

Оценка эффективной теплопроводности композита с шаровыми включениями методом самосогласования

09, сентябрь 2013

DOI: 10.7463/0913.0601512

Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н., Савельева И. Ю.

УДК 541.124

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
fn2@bmstu.ru

Введение

Один из способов повышения макроскопических свойств конструкционных материалов состоит в армировании их включениями с высокими механическими характеристиками, в том числе и наноструктурными элементами. При этом такие материалы можно рассматривать как композиты, состоящие из матрицы, объединяющей армирующие включения. Одной из распространенных форм включений является близкая к шаровой.

Для теплонапряженных конструкций, подверженных одновременному воздействию не только механических, но и тепловых нагрузок, наряду с информацией о механических характеристиках композита важно располагать данными и о его теплофизических свойствах (в частности, о коэффициенте теплопроводности). Эффективное значение λ коэффициента теплопроводности композита, армированного шаровыми включениями, зависит от их объемной концентрации C_V и от соотношения между коэффициентами теплопроводности матрицы и включений.

Известно несколько подходов к оценке значения λ [1, 2, 3, 4, 5, 6]. В данной работе использован подход, получивший название метода самосогласования [2, 7]. Этот подход дает приемлемые результаты применительно к поликристаллическим материалам с анизотропными кристаллическими зернами [8], а также был использован при оценке упругих характеристик как поликристаллов [2], так и композитов [7]. Особенность этого подхода состоит в учете взаимодействия элементов структуры неоднородного материала с однородной средой, имеющей искомые эффективные характеристики [9]. Последующее приравнивание нулю осредненных по объему композита возмущений распределения параметров в элементах структуры позволяет получить расчетные зависимости для искомых эффективных характеристик рассматриваемого неоднородного материала.

1. Математическая модель

Для оценки эффективного значения λ коэффициента теплопроводности композита с шаровыми включениями построим математическую модель теплового взаимодействия характерных элементов структуры такого композита с окружающим эти элементы однородным материалом, имеющим искомый коэффициент теплопроводности λ . Сначала рассмотрим процесс переноса тепловой энергии в шаровом включении радиусом R с коэффициентом теплопроводности λ_0 , помещенным в неограниченную пространственную область с однородным материалом. Тепловой контакт на сферической поверхности радиусом R считаем идеальным.

Центр шарового включения совместим с началом сферической системы координат. На большом по сравнению с радиусом R расстоянии r от начала координат зададим вектор градиента температурного поля в однородном материале, направленный по оси сферической системы координат, от которой происходит отсчет угловой координаты ϑ , т.е. при $r \rightarrow \infty$ установившееся распределение температуры в этом материале будет описывать функция $T_\infty(r, \vartheta) = Gr \cos \vartheta$, где G — модуль вектора градиента. Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в сферических координатах имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (1)$$

В данном случае благодаря параллельности заданного вектора градиента температурного поля оси отсчета угловой координаты ϑ распределение температуры симметрично относительно этой оси и не зависит от угловой координаты φ , т.е. $\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \equiv 0$.

По мере приближения к составному шару температурное поле в однородном материале претерпевает возмущение, описываемое дополнительным слагаемым $\Delta T(r, \vartheta) = \frac{B}{r^2} \cos \vartheta$, где B — подлежащий определению постоянный коэффициент. Это слагаемое также удовлетворяет уравнению (1). Таким образом, установившееся температурное поле в однородном материале, удовлетворяющее заданному условию при $r \rightarrow \infty$ и уравнению (1), описывает функция

$$T(r, \vartheta) = T_\infty(r, \vartheta) + \Delta T(r, \vartheta) = \left(Gr + \frac{B}{r^2} \right) \cos \vartheta. \quad (2)$$

Аналогичная зависимость

$$T_0(r, \vartheta) = \left(A_0 r + \frac{B_0}{r^2} \right) \cos \vartheta \quad (3)$$

описывает установившееся распределение температуры в шаровом включении, но в силу ограниченности значения температуры в центре шарового включения (при $r = 0$) необходимо положить $B_0 = 0$.

