

Автоматический синтез программного движения вертолета вдоль горизонтальной прямой

10, октябрь 2013

DOI: 10.7463/1013.0660675

Белинская Ю. С., Четвериков В. Н., Ткачев С. Б.

УДК 517.977.1

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

usbelka@mail.ru

chetverikov.vl@yandex.ru

s.tkachev@bmstu.ru

Введение

Одной из известных задач для нелинейных динамических систем с управлением является задача терминального управления, заключающаяся в определении программного движения (программной траектории и программного управления), переводящего динамическую систему из заданного начального состояния в заданное конечное состояние. Время движения из начального состояния в конечное может быть фиксировано или выбираться из каких-либо дополнительных соображений.

Для нелинейных динамических систем подходы к решению задачи терминального управления известны лишь для отдельных классов систем. Например, для аффинных систем, преобразуемых в заданной области к специальному виду, называемому регулярным каноническим видом [1, 2], программную траекторию, удовлетворяющую граничным условиям, задают в виде полиномов от времени, порядок которых определяется количеством граничных условий. При таком подходе основной проблемой является выбор времени движения.

Применительно к задачам проектирования программных движений для летательных аппаратов проблему задания времени перелета можно осуществлять на основе эвристических алгоритмов [3] или путем перехода к новой независимой переменной — механической энергии системы [4, 5].

Более общим классом нелинейных систем с управлением, включающим в себя аффинные системы, преобразуемые к каноническому виду, являются так называемые плоские системы [6, 7, 8]. Для этого класса систем также известны достаточно общие подходы к синтезу программных движений. Например, для квадрокоптера на основе теории плоскостности решена задача реализации типовых маневров [9, 10].

Нелинейную динамическую систему не всегда удастся преобразовать к эквивалентной плоской системе, и для таких неплоских систем общие подходы к решению терминальной задачи в настоящее время отсутствуют.

Среди неплоских систем выделяют лиувиллевы системы (см., например, [11]), для которых в частных случаях известны подходы к решению задач управления. Например, в [11] для модели вертолета решена задача синтеза управления, обеспечивающего одновременное смещение в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

Нелинейная модель движения вертолета является интересным с теоретической точки зрения примером неплоской системы. Дополнительным требованием, накладываемым на программное движение вертолета, может быть требование движения по заданному многообразию, в частности, по заданной пространственной кривой, соединяющей граничные точки. В этом случае необходимо определить время перелета и получить зависимость переменных состояния динамической системы и управления от времени.

В настоящее время достаточно общие теоретически обоснованные подходы к решению задачи автоматического синтеза программного движения для неплоской нелинейной динамической системы с управлением в указанной постановке авторам не известны.

В данной работе решается задача синтеза программного движения, реализующего перемещение вертолета вдоль заданного отрезка горизонтальной прямой.

В работе применяются два подхода. Первый подход основан на использовании конечной симметрии динамической системы, которая преобразует начальные условия задачи в конечные. Использование такой симметрии позволяет уменьшить количество конечных условий. При этом искомое управление представляет собой кусочно-непрерывную функцию времени.

Отметим, что теория симметрий дифференциальных уравнений развивалась бурными темпами последние 40 лет (см. [12] и библиографию там). Методами этой теории решаются многие задачи математической физики, но авторам неизвестны работы по применению теории симметрий к решению задач терминального управления.

Второй подход основан на использовании накрытия [12] и заключается в построении специального отображения, которое для двух заданных динамических систем сюръективно отображает множество решений первой системы в множество решений второй системы. Программное движение в этом случае может быть найдено как решение двух связанных специально поставленных задач Коши для этих динамических систем.

1. Математическая модель движения вертолета

Для описания движения вертолета зададим земную неподвижную систему координат, у которой ось Oz сонаправлена с вектором ускорения свободного падения, и строительную систему координат, жестко связанную с корпусом вертолета. Центр строительной системы координат поместим в центр масс вертолета, а ее оси совместим с главными осями инерции. Угловое положение корпуса вертолета будем задавать углами крена, тангажа и рыскания.

Рассмотрим упрощенную математическую модель движения вертолета с хвостовым винтом. Модель движения вертолета имеет вид [11]

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{z} = v_z, \\ v_x = -\frac{\cos \psi \sin \vartheta \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi}{M} u_1 - \frac{\cos \psi \cos \vartheta}{M} u_2 - \\ \quad - \frac{\cos \psi \sin \vartheta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi}{M} u_3, \\ v_y = -\frac{\sin \psi \sin \vartheta \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi}{M} u_1 - \frac{\sin \psi \cos \vartheta}{M} u_2 - \\ \quad - \frac{\sin \psi \sin \vartheta \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi}{M} u_3, \\ v_z = g - \frac{\cos \vartheta \cos \varphi}{M} u_1 + \frac{\sin \vartheta}{M} u_2 - \frac{\cos \vartheta \sin \varphi}{M} u_3, \\ \dot{\varphi} = p + (q \sin \varphi + r \cos \varphi) \operatorname{tg} \vartheta, \quad \dot{\vartheta} = q \cos \varphi - r \sin \varphi, \quad \dot{\psi} = (q \sin \varphi + r \cos \varphi) \sec \vartheta, \\ \dot{p} = \frac{i_{yy} - i_{zz}}{i_{xx}} q r - \frac{l_h u_3}{i_{xx}}, \quad \dot{q} = \frac{i_{zz} - i_{xx}}{i_{yy}} r p + \frac{l_h u_2}{i_{yy}}, \quad \dot{r} = \frac{i_{xx} - i_{yy}}{i_{zz}} p q + \frac{l_t u_4}{i_{zz}}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где x, y и z — координаты центра масс вертолета в земной неподвижной системе координат; v_x, v_y и v_z — проекции скорости центра масс; φ, ϑ и ψ — углы крена, рыскания и тангажа; p, q, r — скорости крена, рыскания и тангажа; u_1, u_2, u_3 и u_4 — управления (u_1, u_2 и u_3 — три проекции силы тяги несущего винта на оси строительной системы координат, а u_4 — сила тяги рулевого винта); i_{xx}, i_{yy}, i_{zz} — диагональные элементы матрицы инерции вертолета; l_h — расстояние от втулки несущего винта до центра масс фюзеляжа; l_t — расстояние от втулки хвостового винта до центра масс фюзеляжа; M — общая масса вертолета; g — ускорение свободного падения.

