varphi+\psi_{s(t)}\varphi-\varphi}{t}(q)-L\varphi(q)\right|\le$$

$$\le\sup_{q\in G\setminus G_{s(t)}}\left|\psi_{s(t)}(q)\left[\frac{F(t)E(\varphi)(q)-E(\varphi)(q)}{t}-L(E(\varphi))(q)\right]\right|+$$

$$+\sup_{q\in G\setminus G_{s(t)}}\left|L(E(\varphi))(q)[\psi_{s(t)}(q)-1]\right|+\sup_{q\in G\setminus G_{s(t)}}\left|\varphi(q)\frac{\psi_{s(t)}(q)-1}{t}\right|\le$$

$$\le\left\|\frac{[F(t)E(\varphi)]-E(\varphi)}{t}-L(E(\varphi))\right\|_X+\sup_{q\in\overline{G}\setminus G_{s(t)}}\left|L(E(\varphi))(q)\right|+\sup_{q\in G\setminus G_{s(t)}}\frac{|\varphi(q)|}{t}\longrightarrow 0$$

при $t\to 0$.

Действительно,

$$\left\|\frac{[F(t)E(\varphi)]-E(\varphi)}{t}-L(E(\varphi))\right\|_X\to 0$$

при $t\to 0$, так как $E(D_o)\subset D$ и при всех $\varphi\in D$ в предположениях теоремы

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{F(t)\varphi-\varphi}{t}-L\varphi\right\|_X=0.$$

Учитывая, что $L(E(\varphi))(q)=0$ при $q\in\partial G$ для любой $\varphi\in D_o\subset \mathrm{Dom}(L_o)$, в силу равномерной непрерывности функции $L(E(\varphi))$ на компакте $\overline{G}\setminus G_{s(t)}$, получаем

$$\lim_{t\to 0}\sup_{q\in\overline{G}\setminus G_{s(t)}}\left|L(E(\varphi))(q)\right|=0.$$

Далее, для любого $q\in G\setminus G_{s(t)}$ существует хотя бы одна точка $x_q\in\partial G$, такая, что $\mathrm{dist}(q,x_q)=\mathrm{dist}(q,\partial G)\le s(t)=o(t)$ при $t\to 0$. Так как $\varphi\in D_o$, то $E(\varphi)\in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ и по формуле Тейлора $\varphi(q)=E(\varphi)(q)=E(\varphi)(x_q)+E(\varphi)^{(1)}(z)(q-x_q)$, где $z=\vartheta q+(1-\vartheta)x_q$

для некоторого $\vartheta \in [0,1]$. Следовательно,

$$\sup_{q\in G\setminus G_{s(t)}} \frac{|\varphi(q)|}{t} \le \frac{s(t)}{t}\left\|E(\varphi)^{(1)}\right\|_X \to 0$$

при $t \to 0$. Таким образом, $\lim\limits_{t\to 0}\left\|\dfrac{F_o(t)\varphi-\varphi}{t} - L_o\varphi\right\|_Y = 0$, и, значит, выполнены все требования теоремы Чернова для семейства $(F_o(t))_{t\ge 0}$. Следовательно, по теореме Чернова это семейство эквивалентно полугруппе $(T_t^o)_{t\ge 0}$, разрешающей задачу Коши — Дирихле (19). Теорема доказана.

Пример 9. Пусть оператор L задан формулой (8), причем коэффициенты являются функциями класса $C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ для некоторого $\alpha \in (0,1)$, матрица $A(q)$ симметрична при всех $q \in \mathbb{R}^d$ и оператор Δ_A равномерно эллиптичен. Пусть также выполнено предположение 1. В качестве семейства $(F(t))_{t\ge 0}$ операторов на пространстве X рассмотрим семейство, заданное формулой (15), а в качестве D — множество $C_c^{2,\alpha}(\mathbb{R}^d)$. Следовательно, $D_o = \{\varphi \in C^{2,\alpha}(G)\colon \varphi,\ L\varphi \in Y\}$. Пусть граница области G является гладкой класса $C^{4,\alpha}$ (тогда предположения 2, 3 и 4 верны, см. [16]). Следовательно, по теоремам 7 и 8 решение задачи Коши — Дирихле (19) может быто получено по следующей формуле:

$$\begin{aligned} f(t,q_0) &= T_t^o f_0(q_0) = \lim_{n\to\infty}[F_o(t/n)]^n f_0(q_0) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\cdots\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\prod_{k=1}^n \psi_{s(t/n)}(q_{k-1})\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^n A^{-1}b(q_{k-1})\cdot(q_{k-1}-q_k)\right)\times \\ &\quad\times\exp\left(\frac{t}{n}\sum_{k=1}^n c(q_{k-1})\right)\exp\left(-\frac{t}{2n}\sum_{k=1}^n A^{-1}(q_{k-1})b(q_{k-1})\cdot b(q_{k-1})\right)\times \\ &\quad\times E(\varphi)(q_n)p_A(t/n,q_0,q_1)\cdots p_A(t/n,q_{n-1},q_n)\,dq_1\ldots dq_n, \end{aligned} \tag{21}$$

