

Оценка эффективной теплопроводности однонаправленного волокнистого композита методом согласования

11, ноябрь 2013

DOI: 10.7463/1113.0622927

Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н., Савельева И. Ю.

УДК 541.124

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

Fn2@bmstu.ru

Введение

Волокнистые композиты находят все более широкое применение в технике в качестве современного конструкционного материала [1, 2]. Существенное преимущество таких композитов как конструкционных материалов состоит в том, что технологический процесс их получения обычно совмещен по времени с изготовлением конструкции из этого материала [3, 4]. Среди волокнистых композитов большую группу составляют однонаправленные композиты, представляющие по своей структуре совокупность одинаково ориентированных в пространстве волокон, расположенных в отвержденном связующем, образующим матрицу композита.

Для конструкций, подверженных интенсивным механическим и тепловым воздействиям, наряду с механическими характеристиками важную роль играют и теплофизические свойства конструкционного материала (в том числе его теплопроводность). Однонаправленный волокнистый композит по отношению к свойству теплопроводности является анизотропным материалом, характеризуемым тензором второго ранга эффективной теплопроводности. Компоненты этого тензора зависят от ряда параметров, которые входят в математическую модель процесса переноса тепловой энергии в таком композите. Существуют различные подходы для получения оценок компонент этого тензора [5, 6, 7, 8, 9, 10]. Один из подходов, получивший название метода самосогласования [6, 7], дает приемлемые результаты применительно к поликристаллическим материалам [11, 12], а также был использован при оценке упругих характеристик поликристаллов и композитов [6, 7, 11]. Особенность этого подхода состоит в учете взаимодействия представительного элемента структуры неоднородного материала с однородной средой, имеющей искомые эффективные характеристики [13].

Для применения метода самосогласования к оценке эффективной теплопроводности однонаправленного волокнистого композита необходимо располагать зависимостями, описывающими возмущения температурного поля и векторного поля плотности теплового потока в волокнах и матрице, по отношению к таким полям в однородном материале с искомыми коэффициентами теплопроводности. Эти возмущения можно определить при помощи математических моделей теплового взаимодействия однородного материала с отдельно взятым волокном и с элементом материала матрицы.

Математические модели

Примем, что изотропная матрица волокнистого композита армирована совокупностью параллельно расположенных анизотропных волокон, достаточно длинных по сравнению с их радиусом и обладающих свойством трансверсальной изотропии [6] относительно их продольной оси. Поэтому тензор теплопроводности волокна можно характеризовать лишь двумя независимыми компонентами, равными коэффициентам λ_1° и λ_3° теплопроводности поперек и вдоль этой оси соответственно. Рассматриваемый однонаправленный волокнистый композит в целом будет также обладать свойством трансверсальной изотропии относительно оси, параллельной волокнам. Следовательно, тензор его эффективной теплопроводности определен также лишь двумя независимыми компонентами, являющимися эффективными коэффициентами теплопроводности λ_1 и λ_3 композита в направлениях соответственно поперек и параллельно волокнам, объемное содержание которых в композите обозначим через C_V .

Для реализации метода самосогласования применительно к определению величины λ_1 построим сначала математическую модель теплового взаимодействия между отдельно взятым волокном с круговым поперечным сечением радиусом R и неограниченным объемом окружающего это волокно однородным материалом с искомым коэффициентом теплопроводности λ_1 . Ось волокна совместим с осью Ox_3 цилиндрической системы координат $O r \varphi x_3$.

На большом расстоянии $r \gg R$ от координатной оси Ox_3 зададим вектор градиента температурного поля в однородном материале, направленный по оси, от которой происходит отсчет угловой координаты φ . Длину волокна примем достаточно большой по сравнению с радиусом R , что позволяет пренебречь изменением температуры в направлении оси Ox_3 . Тогда при $r \rightarrow \infty$ установившееся распределение температуры в однородном материале будет описывать функция $T_\infty(r, \varphi) = Gr \cos \varphi$, где G — модуль вектора градиента. Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в полярных координатах имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (1)$$

По мере приближения к волокну температурное поле в однородном материале претерпевает возмущение, описываемое также удовлетворяющим уравнению (1) дополнительным