Отметим, что в рассматриваемой модели не учитываются силы аэродинамического сопротивления и аэродинамические моменты. Такое упрощение модели на первом этапе исследования представляется допустимым, поскольку указанные силы и моменты можно учесть при решении задачи стабилизации найденного программного движения с использованием более полной модели.

Также предполагается, что втулка несущего винта расположена на вертикальной оси строительной системы координат на расстоянии l_h от центра масс.

Рассмотрим движение вертолета в вертикальной плоскости. Не нарушая общности, положим $y = 0$. При движении в выбранной вертикальной плоскости $\psi(t) = \varphi(t) = 0$ и $\dot{r}(t) = \dot{p}(t) = 0$. В этом случае система уравнений (1) упрощается и сводится к системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_x = -\frac{\sin \vartheta}{M} u_1 - \frac{\cos \vartheta}{M} u_2, \\ \dot{v}_z = g - \frac{\cos \vartheta}{M} u_1 + \frac{\sin \vartheta}{M} u_2, \\ \dot{\vartheta} = q, \\ \dot{q} = \frac{l_h u_2}{i_{yy}}. \end{array} \right. \quad (2)$$

Обозначим $L = \frac{l_h}{i_{yy}}$. Систему (2) можно записать в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\sin \vartheta}{M}u_1 - \frac{\cos \vartheta}{M}u_2, \\ \ddot{z} = g - \frac{\cos \vartheta}{M}u_1 + \frac{\sin \vartheta}{M}u_2, \\ \ddot{\vartheta} = Lu_2. \end{cases} \quad (3)$$

Выразив из первого и второго уравнения системы (3) управление u_2 , получим

$$u_2 = -\frac{M\ddot{x}}{\cos \vartheta} - u_1 \operatorname{tg} \vartheta \quad \text{и} \quad u_2 = -\frac{M(g - \ddot{z})}{\sin \vartheta} + u_1 \operatorname{ctg} \vartheta.$$

Отсюда

$$u_1 = M[(g - \ddot{z}) \cos \vartheta - \ddot{x} \sin \vartheta]. \quad (4)$$

Подставив (4) в первое уравнение (3), после упрощений получим

$$\ddot{x} = -(g - \ddot{z}) \operatorname{tg} \vartheta - \frac{u_2}{M \cos \vartheta}.$$

Рассмотрим движение вдоль горизонтальной прямой. Не нарушая общности, зададим эту прямую уравнением $z = c$. Заметим, что с учетом сделанного выше предположения о движении в вертикальной плоскости ($y = 0$) прямая определена однозначно. В этом случае получим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{\vartheta} = Lu_2, \quad \ddot{x} = -g \operatorname{tg} \vartheta - \frac{1}{M \cos \vartheta}u_2, \quad (5)$$

которую будем рассматривать как математическую модель, описывающую движение вертолета по горизонтальной прямой.

Для выбранного многообразия (горизонтальной прямой) поставим следующую задачу терминального управления: перевести вертолет из одного положения равновесия

$$x(t_1) = x_1, \quad \vartheta(t_1) = 0, \quad \dot{x}(t_1) = 0, \quad \dot{\vartheta}(t_1) = 0, \quad (6)$$

в другое положение равновесия

$$x(t_2) = x_2, \quad \vartheta(t_2) = 0, \quad \dot{x}(t_2) = 0, \quad \dot{\vartheta}(t_2) = 0, \quad (7)$$

где момент t_1 начала движения задан, а момент t_2 окончания движения может быть выбран произвольно с учетом очевидного требования $t_2 > t_1$.

2. Симметрия задачи о движении вертолета вдоль горизонтальной прямой и синтез программного движения

Рассмотрим пространство переменных системы (5), т.е. пространство с координатами $t, x, \vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta}, u_2$. Соотношение

$$F: (t, x, \vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta}, u_2) \mapsto (t_1 + t_2 - t, x_1 + x_2 - x, -\vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta}, -u_2) \quad (8)$$

определяет отображение этого пространства, которое графики решений задачи (5), (6), (7) отображает в графики решений этой задачи. Такое отображение будем называть симметрией задачи терминального управления (5)–(7).

Будем искать инвариантное относительно симметрии (8) решение задачи (5)–(7), т.е. такое решение, которое отображается в себя при преобразовании (8).

Искомое инвариантное решение определяется своими значениями на отрезке $[t_1, t_3]$, где $t_3 = \frac{t_1 + t_2}{2}$, и удовлетворяет условиям

$$x(t_3) = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \vartheta(t_3) = 0, \quad (9)$$

при этом значения $\dot{x}(t_3), \dot{\vartheta}(t_3)$ произвольны в силу четности переменных $\dot{x}$ и $\dot{\vartheta}$ относительно преобразования (8). Отметим, что построенная симметрия позволяет снизить количество граничных условий задачи. Поскольку граничными условиями в данном случае становятся уравнения (6), (7), (9), от четырех граничных условий на правом конце задачи переходим к двум.