Упростим последнее выражение. Пусть χ_G индикатор области G, т.е. $\chi_G(x)=1$ при $x\in G$, $\chi_G(x)=0$ при $x\notin G$. Ни скорость сходимости $s(t)\to 0$ (если эта скорость не медленнее, чем $o(t)$), ни выбор семейства $(\psi_{s(t)})_{t>0}$, аппроксимирующего функцию χ_G при $t\to 0$, не меняют предел в формуле (21). Так как функции $\psi_{s(t)}$ гладкие и имеют компактные носители в G, а функция $E(\varphi)$ непрерывна и также имеет компактный носитель $K\subset\mathbb{R}^d$, то в формуле (21) фактически производится интегрирование непрерывной функции по компакту $K\times\overline{G}^{n-1}\subset(\mathbb{R}^d)^n$. Пусть теперь $t\in(0,T]$ для некоторого фиксированного $0<T<\infty$. Так как $\psi_{s(t)}\to\chi_G$ при $t\to 0$, то можно выбрать $s(t)$, $t\in(0,T]$, так, что при всех $n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} &\left|\psi_{s(t/n)}(x_0)\int\limits_K\int\limits_{G^{n-1}}\exp\left(-\sum_{k=1}^n A^{-1}b(q_{k-1})\cdot(q_{k-1}-q_k)\right)\exp\left(\frac{t}{n}\sum_{k=1}^n c(q_{k-1})\right)\times\right. \\ &\quad\times\exp\left(-\frac{t}{2n}\sum_{k=1}^n A^{-1}(q_{k-1})b(q_{k-1})\cdot b(q_{k-1})\right)\left(\prod_{k=2}^n(\psi_{s(t/n)}(q_{k-1})-\chi_G(q_{k-1}))\right)\times \\ &\quad\left.\times E(\varphi)(q_n)p_A(t/n,q_0,q_1)\cdots p_A(t/n,q_{n-1},q_n)\,dq_1\ldots dq_n\right|<\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Тогда из формулы (21) вытекает, что

$$T_t\varphi(q_0) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_K\int\limits_{\overline{G}^{n-1}} \exp\Big(-\sum_{k=1}^{n} A^{-1}b(q_{k-1})\cdot(q_{k-1}-q_k)\Big)\times$$
$$\times\exp\Big(-\frac{t}{2n}\sum_{k=1}^{n} A^{-1}(q_{k-1})b(q_{k-1})\cdot b(q_{k-1})\Big)\exp\Big(\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n} c(q_{k-1})\Big)\times$$
$$\times E(\varphi)(q_n)p_A(t/n,q_0,q_1)\cdots p_A(t/n,q_{n-1},q_n)\,dq_1\ldots dq_n \quad (22)$$

равномерно по $(x_0,t)\in G\times[0,\,T]$ для любого $T>0$. Кроме того,

$$\Big|\Big(\int\limits_{G^n}-\int\limits_K\int\limits_{G^{n-1}}\Big)\exp\Big(-\sum_{k=1}^{n} A^{-1}b(q_{k-1})\cdot(q_{k-1}-q_k)\Big)\times$$
$$\times\exp\Big(-\frac{t}{2n}\sum_{k=1}^{n} A^{-1}(q_{k-1})b(q_{k-1})\cdot b(q_{k-1})\Big)\exp\Big(\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n} c(q_{k-1})\Big)\times$$
$$\times E(\varphi)(q_n)p_A(t/n,q_0,q_1)\cdots p_A(t/n,q_{n-1},q_n)\,dq_1\ldots dq_n\Big|\le$$
$$\le\exp\Big(t\max_{y\in\overline{G}}\{c(y)\}\Big)\Big(\sup_{y\in\overline{G},z\in K\setminus G}\exp(A^{-1}(y)b(y)\cdot(z-y))\Big)\times$$
$$\times\sup_{y\in\overline{G}}\int\limits_{K\setminus G}p_A(t/n,y,z)|E(\varphi)(z)|dz\to 0$$

при $n\to\infty$. Действительно, пусть $\varepsilon>0$ и G_δ — δ-окрестность области G в $\mathbb{R}^d$, $\delta>0$. Так как функция $E(\varphi)$ непрерывна на $\mathbb{R}^d$ и обращается в ноль на ∂G, то существует $\delta>0$, такое, что $|E(\varphi)|\le\epsilon/2$ на $G_\delta\setminus G$. Тогда

$$\sup_{y\in\overline{G}}\int\limits_{K\setminus G}p_A(t/n,y,z)|E(\varphi)(z)|\,dz\le$$
$$\le\sup_{y\in\overline{G}}\int\limits_{G_\delta\setminus G}p_A(t/n,y,z)|E(\varphi)(z)|\,dz+\sup_{y\in\overline{G}}\int\limits_{K\setminus G_\delta}p_A(t/n,y,z)|E(\varphi)(z)|\,dz\le$$
$$\le\frac{\varepsilon}{2}+\sup_{z\in K}|E(\varphi)(z)|\sup_{y\in\overline{G}}\int\limits_{K\setminus G_\delta}p_A(t/n,y,z)dz. \quad (23)$$

