

Математическое моделирование теплопереноса в однонаправленном волокнистом композите

01, январь 2014

DOI: 10.7463/0114.0657262

Зарубин В.С., Зарубин С.В., Кувыркин Г.Н.

УДК 536.2

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
fn2@bmstu.ru

Введение

Армирование композита высокопрочными и высокомодульными волокнами существенно повышает его механические характеристики, благодаря чему такие волокнистые композиты находят широкое применение в технике в качестве современного конструкционного материала [1, 2]. Технологический процесс получения волокнистого композита как конструкционного материала часто совмещен по времени с изготовлением конструкции из этого материала [3, 4]. Среди таких композитов достаточно широко применяют однонаправленные композиты. По структуре однонаправленный волокнистый композит состоит из одинаково ориентированных в пространстве волокон, расположенных в отвержденном связующем, образующим матрицу композита.

Для теплонапряженных конструкций, на которые действуют интенсивные механические и тепловые нагрузки, помимо высоких механических свойств важны и определенные теплофизические характеристики конструкционного материала, от которых зависит температурное состояние конструкции. Среди таких характеристик важное место занимает теплопроводность, влияющая на процесс теплопереноса в композите.

Особенность однонаправленного волокнистого композита состоит в том, что его можно считать трансверсально изотропным материалом относительно оси, параллельной волокнам. Если такой композит рассматривать как однородный материал с осредненными по его объему эффективными характеристиками, то для описания процесса теплопереноса необходимо располагать значениями компонент тензора второго ранга эффективной теплопроводности. Компоненты этого тензора зависят от ряда параметров, которые входят в математические модели теплового взаимодействия волокон и матрицы в композите. Известны различные подходы к построению таких моделей [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14], позволяющих получить

оценки компонент этого тензора. Однако большинство моделей учитывают лишь объемное содержание волокон в композите и не рассматривают их взаимное расположение. Это приводит к значительному разбросу оценок эффективной теплопроводности композита в направлении, перпендикулярном волокнам (особенно при большом различии коэффициентов теплопроводности волокон и матрицы [15, 16]). Учет взаимного расположения волокон позволяет уточнить математическую модель теплопереноса в однонаправленном волокнистом композите, а ее количественный анализ дает возможность получить более точные оценки эффективной теплопроводности в этом направлении.

1. Математическая модель

Одна из главных осей тензора эффективной теплопроводности трансверсально изотропного однонаправленного волокнистого композита параллельна направлению расположения волокон. Эффективный коэффициент теплопроводности композита в этом направлении обозначим $\lambda_{\parallel}$. Две другие взаимно перпендикулярные главные оси этого тензора могут занимать произвольное положение в плоскости, перпендикулярной волокнам. В этой плоскости такой композит является изотропным, имеющим эффективный коэффициент теплопроводности λ . Таким образом, тензор второго ранга эффективной теплопроводности трансверсально изотропного однонаправленного волокнистого композита имеет две независимые компоненты $\lambda_{\parallel}$ и λ .

В работах [10, 13] на основе построенной математической модели переноса тепловой энергии в представительном элементе структуры однонаправленного волокнистого композита в форме достаточно протяженной в направлении расположения волокон цилиндрической составной частицы получены оценки величин $\lambda_{\parallel}$ и λ , которые можно представить соответственно в виде

$$\lambda_{\parallel}^* = \lambda_*(1 - C_V) + \lambda_{\parallel}^{\circ} C_V, \quad \lambda^* = \frac{\lambda_*(1 - C_V) + \lambda^{\circ}(1 + C_V)}{\lambda_*(1 + C_V) + \lambda^{\circ}(1 - C_V)}, \quad (1)$$

где λ_* — коэффициент теплопроводности изотропной матрицы; C_V — объемная концентрация волокон в композите; $\lambda_{\parallel}^{\circ}$ и λ° — коэффициенты теплопроводности волокна (в общем случае трансверсально изотропного) в продольном и поперечном направлениях соответственно. Величина $\lambda_{\parallel}^*$, определяемая первой формулой (1), совпадает с верхней оценкой величины $\lambda_{\parallel}$, которая следует из двойственной вариационной формулировки задачи стационарной теплопроводности [17, 18, 19] применительно к к представительному элементу композита. С этой оценкой достаточно хорошо совпадают и сравнительно немногочисленные экспериментальные данные по измерению величины $\lambda_{\parallel}$ [16, 20].