слагаемым $\Delta T(r, \varphi) = \frac{B}{r} \cos \varphi$, где B — подлежащий определению постоянный коэффициент. Таким образом, температурное поле в однородном материале, удовлетворяющее заданному условию при $r \rightarrow \infty$ и уравнению (1), описывает функция

$$T(r, \varphi) = T_{\infty}(r, \varphi) + \Delta T(r, \varphi) = \left(Gr + \frac{B}{r} \right) \cos \varphi. \quad (2)$$

Аналогичная зависимость, также удовлетворяющая уравнению (1), описывает распределение температуры в волокне

$$T^{\circ}(r, \varphi) = \left(A_* r + \frac{B_*}{r} \right) \cos \varphi. \quad (3)$$

В формуле (3) $B_* \equiv 0$ в силу ограниченности температуры в центре волокна. Таким образом, в формулы (2) и (3) входят два неизвестных коэффициента B и A_* , которые необходимо найти из граничных условий на цилиндрической поверхности с радиусом R , предполагая тепловой контакт на этой поверхности идеальным. Из условий непрерывности распределения температуры и радиальной составляющей вектора плотности теплового потока следует, что

$$T^{\circ}(R, \varphi) = T(R, \varphi) \quad \text{и} \quad \lambda_1^{\circ} \frac{\partial T^{\circ}}{\partial r} \bigg|_{r=R} = \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r=R}.$$

Отсюда с использованием соотношений (2) и (3) при $B^{\circ} = 0$ следует, что

$$A_* = G + \frac{B}{R^2} \quad \text{и} \quad A_* = \frac{\lambda_1}{\lambda_1^{\circ}} \left(G - \frac{B}{R^2} \right).$$

Сначала, исключая из этих равенств коэффициент A_* , находим

$$B = \frac{(\lambda_1 - \lambda^{\circ})GR^2}{\lambda_1 + \lambda^{\circ}},$$

а затем

$$A_* = \frac{2\lambda_1 G}{\lambda_1 + \lambda_1^{\circ}}.$$

Таким образом, распределение температуры в волокне с учетом формулы (3) и равенства $B_v = 0$ определяет функция

$$T^{\circ}(r, \varphi) = \frac{2\lambda_1 G(r \cos \varphi)}{\lambda_1 + \lambda_1^{\circ}}, \quad (4)$$

не зависящая от радиуса R .

Теперь перейдем к рассмотрению теплового взаимодействия отдельного элемента матрицы, расположенного между соседними волокнами, с неограниченным объемом однородного материала. В сечении, перпендикулярном координатной оси Ox_3 , конфигурация сечений таких элементов зависит от укладки волокон и может иметь различную форму.

Примем в качестве некоторой средней конфигурации этих сечений форму круга. Тогда математическая модель теплового взаимодействия такого цилиндрического элемента матрицы с круговым поперечным сечением и однородного материала будет аналогична модели, построенной выше применительно к тепловому взаимодействию отдельно взятого волокна с тем же самым однородным материалом. Отличие будет состоять лишь в замене коэффициента теплопроводности λ_1° волокна на коэффициент теплопроводности λ_m материала матрицы. Поэтому вместо формулы (4) распределение температуры в цилиндрическом элементе матрицы можно представить функцией

$$T_m(r, \varphi) = A_m r \cos \varphi, \quad (5)$$

где $A_m = \frac{2\lambda_1 G}{\lambda_1 + \lambda_m}$. Эта функция также не зависит от радиуса цилиндрического элемента матрицы.

Для определения методом согласования эффективного коэффициента теплопроводности λ_3 в направлении расположения волокон рассмотрим процесс переноса в этом направлении тепловой энергии в прямом цилиндре высотой H из однородного материала, содержащем волокно, расположенное параллельно образующей цилиндра и имеющее коэффициент теплопроводности λ_3° . Площадь S_0 каждого из оснований цилиндра много больше площади $S_* = \pi R^2$ поперечного сечения волокна. Боковая поверхность цилиндра идеально теплоизолирована, на одном из оснований задана температура T_0 , отсчитываемая от температуры другого основания, принимаемой равной нулю. В таком цилиндре установившееся распределение температуры будет линейным вдоль образующей, причем через однородный материал с искомым коэффициентом теплопроводности λ_3 будет проходить тепловой поток плотностью $q = \lambda_3 T_0 / H$, а плотность теплового потока, проходящего через волокно, составит

$$q_* = \frac{\lambda_3^\circ T_0}{H}. \quad (6)$$

Если в рассматриваемом цилиндре волокно заменить цилиндрическим элементом из материала матрицы, то плотность теплового потока, проходящего через такой элемент будет равна

$$q_m = \frac{\lambda_m T_0}{H}. \quad (7)$$

Отметим, что в данной модели теплового взаимодействия элемента матрицы с однородным материалом конфигурация поперечного сечения этого элемента может быть произвольной.