В равенства (2) и (3) входят два неизвестных коэффициента B и A_0 , которые можно найти из граничных условий на сферической поверхности радиусом R . Из условий непрерывности

на этой поверхности температуры и радиальной составляющей вектора плотности теплового потока следует

$$T_0(R, \vartheta) = T(R, \vartheta)$$

и

$$\lambda_0 \left. \frac{\partial T_0}{\partial r} \right|_{r=R} = \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R}.$$

Отсюда с использованием формул (2) и (3) и равенства $B_0 = 0$ находим

$$A_0 = G + \frac{B}{R^3}, \quad A_0 = \frac{\lambda}{\lambda_0} \left(G - \frac{2B}{R^3} \right)$$

и в итоге получаем

$$\frac{B}{R^3} = \frac{\lambda/\lambda_0 - 1}{2\lambda/\lambda_0 + 1} G$$

и

$$A_0 = \frac{3\lambda G}{2\lambda + \lambda_0}. \quad (4)$$

Матрицу композита представим состоящей из шаровых частиц переменного радиуса R_m , меняющегося от некоторого конечного значения до бесконечно малой величины, что позволяет заполнить все промежутки между шаровыми включениями. При условиях, аналогичных условиям теплового взаимодействия шарового включения и однородного материала, рассмотрим процесс переноса тепловой энергии в шаровой частице матрицы радиусом R_m с коэффициентом теплопроводности λ_m . После соответствующих преобразований получим, что установившееся распределение температуры в такой частице описывает функция

$$T_m(r, \vartheta) = A_m r \cos \vartheta, \quad (5)$$

где

$$A_m = \frac{3\lambda G}{2\lambda + \lambda_m}. \quad (6)$$

2. Метод самосогласования

Определим в шаровом включении и в шаровой частице матрицы композита возмущения установившегося температурного поля относительно установившегося распределения $T_\infty(r, \vartheta) = Gr \cos \vartheta$ температуры в однородном материале. Из формул (2) ... (4) с учетом равенства $B_0 = 0$ для шарового включения получим

$$T'_0(r, \vartheta) = T_0(r, \vartheta) - T_\infty(r, \vartheta) = \frac{\lambda - \lambda_0}{2\lambda + \lambda_0} G(r \cos \vartheta),$$

а из формул (2), (5) и (6) для шаровой частицы матрицы найдем

$$T'_m(r, \vartheta) = T_m(r, \vartheta) - T_\infty(r, \vartheta) = \frac{\lambda - \lambda_m}{2\lambda + \lambda_m} G(r \cos \vartheta).$$

Отсюда следует, что в этих элементах структуры композита возмущенное распределение температуры является одномерным и зависит лишь от координаты $r \cos \vartheta$, направленной по оси отсчета угла ϑ в сферической системе координат. В направлении этой оси единственная составляющая градиента возмущенного температурного поля в шаровом включении равна

$$G_0 = \frac{\partial T'_0(r, 0)}{\partial r} = \frac{\lambda - \lambda_0}{2\lambda + \lambda_0} G, \quad (7)$$

а в шаровой частице матрицы —

$$G_m = \frac{\partial T'_m(r, 0)}{\partial r} = \frac{\lambda - \lambda_m}{2\lambda + \lambda_m} G. \quad (8)$$

Из соотношений (7) и (8) видно, что найденные составляющие градиента возмущенного температурного поля как в шаровых включениях, так и в шаровых частицах матрицы не зависят от координат и размеров включений и частиц. Поэтому при осреднении этих составляющих по объему композита существенными являются лишь объемные концентрации C_V для включений и $1 - C_V$ для матрицы. В соответствии с методом самосогласования результат осреднения следует приравнять нулю, т.е. положить $G_0 C_V + G_m (1 - C_V) = 0$, или с учетом соотношений (7) и (8) при $G \neq 0$

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{2\lambda + \lambda_0} C_V + \frac{\lambda - \lambda_m}{2\lambda + \lambda_m} (1 - C_V) = 0.$$

Это равенство приводит к квадратному уравнению

$$2\lambda^2 - (2\lambda_m - \lambda_0 + 3(\lambda_0 - \lambda_m)C_V)\lambda - \lambda_0\lambda_m = 0$$

относительно искомого коэффициента теплопроводности λ композита, положительное решение которого имеет вид

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_m} = \frac{2 - \bar{\lambda} + 3(\bar{\lambda} - 1)C_V + \sqrt{(2 - \bar{\lambda} + 3(\bar{\lambda} - 1)C_V)^2 + 8\bar{\lambda}}}{4}, \quad (9)$$

где $\bar{\lambda} = \lambda_0/\lambda_m$.

Отметим, что в рассматриваемом случае осреднение по объему композита составляющих $q_0 = -\lambda_0 A_0$ и $q_m = -\lambda_m A_m$ вектора плотности теплового потока соответственно во включениях и частицах матрицы и приравнивание полученного результата составляющей $q = -\lambda G$ вектора плотности теплового потока в однородном материале приводит к идентичному квадратному уравнению, положительное решение которого определяет формула (9).