Формулы (1) сохраняют смысл во всем промежутке изменения C_V от 0 до 1, что предполагает возможность уменьшения радиуса волокон от некоторого конечного значения r_0 до бесконечно малого. При таком предположении сохраняет смысл значение $C_V = 1$, когда композит будет состоять только из волокон. Однако реальный однонаправленный волокнистый

композит обычно состоит из волокон примерно одинакового радиуса, что ограничивает их наибольшую возможную объемную концентрацию значением $C_V^* < 1$. Предельно плотная укладка цилиндрических волокон с круговым поперечным сечением одинакового радиуса соответствует значению $C_V^\Delta = \pi/(2\sqrt{3}) \approx 0,907$, когда центры поперечных сечений касающихся между собой соседних волокон одинакового радиуса расположены в вершинах равносторонних треугольников. Однако из условия прочности при растяжении композита в направлении волокон каждое волокно должно быть окружено связующим, образующим матрицу [3], и поэтому реальное значение $C_V < C_V^\Delta$.

Для величины λ^* , определяемой второй формулой (1), в интервале $(0; 1)$ изменения C_V при любых значениях $\lambda_* \neq \lambda^\circ$ справедливо соотношение

$$\lambda_+ = \lambda_*(1 - C_V) + \lambda^\circ C_V > \lambda^* > \frac{1}{(1 - C_V)/\lambda_* + C_V/\lambda^\circ} = \lambda_-,$$

которое также следует из двойственной вариационной формулировки задачи стационарной теплопроводности. При $C_V = 0$ и $C_V = 1$ это неравенство переходит соответственно в очевидные равенства $\lambda_\parallel^* = \lambda_*$ и $\lambda_\parallel^* = \lambda_\parallel^\circ$. Однако при промежуточных значениях C_V разность $\Delta\tilde{\lambda} = (\lambda_+ - \lambda_-)/\lambda_*$ верхней и нижней гарантированных оценок отношения $\tilde{\lambda} = \lambda/\lambda_*$, характеризующая возможную погрешность оценки этого отношения значением $\tilde{\lambda}^* = \lambda^*/\lambda_*$, может быть значительной. Эта разность возрастает по мере отклонения отношения $\bar{\lambda} = \lambda^\circ/\lambda_*$ от единицы, т. е. с увеличением различия между коэффициентами теплопроводности волокна в поперечном направлении и матрицы.

Наибольшего значения $\Delta\tilde{\lambda}$ достигает при

$$C_V^\bullet = \frac{1}{1 + 1/\sqrt{\bar{\lambda}}}$$

и равно

$$\Delta\tilde{\lambda}^\bullet = (1 - \sqrt{\bar{\lambda}})^2.$$

Для волокнистых композитов с металлической матрицей значение $\bar{\lambda}$ обычно не превышает по порядку величины единицу. Но в случае матрицы на полимерной основе и высокотеплопроводных волокон значение λ° может превосходить значение λ_* на несколько порядков. Например, для рассмотренного в работе [16] композита с полимерной матрицей и углеродными волокнами $\bar{\lambda} > 10^4$. Ясно, что в подобных случаях математическая модель теплопереноса в композите, на основе которой получена вторая формула (1), требует уточнения.

Один из путей уточнения оценок величины $\tilde{\lambda}$ состоит в построении математической модели, учитывающей взаимное расположение волокон в композите. Условием трансверсальной изотропии однонаправленного волокнистого композита может быть либо случайное (хаотическое) расположение параллельных волокон, либо упорядоченное, когда центры круглых поперечных сечений волокон одинакового радиуса расположены в узлах плоской сетки, одинаковые ячейки которой являются правильными многоугольниками, поскольку

ось, проходящая через центр таких многоугольников перпендикулярно их плоскости имеет порядок выше второго [21]. Ограничимся рассмотрением двух вариантов упорядоченного расположения волокон, соответствующих сеткам с квадратными ячейками и ячейками в виде правильных треугольников.