Метод самосогласования

Сначала определим возмущения установившегося температурного поля относительно установившегося распределения $T_\infty(r, \vartheta) = Gr \cos \vartheta$ температуры в однородном материале при $r \rightarrow \infty$, возникающие в волокне и в рассмотренном выше цилиндрическом элементе

матрицы. Согласно формуле (4), в волокне такое возмущение будет равно

$$\Delta T_v(r, \varphi) = T^\circ(r, \varphi) - T_\infty(r, \varphi) = \frac{G(r \cos \varphi)(\lambda_1 - \lambda_1^\circ)}{\lambda_1 + \lambda_1^\circ}.$$

Если от цилиндрической системы координат перейти к прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, совместив ось Ox_1 с осью, от которой происходит отсчет угловой координаты φ , то последняя формула примет вид

$$\Delta T^\circ(x_1) = \frac{Gx_1(\lambda_1 - \lambda_1^\circ)}{\lambda_1 + \lambda_1^\circ}.$$

Таким образом, возмущенное температурное поле в волокне, зависящее лишь от одной координаты, является линейным одномерным, т. е. градиент такого поля имеет лишь одну составляющую, направленную по оси Ox_1 , постоянную в пределах волокна и равную

$$A'_* = \frac{G(\lambda_1 - \lambda_1^\circ)}{\lambda_1 + \lambda_1^\circ}. \quad (8)$$

Аналогично, но с использованием формулы (5), запишем соотношение

$$\Delta T_m(x_1) = \frac{Gx_1(\lambda_1 - \lambda_m)}{\lambda_1 + \lambda_m},$$

описывающее возмущение температурного поля в цилиндрическом элементе матрицы. Отсюда следует, что единственная составляющая градиента возмущенного температурного поля в этом элементе, направленная по оси Ox_1 , равна

$$A'_m = \frac{G(\lambda_1 - \lambda_m)}{\lambda_1 + \lambda_m}. \quad (9)$$

Из соотношений (8) и (9) видно, что найденные составляющие градиента возмущенного температурного поля как в волокне, так и в элементе матрицы не зависят от координат и размеров волокон и таких элементов. Поэтому при осреднении этих составляющих по объему композита существенными являются лишь объемные концентрации C_V для волокон и $1 - C_V$ для матрицы. В соответствии с методом самосогласования результат осреднения следует приравнять нулю, т. е. положить $A'_*C_V + A'_m(1 - C_V) = 0$, или с учетом соотношений (6) и (7) при $G \neq 0$ записать

$$\frac{(\lambda_1 - \lambda_1^\circ)C_V}{\lambda_1 + \lambda_1^\circ} + \frac{(\lambda_1 - \lambda_m)(1 - C_V)}{\lambda_1 + \lambda_m} = 0.$$

Это равенство приводит к квадратному уравнению

$$\lambda_1^2 - (\lambda_m - \lambda_1^\circ + 2(\lambda_1^\circ - \lambda_m)C_V)\lambda_1 - \lambda_1^\circ\lambda_m = 0$$

относительно искомого коэффициента теплопроводности λ_1 композита. Положительное решение этого уравнения имеет вид

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_m} = \frac{1 - \bar{\lambda} + 2(\bar{\lambda} - 1)C_V + \sqrt{(1 - \bar{\lambda} + 2(\bar{\lambda} - 1)C_V)^2 + 4\bar{\lambda}}}{2}, \quad (10)$$

где $\bar{\lambda} = \lambda_1/\lambda_m$.

Отметим, что в рассматриваемом случае осреднение по объему композита составляющих $q_1 = -\lambda_1^\circ A_1$ и $q_m = -\lambda_m A_m$ вектора плотности теплового потока соответственно в волокнах и элементах матрицы и последующее приравнивание полученного результата составляющей $q = -\lambda G$ вектора плотности теплового потока в однородном материале приводит к идентичному квадратному уравнению, положительное решение которого определяет формула (10).