Для нахождения программного движения сначала решаем задачу терминального управления (5), (6), (9) и находим соответствующую программную траекторию и программное управление $u_{2,*}(t)$.

По найденному на отрезке $[t_1, t_3]$ решению строим для задачи (5)–(7) программное управление:

$$u_2(t) = \begin{cases} u_{2,*}(t), & t \in [t_1, t_3]; \\ -u_{2,*}(t_1 + t_2 - t), & t \in [t_3, t_2]. \end{cases} \quad (10)$$

Чтобы получить соответствующую зависимость переменных состояния от времени, решаем задачу Коши для системы (5) с управлением, заданным соотношением (10) и начальными условиями (6).

3. Накрытия в задаче о движении вертолета вдоль горизонтальной прямой

Для двух заданных динамических систем накрытием называют отображение пространства переменных одной системы в пространство переменных другой системы, при котором множество решений первой системы сюръективно отображается в множество решений второй системы.

Пусть задача терминального управления поставлена для первой системы. Предположим, что найдено накрытие, преобразующее конечные условия терминальной задачи для первой системы в некоторые граничные условия для второй системы, а начальные условия не дают никаких ограничений на решения второй системы. Тогда задача терминального управления сводится к двум задачам Коши: к задаче для второй системы с указанными граничными условиями и к задаче для первой системы с учетом найденного решения второй системы с заданными начальными условиями.

Перейдем к поиску накрытия с требуемыми свойствами в задаче о движении вертолета вдоль горизонтальной прямой.

Обозначим $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Условия (6), (9) для системы (5) перепишем в виде

$$x(t_1) = x_1, \quad \vartheta(t_1) = 0, \quad \dot{x}(t_1) = 0, \quad \dot{\vartheta}(t_1) = 0, \quad (11)$$

$$x(t_3) = x_3, \quad \vartheta(t_3) = 0, \quad (12)$$

где t_1 , x_1 и x_3 заданы, а t_3 можно выбирать произвольно с учетом $t_3 > t_1$.

Для решения задачи (5), (11), (12) выразим u_2 из первого уравнения системы (5) и подставим во второе уравнение. Получим

$$\ddot{x} = -g \operatorname{tg} \vartheta - \frac{\ddot{\vartheta}}{LM \cos \vartheta}. \quad (13)$$

Зададим функцию ξ в виде

$$\xi = \left(\frac{1}{\dot{\vartheta}} D \right)^2 (x) = \frac{\ddot{x} \dot{\vartheta} - \dot{x} \ddot{\vartheta}}{\dot{\vartheta}^3},$$

где D — производная по t в силу системы (5). Добавим к уравнению (13) уравнение

$$D(\xi) = 0. \quad (14)$$

Будем искать решение задачи терминального управления среди решений системы (13), (14). Выберем выход

$$h = x - \vartheta \frac{\dot{x}}{\dot{\vartheta}} + \frac{\vartheta^2}{2} \xi. \quad (15)$$

На решениях системы (13)-(14) в точках, где $\dot{\vartheta} \neq 0$, имеем

$$\dot{h} = 0. \quad (16)$$

Действительно,

$$\dot{h} = \dot{x} - \dot{\vartheta} \frac{\dot{x}}{\dot{\vartheta}} - \vartheta \left(\frac{\ddot{x} \dot{\vartheta} - \dot{x} \ddot{\vartheta}}{\dot{\vartheta}^2} \right) + \vartheta \dot{\vartheta} \xi + \frac{\vartheta^2}{2} \dot{\xi} = -\vartheta \xi \dot{\vartheta} + \vartheta \dot{\vartheta} \xi + \frac{\vartheta^2}{2} \dot{\xi} = \frac{\vartheta^2}{2} \dot{\xi} = 0,$$

поскольку $\dot{\xi} = 0$.

Функция h , заданная соотношением (15), определяет накрытие из системы (13), (14) в систему (16).

Использовать выход h для решения задачи (11)–(14) нельзя, так как эта функция не определена в области $\dot{\vartheta} = 0$, а в начальной точке (см. (11)) $\dot{\vartheta}(t_1) = 0$.

Поэтому разобьем поставленную задачу терминального управления на две задачи. Первая необходима для выведения системы из положения равновесия, вторую решим с использованием построенного накрытия.

Сначала выберем момент времени $t_4 \in [t_1, t_3]$, числа $\vartheta_0 < 0$, $\dot{\vartheta}_0 > 0$ и найдем многочлен $\vartheta_*(t)$ степени 3, удовлетворяющий условиям

$$\vartheta_*(t_1) = 0, \quad \dot{\vartheta}_*(t_1) = 0, \quad \vartheta_*(t_4) = \vartheta_0, \quad \dot{\vartheta}_*(t_4) = \dot{\vartheta}_0. \quad (17)$$

Построенный многочлен задает программное изменение переменных $\vartheta_*(t)$ и $\dot{\vartheta}_*(t)$ на отрезке $[t_1, t_3]$, а следовательно, и программное изменение $\ddot{\vartheta}_*(t)$.