В случае квадратных ячеек со стороной $2l$ при касании соседних волокон $l = r_0$ максимально достижимое значение объемной концентрации волокон $C_V^\square = \pi/4 \approx 0,7854$. Тогда заданному значению $C_V \leq C_V^\square$ будет соответствовать относительный радиус волокна $\bar{r}_0 = r_0/l = \sqrt{4C_V/\pi}$. В этом случае повторяющийся элемент структуры композита представим в координатной плоскости $x_1 O x_2$ квадратной ячейкой (рис. 1) с длиной стороны, равной единице, содержащей четверть кругового поперечного сечения волокна с центром в начале координат и относительным радиусом $\bar{r}_0$. Стороны ячейки $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$ примем идеально теплоизолированными, а на сторонах $x_2 = 0$ и $x_2 = 1$ зададим температуры, равные соответственно нулю и T_0 .

рис.1

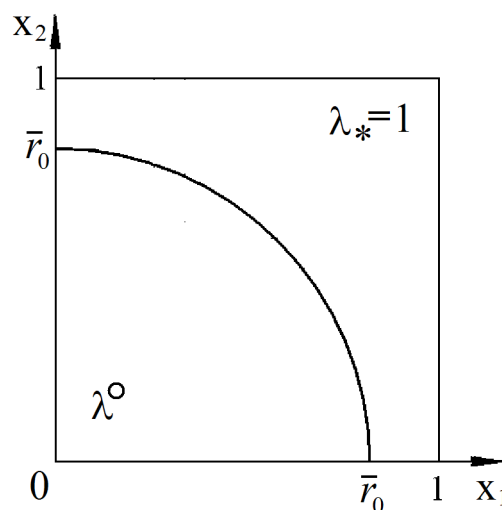


Рис. 1. Представительный элемент структуры композита в виде квадратной ячейки

Решение двумерной задачи стационарной теплопроводности при указанных граничных условиях позволит вычислить суммарный тепловой поток $Q^\square$ на стороне $x_2 = 1$ ячейки. Тогда при $T_0 = 1$ и $\lambda_* = 1$ относительный эффективный коэффициент теплопроводности $\tilde{\lambda}^\square = \lambda^\square/\lambda_*$ ячейки будет численно равен значению $Q_\square$. При использовании метода конечных элементов [22] решение задачи будет приближенным, но погрешность такого решения можно оценить интегрально по значению $\Delta\tilde{Q}^\square = |1 - Q_\square/Q^\square|$, где $Q_\square$ — суммарный тепловой поток на стороне $x_2 = 0$ ячейки. При допустимом с точки зрения точности значении $\Delta\tilde{Q}^\square$ можно принять $\tilde{\lambda}^\square = (Q^\square + Q_\square)/2$.

При расположении центров круговых поперечных сечений волокон одинакового радиуса в узлах сетки, ячейки которой являются одинаковыми правильными треугольниками, повторяющийся элемент структуры композита представим в координатной плоскости $x_1 O x_2$

прямоугольной ячейкой (рис. 2) с длинами сторон, равными 1 и $\sqrt{3}$. Эта ячейка содержит четверти поперечных сечений двух соседних волокон. Центр поперечного сечения одного из волокон помещен в начале координат, а центр поперечного сечения другого волокна расположен в противоположной вершине прямоугольника. При касании соседних волокон для относительного радиуса поперечного сечения волокна получим $\bar{r}_0 = 1$. Именно этому случаю соответствует предельное значение $C_V^\Delta = \pi/(2\sqrt{3})$ объемной концентрации волокон в композите. Заданному значению $C_V \leq C_V^\Delta$ соответствует относительный радиус волокна $\bar{r}_0 = \sqrt{2\sqrt{3}C_V/\pi}$.