Для оценки эффективного коэффициента теплопроводности λ_3 композита в направлении расположения волокон сначала найдем возмущения плотности теплового потока относительно плотности $q = \lambda_3 T_0/H$ теплового потока в однородном материале, возникающие в волокне и цилиндрическом элементе из материала матрицы, помещенных в рассмотренном выше цилиндре из однородного материала. В волокне и в элементе матрицы такие возмущения с учетом формул (6) и (7) составят соответственно $q'_* = (\lambda_3^\circ - \lambda_3)T_0/H$ и $q'_m = (\lambda_m - \lambda_3)T_0/H$. Согласно методу самосогласования результат осреднения этих возмущений следует приравнять нулю, т. е. положить $q'_* C_V + q'_m (1 - C_V) = 0$, что при $T_0 \neq 0$ приводит к соотношению

$$\tilde{\lambda}_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_m} = 1 - C_V + \bar{\lambda}_3 C_V, \quad (11)$$

где $\bar{\lambda}_3 = \lambda_3^\circ/\lambda_m$. Это соотношение совпадает с формулой, которая следует из теории смесей [8], и идентична формуле для верхней оценки величины $\tilde{\lambda}_3$, получаемой путем использования двойственной вариационной формулировки стационарной задачи теплопроводности [10].

Двусторонние оценки

Полученная расчетная зависимость (11) дает достаточно надежные результаты, согласующиеся с опубликованными, хотя и немногочисленными экспериментальными данными [14, 15]. В то же время известные результаты измерения эффективного коэффициента теплопроводности λ_1 однонаправленного волокнистого композита в направлении, перпендикулярном расположению волокон, при большом отличии коэффициентов теплопроводности волокна и матрицы существенно отличаются от значений, следующих из расчетных зависимостей. Поэтому целесообразно рассмотреть двусторонние оценки этого коэффициента, позволяющие оценить возможную погрешность полученной формулы (10).

Верхнюю λ_+ и нижнюю λ_- оценки величины λ_1 можно получить путем использования двойственной вариационной формулировкой стационарной задачи теплопроводности в неоднородном теле [16, 17], включающей минимизируемый и максимизируемый функционалы, достигающие на истинном решении задачи совпадающих экстремальных значений. При этом верхняя оценка соответствует предположению об однородности в представительном элементе композита векторного поля градиента температуры, а нижняя — поля вектора плотности теплового потока. Эти оценки определены соотношениями

$$\tilde{\lambda}_+ = \frac{\lambda_+}{\lambda_m} = 1 - C_V + \bar{\lambda}C_V, \quad \tilde{\lambda}_- = \frac{\lambda_-}{\lambda_m} = \frac{1}{1 - C_V + C_V/\bar{\lambda}}. \quad (12)$$

Представленные оценки можно сблизить, если использовать вариационный принцип, сформулированный в работе [18]. Применение этого принципа к однонаправленному волокнистому композиту приводит к соотношениям

$$\tilde{\lambda}_+^* = \tilde{\lambda}_+ - \frac{(1 - C_V)C_V(\bar{\lambda} - 1)^2}{C_V + (1 - C_V)\bar{\lambda}_\alpha + 1} \geq \tilde{\lambda} \geq \tilde{\lambda}_+ - \frac{(1 - C_V)C_V(\bar{\lambda} - 1)^2}{C_V + (2 - C_V)\bar{\lambda}} = \tilde{\lambda}_-^*, \quad (13)$$

если $\bar{\lambda} < 1$, и

$$\tilde{\lambda}_+^* = \tilde{\lambda}_+ - \frac{(1 - C_V)C_V(\bar{\lambda} - 1)^2}{C_V + (2 - C_V)\bar{\lambda}_\alpha} \geq \tilde{\lambda} \geq \tilde{\lambda}_+ - \frac{(1 - C_V)C_V(\bar{\lambda} - 1)^2}{C_V + (1 - C_V)\bar{\lambda} + 1} = \tilde{\lambda}_-^*, \quad (14)$$

если $\bar{\lambda} > 1$. Идентичные формулы для верхней $\tilde{\lambda}_+$ и нижней $\tilde{\lambda}_-$ оценок можно получить при помощи сингулярного приближения теории случайных функций [6].