Из первого уравнения системы (5) найдем программное управление $u_2(t) = \ddot{\vartheta}_*(t)/L$, определенное на отрезке $[t_1, t_4]$, и для второго уравнения системы (5) с найденным управлением получим решение задачи Коши с начальными условиями, определенными в (11). В результате определим программное изменение $x_*(t)$ и $\dot{x}_*(t)$ на отрезке $[t_1, t_4]$.

Таким образом, на указанном отрезке времени найдено программное движение, удовлетворяющее заданному граничному условию в момент времени t_1 .

Выход h используем для решения терминальной задачи для системы (13)-(14) на отрезке $[t_4, t_3]$ с конечными условиями (12) и начальными условиями

$$x(t_4) = x_*(t_4), \quad \vartheta(t_4) = \vartheta_0, \quad \dot{x}(t_4) = \dot{x}_*(t_4), \quad \dot{\vartheta}(t_4) = \dot{\vartheta}_0. \quad (18)$$

Из соотношений (12) следует, что

$$h(t_3) = x_3. \quad (19)$$

Начальные условия (18) не дают никаких ограничений на h , если значение ξ в точке $t = t_4$ зависит от $\ddot{\vartheta}(t_4)$. Значения t_4 , ϑ_0 и $\dot{\vartheta}_0$ необходимо подбирать, исходя, в частности, из этого условия.

Из уравнения (16) и условия (19) следует, что $z \equiv x_3$. Используя этот факт и вычисляя значение правой части равенства (15) в точке $t = t_4$ с учетом условий (18), находим $\ddot{\vartheta}(t_4)$. Добавляя это значение к набору (18), получаем начальные условия для системы (13), (14).

Для нахождения программной траектории решаем соответствующую задачу Коши при $t > t_4$. Находим первый момент времени, когда $\vartheta = 0$. Это и есть искомый момент времени t_3 . Одновременно получаем решение $(x(t), \vartheta(t))$ на отрезке $[t_4, t_3]$.

Полученное решение, если оно существует, есть решение задачи терминального управления (12), (13), (18). Действительно, по построению оно удовлетворяет системе (13), начальным условиям (18) и второму равенству в (12). На этом решении функция (15) постоянна, а так как $z(t_4) = x_3$, то $z(t_3) = x_3$. С другой стороны, из (15) следует равенство $z(t_3) = x(t_3)$, так как $\vartheta(t_3) = 0$ в силу выбора момента t_3 . Поэтому выполняется и первое равенство в (12).

Объединяя решения на отрезках $[t_1, t_4]$ и $[t_4, t_3]$, получаем решение задачи терминального управления (5), (11), (12).

4. Построение программного движения

Приведем общую схему получения программной траектории и программного движения для рассматриваемой двухточечной терминальной задачи. Как указывалось выше, построения проводятся в четыре этапа.

На первом этапе необходимо вывести динамическую систему из состояния равновесия. Сначала ищем многочлен третьего порядка $\vartheta_*(t)$, определенный на отрезке $[t_1, t_4]$ и удовлетворяющий условиям (17). Этот многочлен имеет вид

$$\vartheta_*(t) = a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\dot{\vartheta}_0 t_4 - \dot{\vartheta}_0 t_1 - 2\vartheta_0}{(t_4 - t_1)^3}, & a_2 &= \frac{2\dot{\vartheta}_0 t_1^2 - \dot{\vartheta}_0 t_1 t_4 - \dot{\vartheta}_0 t_4^2 + 3t_1 \vartheta_0 + 3t_4 \vartheta_0}{(t_4 - t_1)^3}, \\ a_3 &= -\frac{\dot{\vartheta}_0 t_1^3 + \dot{\vartheta}_0 t_1^2 t_4 - 2\dot{\vartheta}_0 t_1 t_4^2 + 6t_1 t_4 \vartheta_0}{(t_4 - t_1)^3}, & a_4 &= \frac{t_1^2 (\dot{\vartheta}_0 t_1 t_4 - \dot{\vartheta}_0 t_4^2 - t_1 \vartheta_0 + 3t_4 \vartheta_0)}{(t_4 - t_1)^3}. \end{aligned} \quad (21)$$

Программное управление на первом этапе

$$u_2 = \frac{1}{L} \ddot{\vartheta}_*(t) = \frac{1}{L} (6a_1 t + 2a_2),$$

т.е. линейно по времени.

Программное изменение $x_*(t)$ и $\dot{x}_*(t)$ находим численно как решение соответствующей задачи Коши для (13) при подстановке в правую часть $\vartheta_*(t)$ и $\ddot{\vartheta}_*(t)$.

На втором этапе для построения программного движения используем метод накрытий. Выразив $\ddot{\vartheta}$ из уравнения $\dot{\xi} = 0$ (см. (14)), получим

$$\ddot{\vartheta} = \frac{3LM\dot{x}\ddot{\vartheta}^2 + 3\sec\vartheta\dot{\vartheta}\ddot{\vartheta}(gLM\sin\vartheta + \ddot{\vartheta}) - \sec^2\vartheta\dot{\vartheta}^3(gLM + \sin\vartheta\ddot{\vartheta})}{\dot{\vartheta}(\sec\vartheta\dot{\vartheta} + LM\dot{x})}. \quad (22)$$

Находим значение $\ddot{\vartheta}(t_4)$ из соотношения $z(t_4) = x_3$ для функции (15) с учетом (13):

$$\ddot{\vartheta}(t_4) = -\frac{LM\dot{\vartheta}(g\operatorname{tg}\vartheta\dot{\vartheta}^2 + 2(x_3 - x)\dot{\vartheta}^2 + 2\vartheta\dot{\vartheta}\dot{x})}{\vartheta^2(\sec\vartheta\dot{\vartheta} + LM\dot{x})}, \quad (23)$$

где значения переменных $x, \vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta}$ берутся в точке $t = t_4$ (см. (18)).