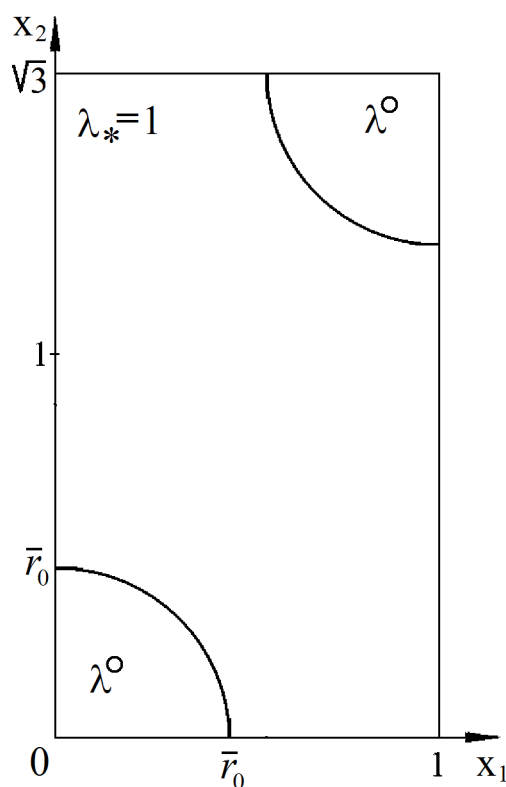


Рис. 2. Представительный элемент структуры композита в виде прямоугольной ячейки

Аналогично случаю квадратной ячейки ее стороны $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$ считаем идеально теплоизолированными, а на сторонах $x_2 = 0$ и $x_2 = \sqrt{3}$ зададим температуры, равные соответственно нулю и T_0 . Суммарный тепловой поток Q^Δ на стороне $x_2 = \sqrt{3}$ ячейки, вычисленный по результатам решения при заданных граничных условиях задачи стационарной теплопроводности, даст возможность затем найти относительный эффективный коэффициент теплопроводности $\tilde{\lambda}^\Delta = \lambda^\Delta/\lambda_*$ данной ячейки. Погрешность приближенного решения этой задачи методом конечных элементов при $T_0 = 1$ и $\lambda_* = 1$ можно оценить интегрально по значению $\Delta\tilde{Q}^\Delta = |1 - Q_\Delta/Q^\Delta|$, где Q_Δ — суммарный тепловой поток на стороне $x_2 = 0$ ячейки. При допустимом с точки зрения точности значении $\Delta\tilde{Q}^\Delta$ следует принять $\tilde{\lambda}^\Delta = (Q^\Delta + Q_\Delta)\sqrt{3}/2$, поскольку высота данной ячейки равна $\sqrt{3}$.

2. Результаты расчетов

Перед количественным анализом представленной выше математической модели была проведена дискретизация квадратной и прямоугольной ячеек сетками четырехузловых билинейных конечных элементов. Квадратная ячейка была разбита на 92743 элемента с общим числом 93236 узлов, а прямоугольная ячейка — на 161286 элементов с общим числом 161963 узла. Значения $\Delta\tilde{Q}^\square$ и $\Delta\tilde{Q}^\Delta$ при решении задач стационарной теплопроводности методом конечных элементов на указанных сетках возрастали по мере отклонения значения $\bar{\lambda}$ от единицы и увеличения относительного радиуса $\bar{r}_0$ поперечного сечения волокна, но при $\bar{\lambda} = 0,01$ и $\bar{\lambda} = 100$ не превысили 10^{-5} для квадратной ячейки и 10^{-4} в случае прямоугольной ячейки.

Результаты количественного анализа при $\bar{\lambda} = 0,1$ и $\bar{\lambda} = 10$ в виде графиков зависимостей от C_V величин $\tilde{\lambda}^\square$ и $\hat{\lambda}^\square = \lambda^\square/\lambda^\circ$ (сплошные кривые со светлыми и черными квадратами), $\tilde{\lambda}^\Delta$ и $\hat{\lambda}^\Delta = \lambda^\Delta/\lambda^\circ$ (сплошные кривые со светлыми черными треугольниками) приведены на рис. 3. Сплошные и штриховые кривые соответствуют зависимостям $\tilde{\lambda}^* = \lambda^*/\lambda_*$ и $\hat{\lambda}^* = \lambda^*/\lambda^\circ$ от C_V . Для сравнения штрихпунктирными линиями представлены графики зависимостей от C_V отношений $\tilde{\lambda}_+ = \lambda_+/\lambda_*$ и $\hat{\lambda}_+ = \lambda_+/\lambda^\circ$, а пунктирными линиями — отношений $\tilde{\lambda}_- = \lambda_-/\lambda_*$ и $\hat{\lambda}_- = \lambda_-/\lambda^\circ$. На рис. 4 аналогичные графики соответствуют значениям $\bar{\lambda} = 0,01$ и $\bar{\lambda} = 100$. Следует отметить, что решение задачи стационарной теплопроводности в прямоугольной ячейке при идеально теплоизолированных сторонах $x_2 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$ и изотермических сторонах $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$ приводит к значениям $\tilde{\lambda}^\Delta$ и $\hat{\lambda}^\Delta$, отличающимся от полученных при указанных выше граничных условиях не более, чем на 10^{-4} .