В работе [10] на основе построенной математической модели переноса тепловой энергии в представительном элементе однонаправленного волокнистого композита в форме достаточно протяженной в направлении расположения волокон цилиндрической составной частицы получена оценка λ_1^* эффективного коэффициента теплопроводности λ_1 композита, которую можно представить в виде

$$\tilde{\lambda}_1^* = \frac{\lambda_1^*}{\lambda_m} = \bar{\lambda} \frac{2 - (1 - \bar{\lambda})(1 - C_V)}{2 - (1 - \bar{\lambda})(1 + C_V)}.$$

Отметим, что $\tilde{\lambda}_1^* = \tilde{\lambda}_+^*$ при $\bar{\lambda} < 1$ и $\tilde{\lambda}_1^* = \tilde{\lambda}_-^*$ при $\bar{\lambda} > 1$.

Приведенные оценки сохраняют смысл во всем промежутке изменения объемной концентрации C_V волокон в композите от 0 до 1, что предполагает возможность уменьшения радиуса волокон от некоторого конечного значения R до бесконечно малого. При таком предположении сохраняет смысл значение $C_V = 1$, когда композит будет состоять только из волокон. Однако реальный однонаправленный волокнистый композит обычно состоит из волокон примерно одинакового радиуса, что ограничивает их наибольшую возможную объемную концентрацию значением $C_V^* < 1$. Предельно плотная укладка цилиндрических волокон с круговым поперечным сечением одинакового радиуса соответствует значению

$C_V^\Delta = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,907$, когда центры поперечных сечений волокон расположены в вершинах равносторонних треугольников, а соседние волокна касаются между собой. Однако из условия прочности при растяжении композита в направлении волокон каждое волокно должно быть окружено связующим, образующим матрицу [3], и поэтому реальное значение $C_V < C_V^\Delta$.

Результаты расчетов

На рис. 1 и 2 сплошными кривыми представлены графики зависимости $\tilde{\lambda}$ от C_V при различных значениях $\bar{\lambda}$, построенные по формуле (10). Штрихпунктирные и штриховые линии на этих рисунках соответствуют верхней $\tilde{\lambda}_+$ и нижней $\tilde{\lambda}_-$ оценкам величины $\tilde{\lambda}$, вычисленным по формулам (12), а штрихпунктирные и штриховые линии с кружками — верхней $\tilde{\lambda}_+^*$ и нижней $\tilde{\lambda}_-^*$ оценкам этой величины, определяемым соотношениями (13) и (14). Из рисунков видно, что при всех значениях $\bar{\lambda}$ и изменении C_V в интервале $(0, 1)$ сплошные кривые для $\tilde{\lambda}$ лежат в полосе между графиками для $\tilde{\lambda}_+^*$ и $\tilde{\lambda}_-^*$, которые, в свою очередь, расположены между графиками для $\tilde{\lambda}_+$ и $\tilde{\lambda}_-$.

Ясно, что при отсутствии волокон, когда $C_V = 1$, $\tilde{\lambda} = 1$ и все оценки совпадают с этим значением. В случае гипотетической ситуации, когда композит состоит только из волокон, $C_V = 1$ и $\tilde{\lambda} = \bar{\lambda}$. При этом все оценки также совпадают со значением $\bar{\lambda}$.