В силу быстрого убывания гауссовской экспоненты p_A, для выбранного выше $\delta>0$ существует $N\in\mathbb{N}$ такое, что при всех $n\ge N$ последнее слагаемое в формуле (23) мажорируется константой $\epsilon/2$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть оператор L задан формулой (8), причем коэффициенты являются функциями класса $C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ для некоторого $\alpha\in(0,1)$, матрица $A(q)$ симметрична при всех $q\in\mathbb{R}^d$ и оператор Δ_A равномерно эллиптичен. Пусть выполнено предположение 1. Кроме того, пусть граница области G является гладкой класса $C^{4,\alpha}$. Тогда решение задачи Коши —

Дирихле (19) может быто получено по следующей формуле Фейнмана:

$$f(t,q_0) = T_t^o f_0(q_0) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_G \cdots \int\limits_G \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} A^{-1} b(q_{k-1}) \cdot (q_{k-1} - q_k) \right) \times$$
$$\times \exp\left(\frac{t}{n} \sum_{k=1}^{n} c(q_{k-1}) \right) \exp\left(-\frac{t}{2n} \sum_{k=1}^{n} A^{-1}(q_{k-1}) b(q_{k-1}) \cdot b(q_{k-1}) \right) \times$$
$$\times \varphi(q_n) p_A(t/n, q_0, q_1) \cdots p_A(t/n, q_{n-1}, q_n)\, dq_1 \ldots dq_n, \quad (24)$$

З а м е ч а н и е 20. Пусть $f_0 \in \mathrm{Dom}(L_o)$ и $0 < T < \infty$. Тогда решение задачи Коши — Дирихле (19) при $t \in [0, T]$ может быть представлено с помощью формулы Фейнмана — Каца (см. [52], лемма 3.1, теорема 3.3):

$$f(t,q_0) = \mathbb{E}^{q_0}\left[\exp\left(\int\limits_0^t c(\xi_\tau)\, d\tau \right) f_0(\xi_t) \,\middle|\, t < \tau_G \right], \quad q_0 \in G, \quad t \in (0,T), \quad (25)$$

где $\mathbb{E}^{q_0}$ — математическое ожидание начинающегося в точке $q \in G$ диффузионного процесса $(\xi_t)_{0<t<T}$ с переменной матрицей диффузии $A(\cdot)$, сносом $b(\cdot)$ и поглощением на границе области; τ_G — время первого выхода $(\xi_t)_{0<t<T}$ из G. Таким образом, конечномерные интегралы в формуле Фейнмана (24) дают аппроксимации функционального интеграла в формуле Фейнмана — Каца (25), причем эти аппроксимации содержат интегралы только от элементарных функций и не содержат переходные плотности данного диффузионного процесса.

З а м е ч а н и е 21. Аналогичным образом, решение поставленной задачи Коши — Дирихле (19) может быть найденно по формулам Фейнмана, построенным с помощью шести семейств операторов, введенных в теореме 6.

З а м е ч а н и е 22. Теорема 8 может быть обобщена в следующих направлениях. Во-первых, можно рассматривать неограниченные области в $\mathbb{R}^d$ и по-прежнему использовать вложение $C_0(\overline{G})$ в $C_c(\mathbb{R}^d)$ со свойствами из предположения 3. Во-вторых, в качестве объемлющего банахова пространства X можно брать не пространство $C_\infty(\mathbb{R}^d)$, а какое-либо другое пространство функций (с нормой $\|\cdot\|_\infty$) — такое, в которое пространство $Y = (C_0(\overline{G}), \|\cdot\|_\infty)$ вкладывается с сохранением свойств, указанных в предположении 3, причем оператор L с надлежащей областью определения является генератором сильно непрерывной полугруппы. Более того, можно рассматривать другие пары банаховых пространств X и Y, например $Y = L_2(G) \subset X = L_2(\mathbb{R}^d)$. В-третьих, аналогичным образом можно рассматривать и начально-краевые задачи в области риманова многообразия. В-четвертых, теорема 8 может быть обобщена и на случай нелокальных псевдо-дифференциальных операторов L.