рис.3

рис.4

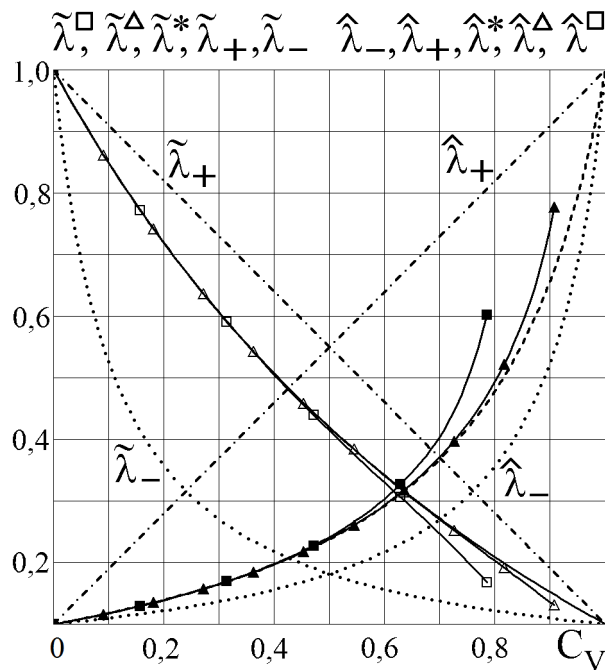


Рис. 3. Зависимости относительного коэффициента теплопроводности композита от C_V при $\bar{\lambda} = 0,1$ и $\bar{\lambda} = 10$

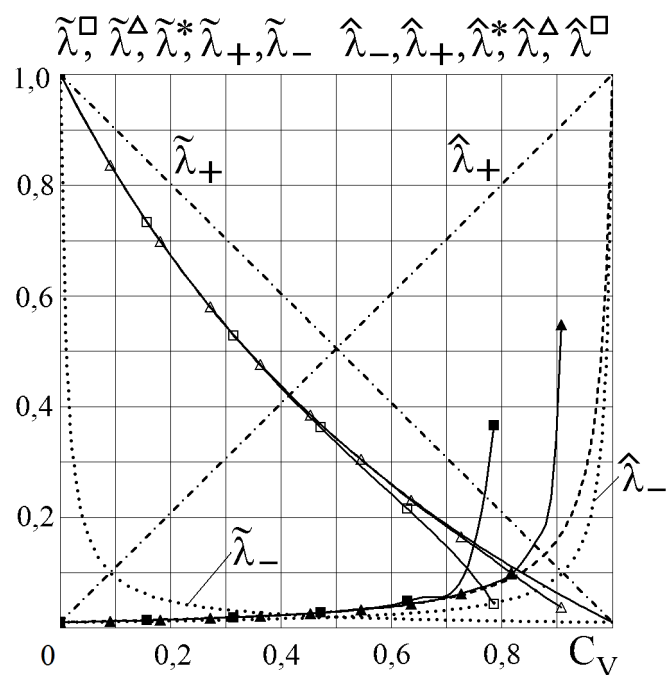


Рис. 4. Зависимости относительного коэффициента теплопроводности композита от C_V при $\bar{\lambda} = 0,01$ и $\bar{\lambda} = 100$

Масштаб рис. 3 и 4 не позволяет при $C_V \leq 0,7$ количественно оценить различие как между значениями $\tilde{\lambda}^\square$, $\tilde{\lambda}^\Delta$, $\tilde{\lambda}^*$, так и между значениями $\hat{\lambda}^\square$, $\hat{\lambda}^\Delta$, $\hat{\lambda}^*$. Такое различие можно установить при помощи табл. 1, в которой приведены эти значения для нескольких дискретных значений C_V (отметим, что значения для каждой из указанных троек параметров совпадают при $C_V = 0$).