Решаем задачу Коши для системы двух уравнений (13) и (22) с начальными условиями (18) и (23). Интегрирование останавливаем в тот момент, когда ϑ становится равным нулю. Такой момент времени обозначаем t_3 . В результате находим функцию управления $u_2(t) = \ddot{\vartheta}_*(t)/L$ на отрезке $[t_4, t_3]$.

Управление на третьем и четвертом этапах строится с использованием метода симметрий и задается формулой (10). Таким образом, управление на третьем этапе симметрично управлению на втором этапе, а управление на четвертом этапе симметрично управлению на первом этапе. По продолжительности третий этап равен второму, а четвертый первому, поэтому общее время движения определяется как $T = 2(t_3 - t_1)$, а время окончания движения как $t_2 = t_1 + 2(t_3 - t_1)$.

5. Результаты численного моделирования

Зададим следующие граничные условия: $t_1 = 20$ с, $x(t_1) = 100$ с, $x(t_2) = 300$ с. Параметры модели были взяты из [11]. Выберем также дополнительные параметры: $t_4 = 28$ с, $\vartheta_0 = -0,2$, $\dot{\vartheta}_0 = 0,3$.

Приведем графики зависимостей программного изменения переменных состояния системы от времени и программного управления от времени, полученных описанным выше методом.

Из рис. 1–4 видно, что решена поставленная задача терминального управления, вертолет переводится из положения равновесия в положение равновесия. Для удобства восприятия графиков этапы управления разделены вертикальными линиями.