Заключение

В настоящей работе описывается подход к решению начальных и начально-краевых задач для эволюционных уравнений, основанный на представлении соответствующих эволюционных полугрупп с помощью формул Фейнмана. В статье обсуждаются некоторые методы построения формул Фейнмана для различных эволюционных полугрупп, приведены конкретные примеры решения эволюционных уравнений. В частности, получены формулы Фейнмана для эволюционных полугрупп, порожденных мультипликативными возмущениями генераторов некоторых исходных полугрупп. При этом рассматриваются полугруппы на некотором банаховом пространстве непрерывных функций, определенных на произвольном метрическом пространстве; формулы Фейнмана строятся с помощью семейств операторов, эквивалентных по Чернову исходным, невозмущенным полугруппам. Настоящий результат обобщает некоторые результаты работ [4] и [23]. Подход к построению формул Фейнмана для полугрупп с мультипликативно и аддитивно возмущенными генераторами иллюстрируется на примерах задачи Коши для уравнения Шредингера, аппроксимации переходных вероятностей некоторых марковских случайных процессов. Далее в работе рассматривается более широкий класс аддитивных и мультипликативных возмущений конкретного генератора — оператора Лапласа. При этом выводятся формулы Фейнмана для решения задачи Коши для параболического уравнения второго порядка с неограниченными переменными коэффициентами. Кроме того, в статье описывается метод построения формул Фейнмана для решения начально-краевой задачи Коши — Дирихле для дифференциального уравнения параболического типа. Метод также иллюстрируется на примере параболического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Настоящие результаты обобщают некоторые из результатов работы [21]. В статье также обсуждаются некоторые формулы Фейнмана — Каца и интегралы Фейнмана, совпадающие с полученными формулами Фейнмана.

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки Российской Федерации (грант № 14.B37.21.0370) и гранта Президента Российской Федерации (грант МК-4255.2012.1).

Список литературы

1. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 728 с.
2. Бутко Я.А. Представления эволюционных полугрупп с помощью формул Фейнмана и интегралов Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 2. Режим доступа: http://technomag.bmstu.ru/doc/315838.html (дата обращения 01.02.2014)
3. Бутко Я.А. Формулы Фейнмана и функциональные интегралы для диффузии со сносом в области многообразия // Математические заметки. 2008. Т. 83, № 3. С. 333–349. DOI: 10.4213/mzm3772
4. Бутко Я.А. Формула Фейнмана для полугрупп с мультипликативно возмущенными генераторами // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2011. № 10. Режим доступа: http://technomag.bmstu.ru/doc/239563.html (дата обращения 01.02.2014).

5. Бутко Я.А., Гротхаус М., Смолянов О.Г. Формула Фейнмана для параболического уравнения второго порядка в области // Доклады Академии Наук. 2008. Т. 421, № 6. С. 727–732.
6. Бутко Я.А., Дурягин А.В. Формулы Фейнмана для семейства параболических уравнений, соответствующих тау-квантованию квадратичной функции Гамильтона // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2011. № 11. Режим доступа: http://technomag.bmstu.ru/doc/251251.html (дата обращения 01.02.2014).
7. Бутко Я.А., Морозов А.В. Представление решения задачи Коши — Неймана для параболического уравнения на полупрямой с помощью лагранжевой формулы Фейнмана // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2011. № 11. Режим доступа: http://technomag.bmstu.ru/doc/246219.html (дата обращения 01.02.2014).
8. Бутко Я.А., Смолянов О.Г. Формулы Фейнмана в квантовой и стохастической динамике // Современные проблемы математики и механики. 2011. Т. 6, № 1. С. 61–75.
9. Бутко Я.А., Смолянов О.Г., Шиллинг Р.Л. Формулы Фейнмана для феллеровских полугрупп // Доклады Академии Наук. 2010. Т. 434, № 1. С. 7–11.
10. Смолянов О.Г., Толстыга Д.С., Вайцзеккер Х. Фейнмановское описание одномерной динамики частиц с кусочно-непрерывной зависимостью массы от координаты // Доклады Академии Наук. 2011. Т. 441, № 3. С. 295–298.
11. Волконский В.А. Аддитивные функционалы от марковских процессов // Труды Московского Математического Общества. 1960. Т. 9. С. 143–189.
12. Обрезков О.О. Формула Фейнмана для задачи Коши — Дирихле в ограниченной области // Математические заметки. 2005. Т. 77, № 2. С. 316–320. DOI: 10.4213/mzm2493
13. Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Скорость сходимости Фейнмановских аппроксимаций полугрупп, порождаемых гамильтонианом осциллятора // Теоретическая и математическая физика. 2012. Т. 172, № 1. С. 122–137.
14. Портенко Н.И., Скороход А.В., Шуренков В.М. Марковские процессы // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики». Фундаментальные направления. Т. 46. Теория вероятностей-4. М.: ВИНИТИ, 1989. 248 с.
15. Albeverio S., Brzezniak Z. Oscillatory integrals on Hilbert spaces and Schrödinger equation with magnetic fields // J. Math. Phys. 1995. Vol. 36, no. 5. P. 2135–2156.
16. Baur B., Conrad F., Grothaus M. Smooth contractive embeddings and application to Feynman formula for parabolic equations on smooth bounded domains // Communications in Statistics: Theory and Methods. 2011. Vol. 40, no. 19–20. P. 3452–3464.
17. Brezis H., Pazy A. Semigroups of Nonlinear Contractions on Convex Sets // J. Func. Anal. 1970. Vol. 6. P. 237–281.
18. Böttcher B. On the construction of Feller processes with unbounded coefficients // Electronic Communications in Probability. 2011. Vol. 16. P. 545–555.