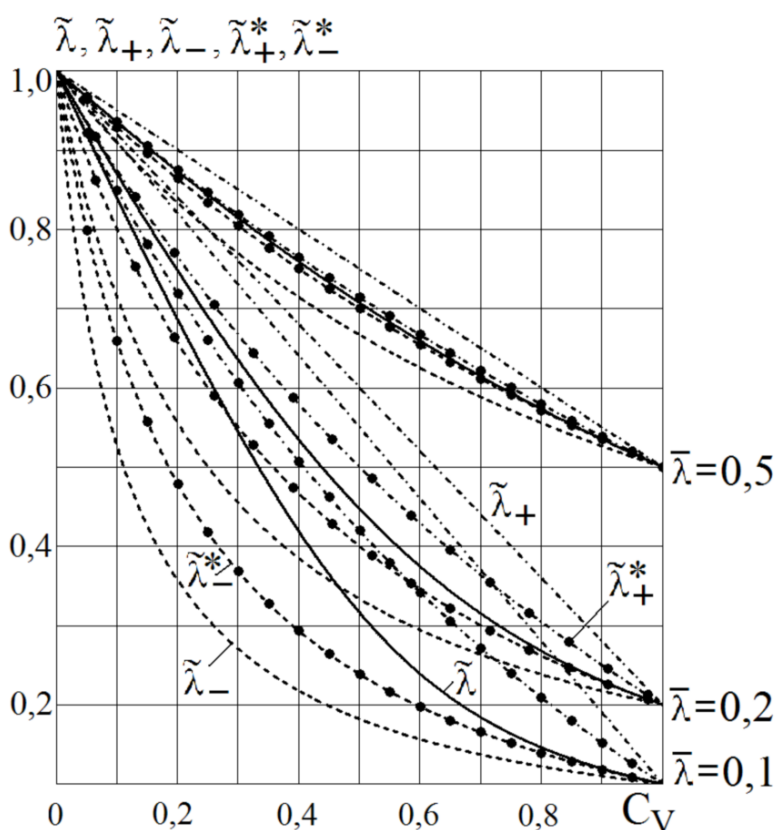


Рис. 1. Графики зависимостей $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\lambda}_+$, $\tilde{\lambda}_-$, $\tilde{\lambda}_+^*$ и $\tilde{\lambda}_-^*$ от C_V при значениях $\bar{\lambda} < 1$

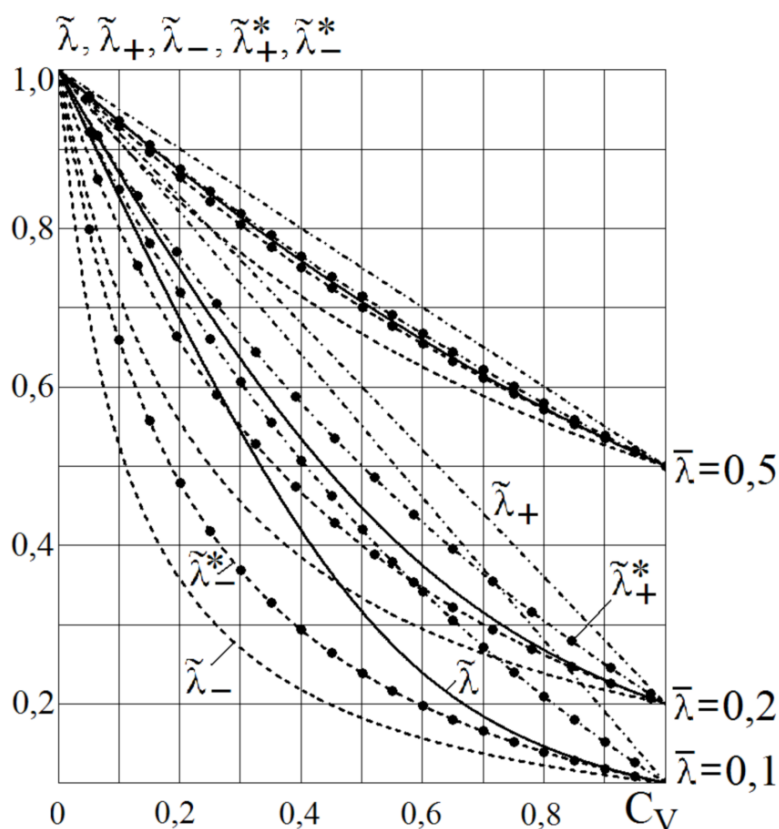


Рис. 2. Графики зависимостей $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\lambda}_+$, $\tilde{\lambda}_-$, $\tilde{\lambda}_+^*$ и $\tilde{\lambda}_-^*$ от C_V при значениях $\bar{\lambda} > 1$

Из рисунков следует, что при отличии коэффициента теплопроводности λ_1^o волокна в поперечном направлении от коэффициента теплопроводности λ_m матрицы не более, чем в два раза, графики зависимостей $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\lambda}_+^*$ и $\tilde{\lambda}_-^*$ от C_V практически совпадают между собой. Это означает, что возможная погрешность вычислений по формуле (10) сравнительно мала. Однако по мере отклонения значения $\bar{\lambda}$ от единицы ширина полосы между графиками для оценок $\tilde{\lambda}_+^*$ и $\tilde{\lambda}_-^*$ возрастает, причем наиболее существенно при значениях C_V , близких к 0,5. Таким образом, достоверность результатов вычислений по формуле (10) в этом случае ухудшается.