тбл.1

Таблица 1

C_V		0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	$C^\square$	C^Δ
$\bar{\lambda} = 0,1$	$\tilde{\lambda}^\square$	0,7190	0,5048	0,4144	0,3296	0,2465	0,1681	—
	$\tilde{\lambda}^\Delta$	0,7189	0,5076	0,4192	0,3408	0,2696	0,2123	0,1314
	$\tilde{\lambda}^*$	0,7188	0,5068	0,4194	0,3415	0,2717	0,2176	0,1481
$\bar{\lambda} = 10$	$\tilde{\lambda}^\square$	0,1391	0,1981	0,2414	0,3036	0,4050	0,6019	—
	$\tilde{\lambda}^\Delta$	0,1391	0,1972	0,2386	0,2936	0,3716	0,4721	0,7766
	$\tilde{\lambda}^*$	0,1391	0,1973	0,2385	0,2929	0,3681	0,4596	0,6752
$\bar{\lambda} = 0,01$	$\tilde{\lambda}^\square$	0,6724	0,4336	0,3344	0,2410	0,1468	0,0429	—
	$\tilde{\lambda}^\Delta$	0,6724	0,4375	0,3419	0,2582	0,1828	0,1217	0,0369
	$\tilde{\lambda}^*$	0,6722	0,4367	0,3422	0,2594	0,1861	0,1300	0,0588
$\bar{\lambda} = 100$	$\tilde{\lambda}^\square$	0,0149	0,0230	0,0299	0,0411	0,0587	0,3654	—
	$\tilde{\lambda}^\Delta$	0,0149	0,0229	0,0293	0,0388	0,0549	0,0803	0,5480
	$\tilde{\lambda}^\Delta$	0,0149	0,0229	0,0292	0,0386	0,0537	0,0769	0,1701

Из таблицы видно, что при $C_V \leq 0,7$ и всех значениях $\bar{\lambda}$ различие значений указанных троек параметров сравнительно мало, хотя и возрастает по мере увеличения C_V . Характерно,

что при $C_V \geq 0,4$ во всех случаях более близкими являются пары значений $\tilde{\lambda}^\Delta$, $\tilde{\lambda}^*$ и $\hat{\lambda}^\Delta$, $\hat{\lambda}^*$. Результаты выборочных расчетов при большем отклонении значения $\bar{\lambda}$ от единицы подтверждают эту особенность. Из проведенного сравнения следует, что расчет эффективного коэффициента теплопроводности λ^* трансверсально изотропного волокнистого композита в направлении, перпендикулярном волокнам, по достаточно простой второй формуле (1) дает надежные результаты, не требуя использования сложных вычислительных процедур и связанных с ними значительных затрат времени.

Заключение

Представленное уточнение математической модели теплопереноса в трансверсально изотропном однонаправленном волокнистом композите и проведенный количественный анализ этой модели позволили выявить область применения расчетной формулы для вычисления эффективного коэффициента теплопроводности такого композита в направлении, перпендикулярном волокнам, полученной на основе более простой модели. Достоверная оценка этого коэффициента важна для анализа работоспособности теплонапряженных конструкций, выполненных из такого композита, поскольку в большинстве случаев ориентация теплового воздействия на эти конструкции совпадает с указанным направлением. К такому типу конструкций принадлежат, например, многочисленные варианты тонкостенных оболочек, получаемых намоткой волокнистого материала [1, 2, 3, 4].

Список литературы

1. Справочник по композиционным материалам. В 2 кн. Кн. 2. / Под ред. Дж. Любина; пер. с англ. А.Б. Геллера и др.; под. ред. Б.Э. Геллера. М.: Машиностроение, 1988. 584 с.
2. Композиционные материалы: Справочник / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др.; под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
3. Комков М.А., Тарасов В.А. Технология намотки композитных конструкций ракет и средств поражения. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 432 с.
4. Калинин В.А., Ягодников Д.А. Технология производства ракетных двигателей твердого топлива. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 688 с.
5. Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Л.: Энергия, 1974. 264 с.
6. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
7. Кристенсен Р. Введение в механику композитов: пер. с англ. М.: Мир, 1982. 336 с.
8. Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Смесевые модели механики композитов. Ч. 1. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. № 3. С. 36–49.

9. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с включениями в виде удлиненных эллипсоидов вращения // Тепловые процессы в технике. 2013. Т. 5, № 6. С. 276–282.
10. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Теплопроводность композита, армированного волокнами // Известия ВУЗов. Машиностроение. 2013. № 5. С. 75–81.
11. Кувыркин Г.Н. Теплопроводность однонаправленного волокнистого композита // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 8. Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/material/889.html> (дата обращения 01.12.2013).
12. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективный коэффициент теплопроводности композита при неидеальном тепловом контакте волокон и матрицы // Тепловые процессы в технике. 2013. Т. 5, № 11. С. 501–506.
13. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Теплопроводность волокнистых композитов. Saarbrücken, Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. 120 p.
14. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценка эффективной теплопроводности однонаправленного волокнистого композита методом самосогласования // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 11. DOI: 10.7463/1113.0622927.
15. Янковский А.П. Численно-аналитическое моделирование процессов теплопроводности в пространственно армированных композитах при интенсивном тепловом воздействии // Тепловые процессы в технике. 2011. Т. 3, № 11. С. 500–516.
16. Chen Y.-M., Ting J.-M. Ultra high thermal conductivity polymer composites // Carbon. 2002. Vol. 40. P. 359–362.
17. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.
18. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
19. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Two-sided estimates for thermal resistance of an inhomogeneous solid body // High Temperature. 2013. Vol. 51, no. 4. P. 519–525.
20. Справочник по композиционным материалам. В 2 кн. Кн. 1. / Под ред. Дж. Любина; пер. с англ. А.Б. Геллера и др.; под. ред. Б.Э. Геллера. М.: Машиностроение, 1988. 448 с.
21. Вустер У. Применение тензоров и теории групп для описания физических свойств кристаллов: пер. с англ. М.: Мир, 1977. 384 с.
22. Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Приближенные методы математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 700 с.

Mathematical simulation of heat transfer in unidirectional fiber composite

01, January 2014

DOI: 10.7463/0114.0657262

Zarubin V.S, Zarubin S.V, Kuvyrkin G.N.

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russian Federation
fn2@bmstu.ru

In order to justify a reliable application domain for the calculation dependence which allows one to determine the effective heat conductivity coefficient of transversely isotropic unidirectional fiber composite in the plane perpendicular to the fibers; a mathematical model of heat transfer in representative elements of this composite's structure was created. An ordered arrangement of parallel fibers was considered for the case when their centers coincide with the nodes of cross sectional plane grid with square cells or cells in the form of equilateral triangles. Quantitative analysis of developed mathematical model was performed using the finite element method with controlled integrated computational error. Presented results are important for assessing the temperature condition and efficiency of heat-stressed structures made of unidirectional fiber composite.

Publications with keywords: [unidirectional fiber composite](#), [effective thermal conductivity tensor](#), [mathematical model of heat transfer](#)

Publications with words: [long term strength](#), [fatigue resistance](#), [constitutive equation](#), [resolvent operator](#), [nonlinear strain](#)

References

1. Lubin G., ed. *Handbook of composites*. Van Nostrand Reinold Company, New York, 1982. (Russ. ed.: Lubin G., ed. *Spravochnik po kompozitsionnym materialam*: V 2 kn. Kn. 2. Moscow, Mashinostroenie, 1988. 584 p.).
2. Vasil'ev V.V., Protasov V.D., Bolotin V.V., et al. *Kompozitsionnye materialy: Spravochnik* [Composite materials: Handbook]. Moscow, Mashinostroenie, 1990. 512 p.
3. Komkov M.A., Tarasov V.A. *Tekhnologiya namotki kompozitnykh konstruksii raket i sredstv porazheniya* [Technology of winding of composite structures of missiles and weapons of destruction]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 432 p.