19. Böttcher B., Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Feynman formulae and path integrals for some evolutionary semigroups related to tau-quantization // Rus. J. Math. Phys. 2011. Vol. 18, no. 4. P. 387–399.

20. Butko Ya.A. Function integrals corresponding to a solution of the Cauchy-Dirichlet problem for the heat equation in a domain of a Riemannian manifold // J. of Math. Sci. 2008. Vol. 151, no. 1. P. 2629–2638.

21. Butko Ya., Grothaus M., Smolyanov O.G. Lagrangian Feynman Formulae for Second Order Parabolic Equations in Bounded and Unbounded Domains // Inf. Dim. Anal. Quant. Probab. 2010. Vol. 13, no. 3. P. 377–392.

22. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Hamiltonian Feynman-Kac and Feynman formulae for dynamics of particles with position-dependent mass // Int. J. Theor. Phys. 2011. Vol. 50. P. 2009–2018.

23. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Lagrangian and Hamiltonian Feynman formulae for some Feller semigroups and their perturbations // Inf. Dim. Anal. Quant. Probab. Rel. Top. 2012. Vol. 15, no. 3. 26 p. DOI: 10.1142/S0219025712500154

24. Chernoff P. Note on product formulas for operator semigroups // J. Func. Anal. 1968. Vol. 2. P. 238–242.

25. Chernoff P. Product formulas, nonlinear semigroups and addition of unbounded operators // Mem. Am. Math. Soc. 1974. Vol. 140. 121 p.

26. Dorroh J.R. Contraction semi-groups in a function space // Pacific J.Math. 1966. Vol. 19, no. 1. P. 35–38.

27. Engel K.J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. Springer, 1995. 586 p.

28. Ethier S.E., Kurtz T.G. Markov Processes: Characterization and Convergence. New York: Wiley, 1986. 534 p. (Wiley Ser. Probab. Math. Stat.).

29. Feynman R.P. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics // Rev. Mod. Phys. 1948. Vol. 20. P. 367–387.

30. Feynman R.P. An Operator Calculus Having Applications in Quantum Electrodynamics // Phys. Rev. 1951. Vol. 84. P. 108–128.

31. Freidlin M. Functional integration and partial differential equations. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1985. 545 p.

32. Friedman A. Partial differential equations of parabolic type. Prentice-Hall, 1964. 427 c.

33. Gustafson K., Lumer G. Multiplicative perturbation of semigroup generators // Pacific J. Math. 1972. Vol. 41, no. 3. P. 731–742.

34. Jacob N. Pseudo-differential operators and Markov processes. Vol. I–II. Imperial College Press, 2001. 946 p.

35. Karatzas I., Shreve S. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer, 1991. 470 p.

36. Kühnemund F. Bi-continuous semigroups on spaces with two topologies: theory and applications. Dissertation der Mathematischen Fakultät der Eberhard–Karls–Universität Tübingen zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften, 2001. 104 p.
37. Lunardi A. Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems. Birkhäuser, 1995. 424 p.
38. Lumer G. Perturbation de générateurs infinitésimaux du type "changement de temps" // Ann. Inst. Fourier. 1974. Vol. 23, no. 4. P. 271–279.
39. Obrezkov O., Smolyanov O.G., Truman A. The Generalized Chernoff Theorem and Randomized Feynman Formula // Doklady Math. 2005. Vol. 71, no. 1. P. 105–110.
40. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1983. 276 p.
41. Plyashechnik A.S. Feynman formulas for second-order parabolic equations with variable coefficients // Rus. J. Math. Phys. 2013. Vol. 20, no. 3. P. 377–379.
42. Plyashechnik A.S. Feynman Formula for Schrödinger-type equations with time- and space-dependent coefficients // Rus. J. Math. Phys. 2012. Vol. 19, no. 3. P. 340–359.
43. Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. II. Academic Press, 1980. 361 p.
44. Sakbaev V.G., Smolyanov O.G. Dynamics of a Quantum Particle with Discontinuous Position-Dependent Mass // Doklady Math. 2010. Vol. 82, no. 1. P. 630–634.
45. Sato K. Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge Univ. Press, 1999. 486 p.
46. Smolyanov O.G. Feynman type formulae for quantum evolution and diffusion on manifolds and graphs // Quant. Bio-Informatics, World Sc. 2010. Vol. 3. P. 337–347.
47. Smolyanov O.G., Shamarov N.N. Feynman and Feynman-Kac formulae for evolution equations with Vladimirov operator // Doklady Math. 2008. Vol. 77, no. 3. P. 345–349.
48. Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula // J. Math. Phys. 2002. Vol. 43, no. 10. P. 5161–5171.
49. Smolyanov O.G., Weizsäcker H., Wittich O. Chernoff's theorem and the construction of semigroups // Evolution Equations: Applications to Physics, Industry, Life Sciences and Economics. Birkhäuser, Prog. Nonlinear Differ. Eq. Appl. 2003. Vol. 55. P. 349–358.
50. Smolyanov O.G., Weizsäcker H., Wittich O. Chernoff's Theorem and Discrete Time Approximations of Brownian Motion on Manifolds // Potent. Anal. 2007. Vol. 26, no. 1. P. 1–29.
51. Weizsaecker H., Winkler G. Stochastic Integrals: an Introduction. Vieweg, 1990. 332 p.
52. Zhang G., Jiang M. Parabolic equations and Feynman-Kac formula on general bounded domains // Sci. in China. 2001. Vol. 44, no. 3. P. 311–329.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