3. Результаты расчетов

На рис. 1 сплошными кривыми представлены графики зависимостей $\tilde{\lambda}$ от C_V при различных значениях $\bar{\lambda} = \lambda_0/\lambda_m < 1$, построенные по формуле (9). Штриховые и пунктирные линии соответствуют зависимостям от C_V верхней $\tilde{\lambda}_+$ и нижней $\tilde{\lambda}_-$ оценок величины $\tilde{\lambda}$, определяемых формулами [2]

$$\tilde{\lambda}_+ = \frac{1}{\frac{C_V}{3\bar{\lambda}} + \frac{1-C_V}{1+2\bar{\lambda}}} - 2\bar{\lambda}, \quad \tilde{\lambda}_- = \frac{1}{\frac{C_V}{\bar{\lambda}+2} + \frac{1-C_V}{3}} - 2.$$

Эти формулы получены в сингулярном приближении теории случайных функций и совпадают с соотношениями, которые следуют из двойственного вариационного принципа Хашина — Штрикмана [10]. Результаты расчетов по формуле [4, 6]

$$\tilde{\lambda}^* = \frac{\lambda^*}{\lambda_m} = \frac{2 + \bar{\lambda} - 2(1 - \bar{\lambda})C_V}{2 + \bar{\lambda} + (1 - \bar{\lambda})C_V}, \quad (10)$$

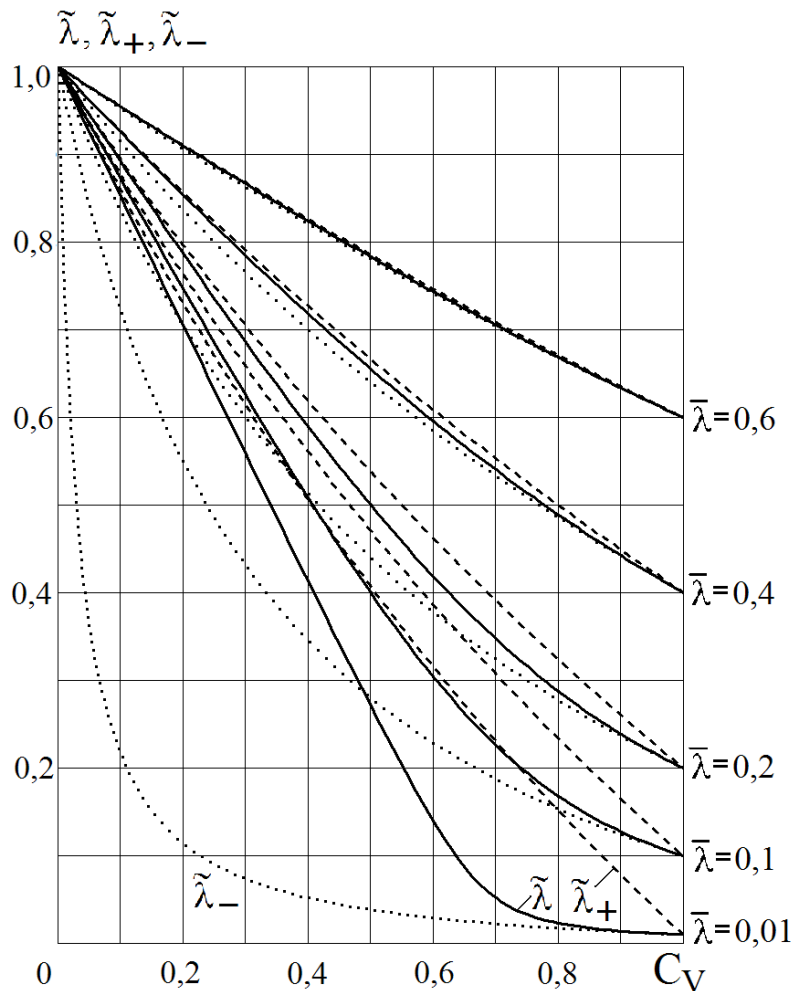


Рис. 1. Графики зависимостей безразмерного эффективного значения коэффициента теплопроводности композита и верхней и нижней оценок этого значения от объемной концентрации включений при различных значениях $\bar{\lambda} < 1$

полученной на основе математической модели теплового взаимодействия с однородным материалом представительного элемента структуры композита в виде составной шаровой частицы, включающей шаровое включение и окружающий его концентрический слой матрицы, совпадают с результатами вычислений по формуле для верхней оценки $\tilde{\lambda}_+$.