4. Kalinchev V.A., Yagodnikov D.A. *Tekhnologiya proizvodstva raketnykh dvigateley tverdogo topliva* [Technology of production of solid-propellant rocket engines]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 688 p.
5. Dul'nev G.N., Zarichniak Iu.P. *Teploprovodnost' smesei i kompozitsionnykh materialov* [Thermal conductivity of mixtures and composite materials]. Leningrad, Energiia, 1974. 264 p.
6. Shermergor T.D. *Teoriia uprugosti mikroneodnorodnykh sred* [Theory of elasticity of microinhomogeneous media]. Moscow, Nauka, 1977. 400 p.
7. Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. New York, Wiley-Interscience publication, 1979. 348 p. (Russ. ed.: Christensen R.M. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov*. Moscow, Mir, 1982. 336 p.).
8. Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Smesevye modeli mekhaniki kompozitov. Ch. 1. Termomekhanika i termouprugost' mnogokomponentnoy smesi [Mixture Models of Composite Mechanics. P. 1. Thermal Mechanics and Thermoelasticity of Multicomponent Mixture]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2009, no. 3, pp. 36–49.
9. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Effektivnye koeffitsienty teploprovodnosti kompozita s vklyucheniymi v vide udlinennykh ellipsoidov vrashcheniya [Effective Thermal Conductance of the Composite with Inclusions in the Form of Elongated Ellipsoid of Revolution]. *Teplovy protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering], 2013. Vol. 5, no. 6, pp. 276–282.
10. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Teploprovodnost' kompozita, armirovannogo voloknami [Thermal Conductivity of Composite Reinforced with Fibers], *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2013, no. 5, pp. 75–81.
11. Kuvyrkin G.N. Teploprovodnost' odnonapravlennoy voloknistoy kompozita [Thermal Conductivity of a Unidirectional Fiber Composite]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovations], 2013, no. 8. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/material/889.html>, accessed 01.12.2013.
12. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Effektivnyy koeffitsient teploprovodnosti kompozita pri neideal'nom teplovom kontakte volokon i matritsy [Effective Thermal Conductivity of Composites under Imperfect Thermal Contact of Fiber and Matrix]. *Teplovy protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering], 2013, vol. 5, no. 11, pp. 501–506.
13. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. *Teploprovodnost' voloknistykh kompozitov* [Thermal conductivity of fiber composites]. Saarbrücken, Deutschland (Germany), LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. 120 p.
14. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Otsenka effektivnoy teploprovodnosti odnonapravlennoy voloknistoy kompozita metodom samosoglasovaniya [Evaluation of effective thermal conductivity of unidirectional fiber composites by the method of self-consistency].

15. Yankovskiy A.P. Chislenno-analiticheskoe modelirovanie protsessov teploprovodnosti v prostanstvenno armirovannykh kompozitakh pri intensivnom teplovom vozdeystvii [Numerically-Analytical Modelling of Processes of Thermal Conductivity in Spatially Reinforced Composites at Intensive Thermal Action]. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering], 2011, vol. 3, no. 11, pp. 500–516.
16. Chen Y.-M., Ting J.-M. *Ultra high thermal conductivity polymer composites*. Carbon, 2002, vol. 40, pp. 359–362.
17. Zarubin V.S. *Inzhenernye metody resheniya zadach teploprovodnosti* [Engineering methods for solving problems of thermal conductivity]. Moscow, Energoatomizdat, 1983. 328 p.
18. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoi sredy* [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2008. 512 p.
19. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Two-sided estimates for thermal resistance of an inhomogeneous solid body. *High Temperature*, 2013, vol. 51, no. 4, pp. 519–525.
20. Lubin G., ed. *Handbook of composites*. Van Nostrand Reinold Company, New York, 1982. (Russ. ed.: Lubin G., ed. *Spravochnik po kompozitsionnym materialam: V 2 kn. Kn. 1*. Moscow, Mashinostroenie, 1988. 448 p.).
21. Wooster W.A. *Tensors and Group Theory for the Physical Properties of Crystals*. Oxford, Clarendon Press, 1973. (Russ. ed.: Wooster W.A. *Primenenie tenzorov i teorii grupp dlya opisaniya fizicheskikh svoystv kristallov*. Moscow, Mir, 1977. 384 p.).
22. Vlasova E.A., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Priblizhennyye metody matematicheskoy fiziki* [Approximate methods of mathematical physics]. Moscow, Bauman MSTU Publ, 2001. 700 p.