Feynman formulae for evolution semigroups

03, March 2014

DOI: 10.7463/0314.0701581

Butko Ya. A.

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russian Federation
yanabutko@yandex.ru

The paper systematically describes an approach to solution of initial and initial-boundary value problems for evolution equations based on the representation of the corresponding evolution semigroups with the help of Feynman formulae. The article discusses some of the methods of constructing Feynman formulae for different evolution semigroups, presents specific examples of solutions of evolution equations. In particular, Feynman formula is obtained for evolution semigroups generated by multiplicative perturbations of generators of some initial semigroups. In this case semigroups on a Banach space of continuous functions defined on an arbitrary metric space are considered; Feynman formulae are constructed with the help of operator families, which are Chernoff equivalent to the initial unperturbed semigroups. The present result generalizes the author's paper "Feynman formula for semigroups with multiplicative perturbed generators" and some of the results of the joint with O.G. Smolyanov and R.L. Schilling paper "Lagrangian and Hamiltonian Feynman formulae for some Feller processes and their perturbations". The approach to the construction of Feynman formulae for semigroups with multiplicative and additive perturbed generators is illustrated with examples of the Cauchy problem for the Schrodinger equation, the approximation of transition probabilities of some Markov processes.

Further, a wider class of additive and multiplicative perturbations of a particular generator — the Laplace operator — is considered in the paper. And Feynman formula for the solution of the Cauchy problem for a second order parabolic equation with unbounded variable coefficients is proved. In addition, the article describes a method for constructing Feynman formulae for solutions of the Cauchy — Dirichlet problem for parabolic differential equations. The method is also illustrated by a second order parabolic equation with variable coefficients. These results generalize some of the results of the work by Butko, Grothaus and Smolyanov "Lagrangian Feynman formulae for Second Order Parabolic Equations in Bounded and Unbounded Domains". The article also discusses some of the Feynman — Kac formulae and Feynman integrals related to the obtained Feynman formulae.

Publications with keywords: Feynman formula, multiplicative perturbations, equation of evolution, evolution semigroups, Feynman — Kac formulae, additive perturbation, approximation of transition probabilities, Schrödinger equation
Publications with words: Feynman formula, multiplicative perturbations, equation of evolution, evolution semigroups, Feynman — Kac formulae, additive perturbation, approximation of transition probabilities, Schrödinger equation

References

1. Bogachev V.I., Smolyanov O.G. *Deystvitel'nyy i funktsional'nyy analiz: universitetskiy kurs* [Real and functional analysis: university course]. Moscow-Izhevsk, Publ. of NITs "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika", 2011. 728 p. (in Russian).
2. Butko Ya.A. [Representations of evolution semigroups by Feynman formulae and phase space Feynman path integrals]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana — Science and Education of the Bauman MSTU*, 2012, no. 2. Available at: http://technomag.bmstu.ru/doc/315838.html, accessed 01.02.2014. (in Russian).
3. Butko Ya.A. [Feynman Formulas and Functional Integrals for Diffusion with Drift in a Domain on a Manifold]. *Matematicheskie zametki*, 2008, vol. 83, no. 3, pp. 333–349. DOI: 10.4213/mzm3772 (English translation: *Mathematical Notes*, 2008, vol. 83, no. 3-4, pp. 301–316. DOI: 10.1134/S0001434608030024).
4. Butko Ya.A. [Feynman formula for semigroups with multiplicatively perturbed Generators]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana — Science and Education of the Bauman MSTU*, 2011, no. 10. Available at: http://technomag.bmstu.ru/doc/239563.html, accessed 01.02.2014. (in Russian).
5. Butko Ya.A., Grotkhaus M., Smolyanov O.G. [Feynman formula for a class of second order parabolic equations in a bounded domain]. *Doklady Akademii Nauk*, 2008, vol. 421, no. 6, pp. 727–732. (English translation: *Doklady Mathematics*, 2008, vol. 78, no. 1, pp. 590–595. DOI: 10.1134/S1064562408040327).
6. Butko Ya.A., Duryagin A.V. [Feynman formulae for a family of parabolic equations corresponding to the tau-quantization of a quadratic Hamilton function]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana — Science and Education of the Bauman MSTU*, 2011, no. 11. Available at: http://technomag.bmstu.ru/doc/251251.html, accessed 01.02.2014. (in Russian).
7. Butko Ya.A., Morozov A.V. [Representation of the solution of the Cauchy–Neumann problem for a parabolic equation on a ray by a Lagrangian Feynman formula]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana — Science and Education of the Bauman MSTU*, 2011, no. 11. Available at: http://technomag.bmstu.ru/doc/246219.html, accessed 01.02.2014. (in Russian).
8. Butko Ya.A., Smolyanov O.G. [Formuly Feynmana v stokhasticheskoy i kvantovoy dinamike]. *Sovremennye problemy matematiki i mekhaniki*, 2011, vol. 6, no. 1, pp. 61–75. (in Russian).