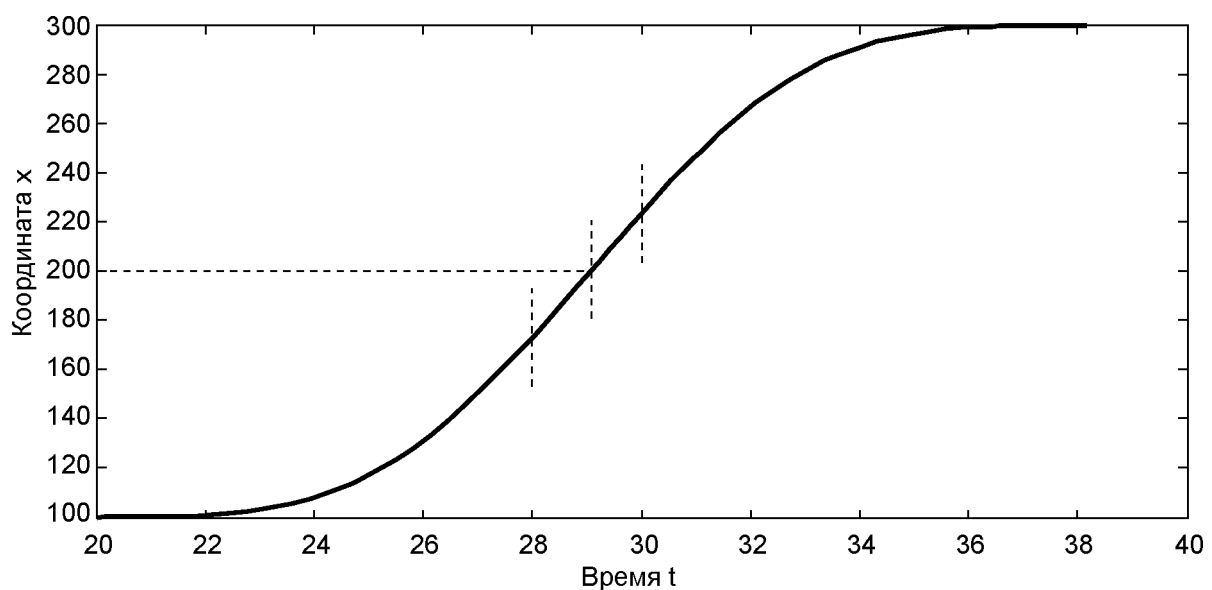


Рис. 1. График $x_*(t)$

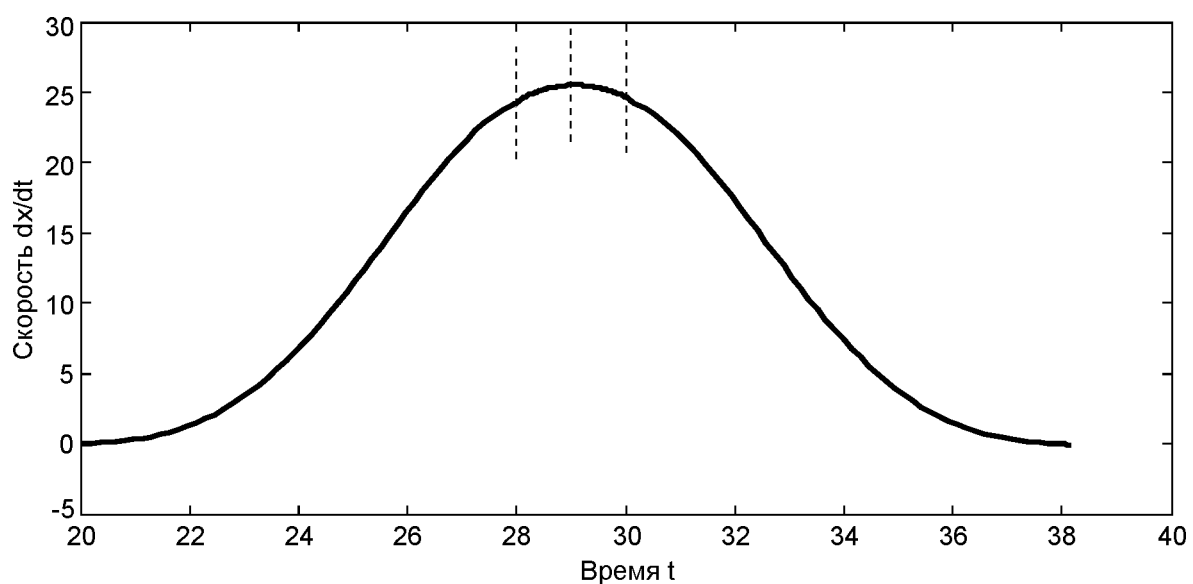


Рис. 2. График $\dot{x}_*(t)$

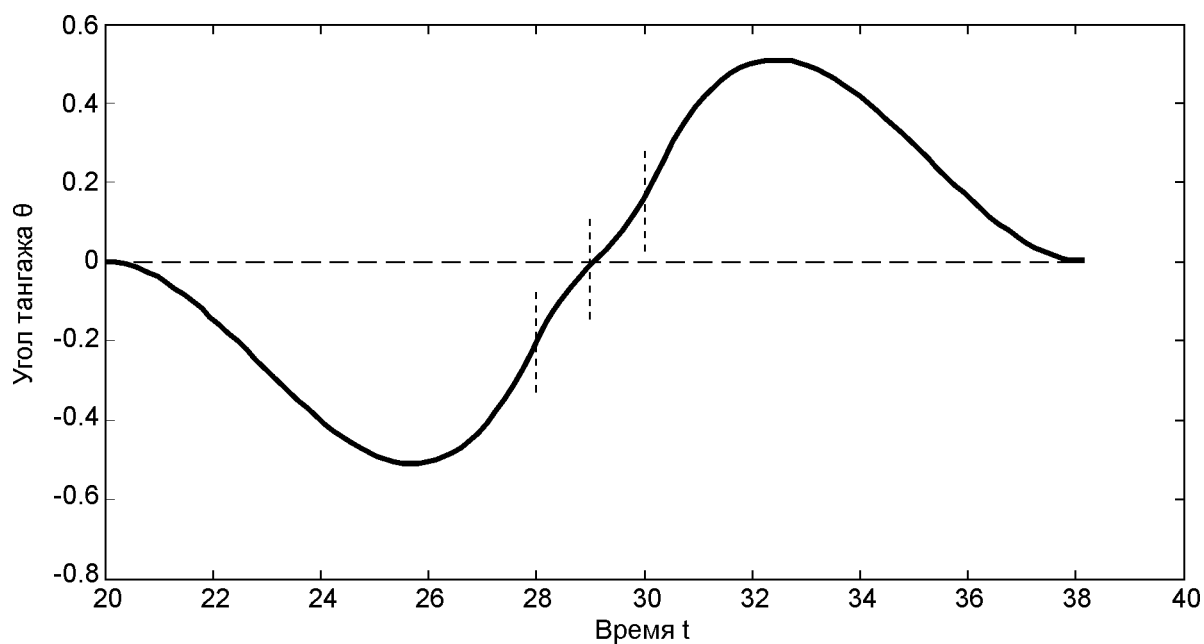


Рис. 3. График $\vartheta_*(t)$

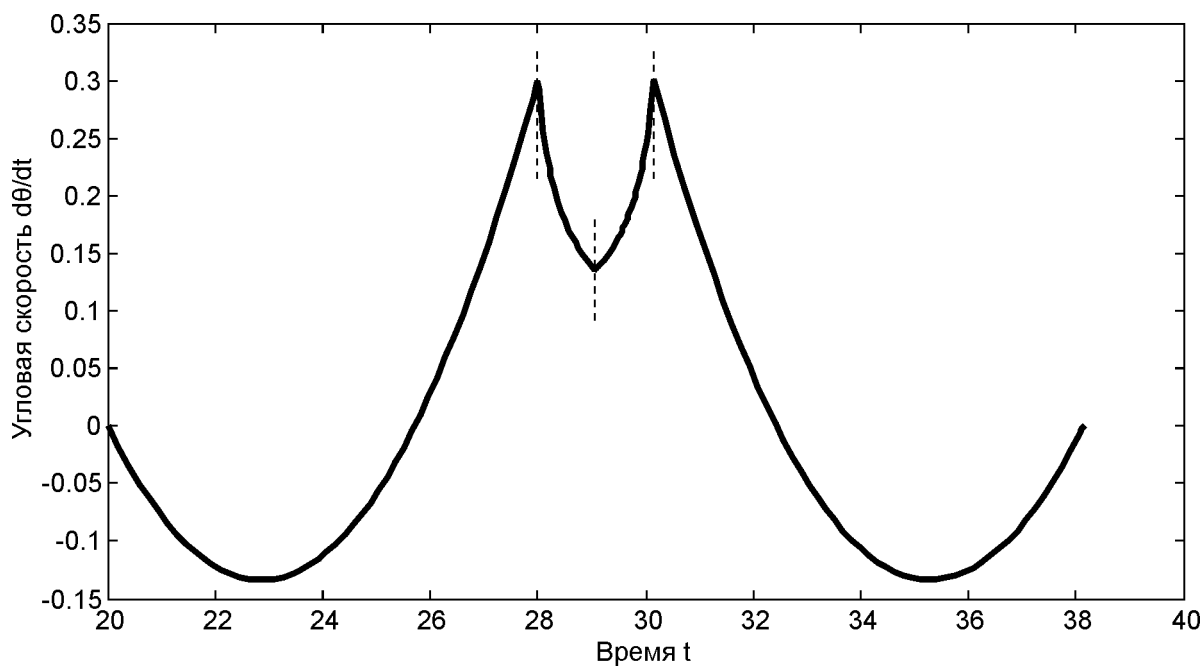


Рис. 4. График $\dot{\vartheta}_*(t)$

На рис. 5 приведен график зависимости $Lu_{2*}(t)$ на всем отрезке $[t_1, t_2]$ времени движения. Это управление решает поставленную задачу терминального управления.

Заключение

Для нелинейной динамической системы, описывающей движение вертолета вдоль заданной горизонтальной прямой, предложен метод синтеза программного движения, переводящего вертолет из положения равновесия в положение равновесия.

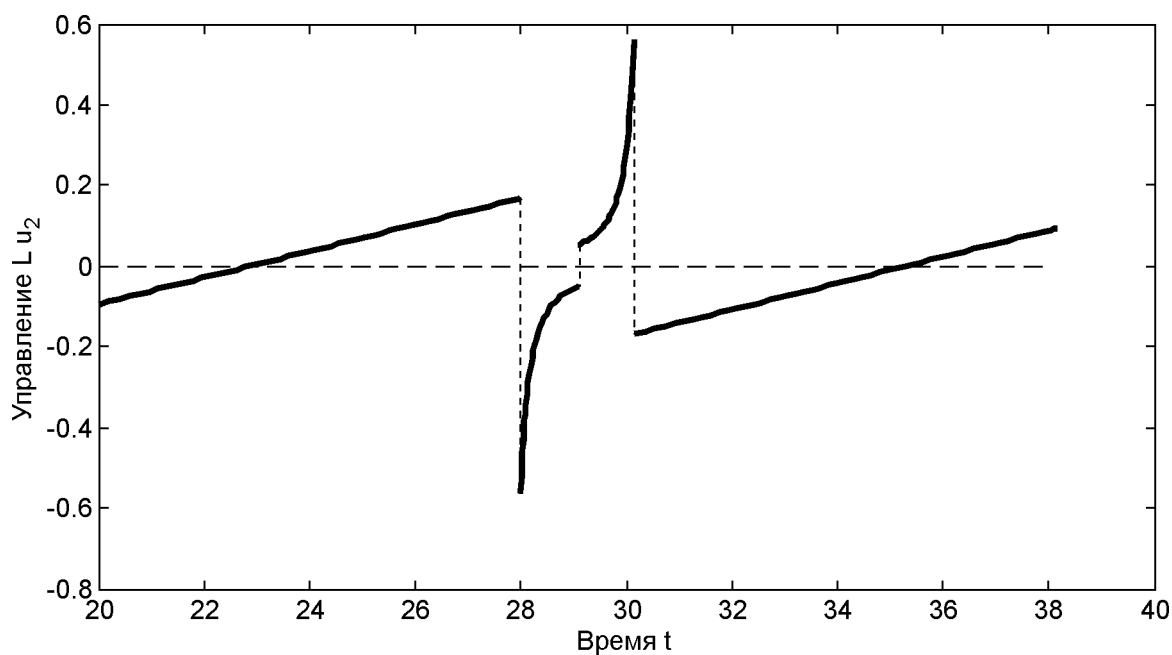


Рис. 5. График $Lu_{2*}(t)$

Характерной особенностью рассматриваемой нелинейной динамической системы является ее неплоскостность, что не позволяет использовать для этой системы известные методы решения двухточечной терминальной задачи, развитые для плоских систем. Поэтому предложенный в работе подход, позволивший найти решение терминальной задачи, представляется достаточно полезным.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №№ 12-07-00329 и № 13-07-00736.

Список литературы

1. Крищенко А.П. Стабилизация программных движений нелинейных систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1985. № 6. С. 103–112.
2. Крищенко А.П. Преобразование нелинейных систем и стабилизация программных движений // Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана. 1988. № 512. С. 69–87.
3. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Допустимые пространственные траектории беспилотного летательного аппарата в вертикальной плоскости // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 3. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/367724.html> (дата обращения 3.09.2013).
4. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Терминальное управление пространственным движением летательных аппаратов // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 5. С. 51–64.
5. Krishchenko A.P., Kanatnikov A.N., Tkachev S.B. Planning and control of spatial motion of flying vehicles // IFAC Workshop Aerospace guidance, navigation and flight con-

- trol systems AGNFCS'09 (Samara, Russia, 30 June – 2 July 2009). Режим доступа: <http://lib.physcon.ru/doc?id=b502c4579298> (дата обращения 3.09.2013).
6. Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P. A Lie — Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1999. Vol. 44, no. 5. P. 922–937. DOI: 10.1109/9.763209.
 7. Chetverikov V.N. Flat control systems and deformations of structures on diffeities // Forum Mathematicum. 2004. Vol. 16, no. 6. P. 903-923. DOI: 10.1515/form.2004.16.6.903.
 8. Четвериков В.Н. Плоскостность динамически линеаризуемых систем // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 12. С. 1665–1674.
 9. Белинская Ю.С., Четвериков В.Н. Управление четырехвинтовым вертолетом // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 5. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/397373.html> (дата обращения 3.09.2013).
 10. Белинская Ю.С. Реализация типовых маневров четырехвинтового вертолета // Молодежный научно-технический вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 2. Режим доступа: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/551872.html> (дата обращения 3.09.2013)
 11. Sira-Ramirez H., Castro-Linares R., Liceaga-Castro E. A Liouvillian systems approach for the trajectory planning-based control of helicopter models // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2000. Vol. 10. P. 301–320.
 12. Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М., Дужин С.В., Красильщик И.С., Самохин А.В., Торхов Ю.Н., Хотькова Н.Г., Четвериков В.Н. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. М.: Факториал Пресс, 2005. 380 с. (XX век. Математика и механика; Вып. 9).