Из рис. 1 видно, что для всех значений $\bar{\lambda}$ графики зависимостей $\tilde{\lambda}$ и $\hat{\lambda}$ от C_V находятся в полосе между соответствующими графиками для верхних и нижних оценок этих величин. По мере отклонения значения $\bar{\lambda}$ от единицы ширина полосы при значениях C_V , промежуточных между нулем и единицей, заметно возрастает. Это означает, что возможная погрешность расчетов с использованием формулы (9), может также расти при увеличении различия между значениями коэффициентов теплопроводности включений и матрицы. Если при $\bar{\lambda} = 0,6$ графики для $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\lambda}_-$ и $\tilde{\lambda}_+$ практически совпадают между собой и возможная относительная погрешность формулы (9) имеет порядок десятых долей процента, то уже при $\bar{\lambda} = 0,2$ эта погрешность возрастает на два порядка. Например, при

$$C_V = 0,6, \quad \bar{\lambda} = 0,2$$

имеем

$$\tilde{\lambda} = 0,4188, \quad \tilde{\lambda}_- = 0,3778, \quad \tilde{\lambda}_+ = 0,4627,$$

т.е. наибольшая возможная относительная погрешность

$$\frac{\tilde{\lambda}_+}{\tilde{\lambda}} - 1 = 0,105 = 10,5\%.$$

Поскольку при использовании метода самосогласования элементы структуры композита имели одинаковую шаровую форму, графики, приведенные на рис. 1 могут характеризовать зависимость λ от C_V и в случае, когда $\lambda_0 > \lambda_m$, т.е. при $\bar{\lambda} > 1$. В этом случае на рис. 1 следует заменить C_V на $1 - C_V$, $\bar{\lambda}$ на отношение λ_m/λ_0 , а $\tilde{\lambda}$ на отношение λ/λ_0 . Тогда графики для $\tilde{\lambda}_+$ и $\tilde{\lambda}_-$ будут соответствовать верхней и нижней оценкам отношения λ/λ_0 . Например, кривые для значения $\bar{\lambda} = 0,2$ теперь соответствуют значению отношения $\lambda_m/\lambda_0 = 0,2$, или $\lambda_0/\lambda_m = 5$. Значение отношения λ/λ_0 при $\lambda_0/\lambda_m = 5$ и $C_V = 0,6$ будет равно ординате точки на кривой для $\tilde{\lambda}$ при $\bar{\lambda} = 0,2$ с абсциссой, равной $1 - C_V = 0,4$. В этом случае имеем $\lambda/\lambda_0 = 0,5896$, а нижняя и верхняя оценки этого значения соответственно равны 0,5130 и 0,6190, т.е. наибольшая возможная относительная погрешность

$$1 - \frac{\tilde{\lambda}_-}{\lambda/\lambda_0} = 0,130 = 13,0\%.$$

Следует отметить, что при $\bar{\lambda} > 1$ результаты расчетов по формуле

$$\frac{\lambda^*}{\lambda_0} = \frac{2/\bar{\lambda} + 1 - 2(1/\bar{\lambda} - 1)C_V}{2 + \bar{\lambda} + (1 - \bar{\lambda})C_V},$$

полученной преобразованием равенства (10), совпадают с нижней оценкой $\tilde{\lambda}_-$ отношения λ/λ_0 .

Заключение

Для получения оценки эффективного значения коэффициента теплопроводности композита с шаровыми включениями применен метод самосогласования, основанный на осреднении параметров возмущенного температурного поля в элементах структуры композита. Наряду с шаровыми включениями в качестве элементов структуры приняты частицы матрицы композита шаровой формы, радиус которых изменяется от некоторой конечной величины до бесконечно малой. Возмущенное температурное поле во включениях и в шаровых частицах матрицы найдено путем решения стационарной задачи теплопроводности.

Проведен количественный анализ полученной расчетной зависимости для эффективного значения коэффициента теплопроводности рассматриваемого композита. Установлено, что в широкой области изменения определяющих параметров результаты расчетов по этой зависимости расположены в промежутке между нижней и верхней оценками, которые следуют как из сингулярного приближения теории случайных функций, так и из двойственного вариационного принципа Хашина — Штрикмана. По мере увеличения различия между коэффициентами теплопроводности включений и матрицы ширина полосы между нижней и верхней оценками при промежуточных значениях объемной концентрации включений возрастает, что может привести к увеличению возможной погрешности полученной расчетной зависимости.

Работа выполнена по гранту НШ-255.2012.8 программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ.