9. Butko Ya.A., Smolyanov O.G., Shilling R.L. [Feynman formulae for Feller semigroups]. *Doklady Akademii Nauk*, 2010, vol. 434, no. 1, pp. 7–11. (English translation: *Doklady Mathematics*, 2010, vol. 82, no. 2, pp. 679–683. DOI: 10.1134/S1064562410050017).

10. Smolyanov O.G., Tolstyga D.S., Weizsacker H. [Feynman description of the one-dimensional dynamics of particles whose masses piecewise continuously depend on coordinates]. *Doklady Akademii Nauk*, 2011, vol. 441, no. 3, pp. 295–298. (English translation: *Doklady Mathematics*, 2011, vol. 84, no. 3, pp. 804–807. DOI: 10.1134/S1064562411070209).

11. Volkonskiy V.A. [Additive functionals of Markov processes]. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 1960, vol. 9, pp. 143–189. (in Russian).

12. Obrezkov O.O. [Feynman's formula for the Cauchy-Dirichlet problem in bounded domains]. *Matematicheskie zametki*, 2005, vol. 77, no. 2. pp. 316–320. DOI: 10.4213/mzm2493 (English translation: *Mathematical Notes*, 2005, vol. 77, no. 1–2, pp. 288–293. DOI: 10.1007/s11006-005-0029-8).

13. Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh., Smolyanov O.G. [Rate of convergence of Feynman approximations of semigroups generated by theoscillator Hamiltonian]. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, 2012, vol. 172, no. 1, pp. 122–137. (English translation: *Theoretical and Mathematical Physics*, 2012, vol. 172, no. 1, pp. 987–1000. DOI: 10.1007/s11232-012-0090-x).

14. Portenko N.I., Skorokhod A.V., Shurenkov V.M. [Markov processes]. *Itogi nauki i tekhniki. Seriya Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya*. T. 46. Teoriya veroyatnostey-4 [Results of science and technology. Series Modern Problems of Mathematics. Fundamental Directions. Vol. 46. Probability Theory-4]. Moscow, VINITI Publ., 1989. 248 p. (in Russian).

15. Albeverio S., Brzezniak Z. Oscillatory integrals on Hilbert spaces and Schrodinger equation with magnetic fields. *J. Math. Phys.*, 1995, vol. 36, no. 5, pp. 2135–2156.

16. Baur B., Conrad F., Grothaus M. Smooth contractive embeddings and application to Feynman formula for parabolic equations on smooth bounded domains. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 2011, vol. 40, no. 19–20, pp. 3452–3464.

17. Brezis H., Pazy A. Semigroups of Nonlinear Contractions on Convex Sets. *J. Func. Anal.*, 1970, vol. 6, pp. 237–281.

18. Böttcher B. On the construction of Feller processes with unbounded coefficients. *Electronic Communications in Probability*, 2011, vol. 16, pp. 545–555.

19. Böttcher B., Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Feynman formulae and path integrals for some evolutionary semigroups related to tau-quantization. *Rus. J. Math. Phys.*, 2011, vol. 18, no. 4, pp. 387–399.

20. Butko Ya.A. Function integrals corresponding to a solution of the Cauchy-Dirichlet problem for the heat equation in a domain of a Riemannian manifold. *J. of Math. Sci.*, 2008, vol. 151, no. 1, pp. 2629–2638.