Заключение

Расчетные зависимости, полученные на основе построенных математических моделей теплового взаимодействия волокна и элементов материала матрицы с однородным материалом, соответствующим однонаправленному волокнистому композиту, позволяют с приемлемой для практических целей достоверностью оценивать эффективный коэффициент теплопроводности такого композита в направлении расположения волокон, а также аналогичный коэффициент в направлении, перпендикулярном волокнам, но при условии сравнительно малого различия между коэффициентами теплопроводности волокна и материала матрицы. Однако в случае большого различия этих коэффициентов теплопроводности (например, для

композита с полимерной матрицей, армированной углеродными волокнами) возможная погрешность вычисления эффективного коэффициента теплопроводности в перпендикулярном направлении возрастает, что требует построения уточненной математической модели переноса тепловой энергии в композите в этом направлении.

Работа выполнена по гранту НШ-255.2012.8 программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ.

Список литературы

1. Справочник по композиционным материалам. В 2 кн. Кн. 2 / Под ред. Дж. Любина; Пер. с англ. А.Б. Геллера и др.; Под ред. Б.Э. Геллера. М.: Машиностроение, 1988. 580 с.
2. Васильев В.В., Протасов В.Д., Болотин В.В. и др. Композиционные материалы: Справочник / Под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
3. Комков М.А., Тарасов В.А. Технология намотки композитных конструкций ракет и средств поражения. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 432 с.
4. Калинин В.А., Ягодников Д.А. Технология производства ракетных двигателей твердого топлива. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 688 с.
5. Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Л.: Энергия, 1974. 264 с.
6. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
7. Кристенсен Р. Введение в механику композитов: Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 336 с.
8. Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Смесевые модели механики композитов. Ч. 1. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. № 3. С. 36–49.
9. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с включениями в виде удлиненных эллипсоидов вращения // Тепловые процессы в технике. 2013. Т. 5. № 6. С. 276–282.
10. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Теплопроводность композита, армированного волокнами // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2013. № 5. С. 75–81.
11. Зарубин В.С. Прикладные задачи термпрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 296 с.
12. Зарубин В.С., Котович А.В., Кувыркин Г.Н. Оценки эффективного коэффициента теплопроводности композита с анизотропными шаровыми включениями // Изв. РАН. Энергетика. 2012. № 6. С. 118–127.

13. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 248 с.
14. Янковский А.П. Численно-аналитическое моделирование процессов теплопроводности в пространственно армированных композитах при интенсивном тепловом воздействии // Тепловые процессы в технике. 2011. Т. 3. № 11. С. 500–516.
15. Chen Y.-M., Ting J.-M. Ultra high thermal conductivity polymer composites // Carbon. 2002. Vol. 40. P. 359–362.
16. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 329 с.
17. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
18. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials // J. Appl. Phys. 1962. Vol. 33. P. 3125.

**Evaluation of effective thermal conductivity
of unidirectional fiber composites
by the method of self-consistency**

11, November 2013

DOI: 10.7463/1113.0622927

Zarubin V. S., Kuvyrkin G. N., Savelyeva I. Yu.

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russian Federation
Fn2@bmstu.ru

The self-consistency method was used to estimate the components of a thermal conductivity tensor of unidirectional fiber composite, which is transversally isotropic with respect to an axis arranged parallel to the fibers. In this method it is possible to estimate effective values of parameters for the composite as a whole by averaging the perturbed distributions of the parameters over the elements of the composite structure and equating averaged results to zero. A perturbed temperature field and heat flux density distribution over the fibers and composite matrix were calculated on the basis of the developed mathematical models of heat interaction between these elements of the structure and a transversely isotropic homogeneous material which has required coefficients of thermal conductivity. For validation of the final calculated dependences, bilateral estimates based on dual variation formulation of the stationary problem of heat conduction in an inhomogeneous solid body were used. The calculated dependencies can be used for forecasting effective thermal conductivity of unidirectional fiber composites.