Список литературы

1. Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Л.: Энергия, 1974. 264 с.
2. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
3. Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Смесевые модели механики композитов. Ч. 1. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. № 3. С. 36–49.
4. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективный коэффициент теплопроводности композита с шаровыми включениями // Тепловые процессы в технике. 2012. Т. 4, № 10. С. 470–474.
5. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Теплопроводность композитов с шаровыми включениями: Вывод, оценка достоверности и параметрический анализ расчетных формул. Saarbrücken, Deutschland (Германия): LAP Lambert Academic Publishing, 2013. 77 р.

6. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Сравнительный анализ оценок эффективного коэффициента теплопроводности композита с шаровыми включениями // Наука и образование. Электрон. журн. 2013. № 7. DOI: 10.7463/0713.0569319.
7. Кристенсен Р. Введение в механику композитов: Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 336 с.
8. Зарубин В.С. Прикладные задачи термopрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 296 с.
9. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 248 с.
10. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials // J. Appl. Phys. 1962. Vol. 33. P. 3125. DOI: 10.1063/1.1728579.

Evaluation of effective thermal conductivity of composites with ball inclusions by the method of self-consistency

09, September 2013

DOI: 10.7463/0913.0601512

Zarubin V. S., Kuvyrkin G. N., Savelyeva I. Yu.

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russian Federation

fn2@bmstu.ru

The method of self-consistency was applied to obtaining an estimate of the effective value of thermal conductivity of a composite with ball inclusions. This method was based on averaging of parameters of a perturbed temperature field in elements of a composite structure. The perturbed temperature field in inclusions and ball particles of the composite matrix was found by solving the steady-state heat conduction problem formulated on the basis of a constructed mathematical model of thermal interaction of these elements with a homogeneous material with an unknown coefficient of thermal conductivity. Quantitative analysis of the derived calculated relation was carried out to a sufficiently wide range of the defining parameters to verify reliability of the obtained estimate. The calculation results with respect to this relation are located within the interval between the lower and upper estimates which could be obtained from both a singular approximation of the theory of random functions and the dual variation principle of Hashin — Shtrikman.

References

1. Dul'nev G.N., Zarichnyak Yu.P. *Teploprovodnost' smesey i kompozitsionnykh materialov* [Thermal conductivity of mixtures and composite materials]. Leningrad, Energiya, 1974. 264 p.
2. Shermergor T.D. *Teoriia uprugosti mikroneodnorodnykh sred* [Theory of elasticity of micro-inhomogeneous media]. Moscow, Nauka, 1977. 400 p.
3. Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Smesevye modeli mekhaniki kompozitov. Ch. 1. Termomekhanika i termouprugost' mnogokomponentnoy smesi [Mixture models of composite mechanics. P. 1. Thermal mechanics and thermoelasticity of multicomponent mixture]. *Vestnik*

MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2009, no. 3, pp. 36–49.

4. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Iu. Effektivnyi koeffitsient teploprovodnosti kompozita s sharovymi vklucheniiami [The effective thermal conductivity of composites with spherical inclusions]. *Teplovyie protsessy v tekhnike*, 2012, no. 10, pp. 470–474.
5. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Iu. *Teploprovodnost' kompozitov s sharovymi vklucheniyami: Vывod, otsenka dostovernosti i parametricheskiy analiz raschetnykh formul* [The thermal conductivity of composites with spherical inclusions: Conclusion, the assessment of reliability and parametric analysis of calculation formulas]. Saarbrücken, Deutschland (Germany), LAP Lambert Academic Publishing, 2013. 77 p.
6. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Iu. Sravnitel'nyy analiz otsenok effektivnogo koeffitsienta teploprovodnosti kompozita s sharovymi vklucheniyami [Comparative analysis of estimations of heat conduction of a composite with ball inclusions]. *Nauka i obrazovanie MG TU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2013, no. 7. DOI: 10.7463/0713.0569319.
7. Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. New York, Wiley-Interscience publication, 1979. 348 p. (Russ. ed.: Kristensen R.M. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov*. Moscow, Mir, 1982. 334 p.).
8. Zarubin V.S. *Prikladnye zadachi termoprochnosti elementov konstruksii* [Applied problems in thermal strength of structural elements]. Moscow, Mashinostroenie, 1985. 296 p.
9. Эшелби Дж. Eshelby J.D. *The continuum theory of lattice defects*. In: Seitz F., Turnbull D., eds. *Progress in Solid State Physics*. Vol. 3. New York, Academic Press, 1956, pp. 79–144. (Russ. ed.: Eshelbi Dzh. *Kontinual'naiia teoriia dislokatsii*. Moscow, Izd-vo inostrannoi literatury, 1963. 248 p.).
10. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. *J. Appl. Phys.*, 1962, vol. 33, no. 10, pp. 3125–3131. DOI: 10.1063/1.1728579.