21. Butko Ya., Grothaus M., Smolyanov O.G. Lagrangian Feynman Formulae for Second Order Parabolic Equations in Bounded and Unbounded Domains. *Inf. Dim. Anal. Quant. Probab.*, 2010, vol. 13, no. 3, pp. 377–392.
22. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Hamiltonian Feynman-Kac and Feynman formulae for dynamics of particles with position-dependent mass. *Int. J. Theor. Phys.*, 2011, vol. 50, pp. 2009–2018.
23. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Lagrangian and Hamiltonian Feynman formulae for some Feller semigroups and their perturbations. *Inf. Dim. Anal. Quant. Probab. Rel. Top.*, 2012, vol. 15, no. 3. 26 p. DOI: 10.1142/S0219025712500154
24. Chernoff P. Note on product formulas for operator semigroups. *J. Func. Anal.*, 1968, vol. 2, pp. 238–242.
25. Chernoff P. Product formulas, nonlinear semigroups and addition of unbounded operators. *Mem. Am. Math. Soc.*, no. 140. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1974. 121 p.
26. Dorroh J.R. Contraction semi-groups in a function space. *Pacific J. Math.*, 1966, vol. 19, no. 1, pp. 35–38.
27. Engel K.J., Nagel R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. Springer, 1995. 586 p.
28. Ethier S.E., Kurtz T.G. *Markov Processes: Characterization and Convergence*. New York, Wiley, 1986. 534 p. (Wiley Ser. Probab. Math. Stat.).
29. Feynman R.P. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 1948, vol. 20, pp. 367–387.
30. Feynman R.P. An Operator Calculus Having Applications in Quantum Electrodynamics. *Phys. Rev.*, 1951, vol. 84, pp. 108–128.
31. Freidlin M. *Functional integration and partial differential equations*. Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1985. 545 p.
32. Friedman A. Partial differential equations of parabolic type. Prentice-Hall, 1964. 427 p.
33. Gustafson K., Lumer G. Multiplicative perturbation of semigroup generators. *Pacific J. Math.*, 1972, vol. 41, no. 3, pp. 731–742.
34. Jacob N. *Pseudo-differential operators and Markov processes*. Vol. 1–2. Imperial College Press, 2001. 946 p.
35. Karatzas I., Shreve S. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, 1991. 470 p.
36. Kühnemund F. *Bi-continuous semigroups on spaces with two topologies: theory and applications*. Dissertation der Mathematischen Fakultät der Eberhard–Karls–Universität Tübingen zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften, 2001. 104 p.
37. Lunardi A. *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*. Birkhäuser, 1995. 424 p.

38. Lumer G. Perturbation de générateurs infinitésimaux du type “changement de temps”. *Ann. Inst. Fourier*, 1974, vol. 23, no. 4, pp. 271–279.

39. Obrezkov O., Smolyanov O.G., Truman A. The Generalized Chernoff Theorem and Randomized Feynman Formula. *Doklady Math.*, 2005, vol. 71, no. 1, pp. 105–110.

40. Pazy A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. New York, Springer-Verlag, 1983. 276 p.

41. Plyashechnik A.S. Feynman formulas for second-order parabolic equations with variable coefficients. *Rus. J. Math. Phys.*, 2013, vol. 20, no. 3, pp. 377–379.

42. Plyashechnik A.S. Feynman Formula for Schrodinger-type equations with time- and space-dependent coefficients. *Rus. J. Math. Phys.*, 2012, vol. 19, no. 3, pp. 340–359.

43. Reed M., Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 2*. Academic Press, 1980. 361 p.

44. Sakbaev V.G., Smolyanov O.G. Dynamics of a Quantum Particle with Discontinuous Position-Dependent Mass. *Doklady Math.*, 2010, vol. 82, no. 1, pp. 630–634.

45. Sato K. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge Univ. Press, 1999. 486 p.

46. Smolyanov O.G. Feynman type formulae for quantum evolution and diffusion on manifolds and graphs. *Quant. Bio-Informatics, World Sc.*, 2010, vol. 3, pp. 337–347.

47. Smolyanov O.G., Shamarov N.N. Feynman and Feynman-Kac formulae for evolution equations with Vladimirov operator. *Doklady Math.*, 2008, vol. 77, no. 3, pp. 345–349.

48. Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula. *J. Math. Phys.*, 2002, vol. 43, no. 10, pp. 5161–5171.

49. Smolyanov O.G., Weizsäcker H., Wittich O. Chernoff’s theorem and the construction of semigroups. In: *Evolution Equations: Applications to Physics, Industry, Life sciences and Economics*. Birkhäuser. *Prog. Nonlinear Differ. Eq. Appl.*, 2003, vol. 55, pp. 349–358.

50. Smolyanov O.G., Weizsäcker H., Wittich O. Chernoff’s Theorem and Discrete Time Approximations of Brownian Motion on Manifolds. *Potent. Anal.*, 2007, vol. 26, no. 1, pp. 1–29.

51. Weizsaecker H., Winkler G. *Stochastic Integrals: an Introduction*. Vieweg, 1990. 332 p.

52. Zhang G., Jiang M. Parabolic equations and Feynman-Kac formula on general bounded domains. *Sci. in China*, 2001, vol. 44, no. 3, pp. 311–329.