Automatic synthesis of the helicopter programmed motion along the horizontal line

10, October 2013

DOI: 10.7463/1013.0660675

Belinskaya Yu. S., Chetverikov V. N., Tkachev S. B.

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russian Federation

usbelka@mail.ru
chetverikov.vl@yandex.ru
s.tkachev@bmstu.ru

For four-dimensional model describing the helicopter motion along a given horizontal line the problem of automated synthesis of programmed motion is solved. This solution provides a helicopter motion from a given state of rest in the given state of rest. Time to perform the maneuver is not set. The considered helicopter model is a control dynamic system, which is not a flat system. For such systems general approaches to the terminal problem solution are presently unknown.

To solve the terminal problem two approaches are applied. The first approach is based on the use of finite symmetry, which converts the initial conditions of the problem in the final conditions. The use of such symmetry can reduce the number of final conditions. The second approach is based on the use of a covering and consists in the construction of a special mapping, which for two given dynamic systems surjectively maps the set of solutions of the first system in the set of solutions of the second system. The programmed motion in this case can be found as the solution of two related specifically posed Cauchy problems for these dynamic systems. The resulting programmed control is a piecewise continuous function of time.

References

1. Krishchenko A.P. Ctabilizatsiya programmnykh dvizheniy nelineynykh sistem [Stabilization of programmed motion of nonlinear systems]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, 1985, no. 6, pp. 103–112.
2. Krishchenko A.P. Preobrazovanie nelineynykh sistem i stabilizatsiia programmnykh dvizhenii [The transformation of nonlinear systems and stabilization of programmed motions]. *Trudy MVTU im. N.E. Baumana* [Proc. of the Bauman MSTU], 1988, no. 512, pp. 69–87.
3. Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Dopustimye prostranstvennye traektorii bespilotnogo letatel'nogo apparata v vertikal'noy ploskosti [Admissible spatial trajectories

- of the unmanned aeral vechicle in the vertical plane]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2012, no. 3. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/367724.html>, accessed 03.09.2013.
4. Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. Terminal'noe upravlenie prostranstvennym dvizheniem letatel'nykh apparatov [Terminal control of spatial motion of flying vehicles]. *Izvestiya Akademii Nauk. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2008, no. 5, pp. 51–64. (English Translation: *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2008, vol. 47, no. 5, pp. 718–731. DOI: 0.1134/S1064230708050055).
 5. Krishchenko A.P., Kanatnikov A.N., Tkachev S.B. Planning and control of spatial motion of flying vehicles. In: *Proc. of the IFAC Workshop Aerospace guidance, navigation and flight control systems AGNFCS09*, Samara, Russia, 30 June – 2 July 2009. Available at: <http://lib.physcon.ru/doc?id=b502c4579298>, accessed 01.09.2013.
 6. Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P. A LieBacklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1999, vol. 44, no. 5, pp. 922–937. DOI: 10.1109/9.763209.
 7. Chetverikov V.N. Flat control systems and deformations of structures on diffieties. *Forum Mathematicum*, 2004, vol. 16, no. 6, pp. 903–923. DOI: 10.1515/form.2004.16.6.903.
 8. Chetverikov V.N. Ploskostnost' dinamicheski linearizuemykh sistem [Flatness of dynamically linearizable systems]. *Differentsial'nye uravneniya*, 2004, vol. 40, no. 12, pp. 1665–1674. (English Translation: *Differential Equations*, 2004, vol. 40, iss. 12, pp. 1747–1756. DOI: 10.1007/s10625-005-0106-5).
 9. Belinskaya Yu.S., Chetverikov V.N. Upravlenie chetyrekhvintovym vertoletom [Control of four-propeller rotorcraft]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2012, no. 5. DOI: 10.7463/0512.0397373.
 10. Belinskaya Yu.S. Realizatsiya tipovykh manevrov chetyrekhvintovogo vertoleta [Implementation of typical maneuvers of four-propeller helicopter]. *Molodezhnyy nauchno-tekhnicheskiiy vestnik. MGTU im. N.E. Baumana*, 2013, no. 2. Available at: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/551872.html>, accessed 03.09.2013.
 11. Sira-Ramirez H., Castro-Linares R., Liceaga-Castro E. A Liouvillian systems approach for the trajectory planning-based control of helicopter models. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 2000, vol. 10, pp. 301–320.
 12. Bocharov A.V., Verbovetskiy A.M., Vinogradov A.M., Duzhin S.V., Krasil'shchik I.S., Samokhin A.V., Torkhov Yu.N., Khor'kova N.G., Chetverikov V.N. *Simmetrii i zakony sokhraneniya uravneniy matematicheskoy fiziki* [Symmetries and conservation laws of equations of mathematical physics]. Moscow, Faktorial Press, 2005. 380 p. (Ser. 20 vek. Matematika i mekhanika [20 century. Mathematics and mechanics]; iss. 9).