References

1. Lubin G., ed. *Handbook of composites*. Van Nostrand Reinold Company, New York, 1982. (Russ. ed.: Lubin G., ed. *Spravochnik po kompozitsionnym materialam: V 2 kn. Kn. 2*. Moscow, Mashinostroenie, 1988. 580 p.).
2. Vasil'ev V.V., Protasov V.D., Bolotin V.V., et al. *Kompozitsionnye materialy: Spravochnik* [Composite materials: Handbook]. Moscow, Mashinostroenie, 1990. 512 p.
3. Komkov M.A., Tarasov V.A. *Tekhnologiya namotki kompozitnykh konstruksii raket i sredstv porazheniya* [Technology of winding of composite structures of missiles and weapons of destruction]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 432 p.

4. Kalinchev V.A., Yagodnikov D.A. *Tekhnologiya proizvodstva raketnykh dvigateley tverdogo topliva* [Technology of production of solid-propellant rocket engines]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 688 p.
5. Dul'nev G.N., Zarichniak Iu.P. *Teploprovodnost' smesei i kompozitsionnykh materialov* [Thermal conductivity of mixtures and composite materials]. Leningrad, Energiia, 1974. 264 p.
6. Shermergor T.D. *Teoriia uprugosti mikroneodnorodnykh sred* [Theory of elasticity of microinhomogeneous media]. Moscow, Nauka, 1977. 400 p.
7. Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. New York, Wiley-Interscience publication, 1979. 348 p. (Russ. ed.: Christensen R.M. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov*. Moscow, Mir, 1982. 336 p.).
8. Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Smesevye modeli mekhaniki kompozitov. Ch. 1. Termomekhanika i termouprugost' mnogokomponentnoy smesi [Mixture Models of Composite Mechanics. P. 1. Thermal Mechanics and Thermoelasticity of Multicomponent Mixture]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2009, no. 3, pp. 36–49.
9. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Effektivnye koeffitsienty teploprovodnosti kompozita s vklyucheniymi v vide udlinennykh ellipsoidov vrashcheniya [Effective Thermal Conductance of the Composite with Inclusions in the Form of Elongated Ellipsoid of Revolution]. *Teplovyie protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering], 2013, vol. 5, no. 6, pp. 276–282.
10. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Teploprovodnost' kompozita, armirovannogo voloknami [Thermal Conductivity of Composite Reinforced with Fibers], *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2013, no. 5, pp. 75–81.
11. Zarubin V.S. *Prikladnye zadachi termoprochnosti elementov konstruksii* [Applied problems in thermal strength of structural elements]. Moscow, Mashinostroenie, 1985. 296 p.
12. Zarubin V.S., Kotovich A.V., Kuvyrkin G.N. Otsenki effektivnogo koeffitsienta teploprovodnosti kompozita s anizotropnymi sharovymi vklucheniiami [Evaluation of the effective coefficient of thermal conductivity of a composite with anisotropic spherical inclusions]. *Izv. RAN. Energetika*, 2012, no. 6, pp. 118–127.
13. Eshelby J.D. The continuum theory of lattice defects. In: Seitz F., Turnbull D., eds. *Progress in Solid State Physics. Vol. 3*. New York, Academic Press, 1956, pp. 79–144. (Russ. ed.: Eshelby J.D. *Kontinual'naiia teoriia dislokatsii*. Moscow, Izd-vo inostranoi literatury, 1963. 248 p.).
14. Yankovskiy A.P. Chislenno-analiticheskoe modelirovanie protsessov teploprovodnosti v prostanstvenno armirovannykh kompozitakh pri intensivnom teplovom vozhdeystvii [Numerically-Analytical Modelling of Processes of Thermal Conductivity in Spatially Reinforced Com-

- posites at Intensive Thermal Action]. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering], 2011, vol. 3, no. 11, pp. 500–516.
15. Chen Y.-M., Ting J.-M. Ultra high thermal conductivity polymer composites. *Carbon*, 2002, vol. 40, pp. 359–362.
 16. Zarubin V.S. *Inzhenernye metody resheniia zadach teploprovodnosti* [Engineering methods for solving problems of thermal conductivity]. Moscow, Energoatomizdat, 1983. 329 p.
 17. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoi sredy* [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2008. 512 p.
 18. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. *J. Appl. Phys.*, 1962, vol. 33, no. 10, pp. 3125–3131. DOI: 10.1063/1.1728579.