НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

Теплопроводность текстурированного композита с анизотропными включениями в виде эллипсоидов вращения

06, июнь 2013

DOI: 10.7463/0613.0569312

Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н.

УДК 541.124

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

fn2@bmstu.ru

Введение

Текстура, возникающая при модификации композита армирующими элементами, может существенным образом повлиять на величину эффективных коэффициентов теплопроводности такого композита. В идеализированном случае одинаковой ориентации анизотропных включений эллипсоидальной формы, главные оси тензора теплопроводности которых соосны с осями симметрии эллипсоидов, значения λ_α° ($\alpha = 1, 2, 3$) эффективных коэффициентов теплопроводности композита зависят лишь от соответствующих главных значений λ_α этого тензора, коэффициента теплопроводности λ_m матрицы и объемной концентрации C_V таких включений. Но в общем случае произвольной текстуры главные значения λ_α^* тензора эффективной теплопроводности текстурированного композита будут отличны от значений λ_α°.

1. Математическая модель

Рассмотрим вариант текстурированного композита с анизотропными включениями в виде эллипсоидов вращения, являющимися трансверсально изотропными [1] относительно оси вращения, которую обозначим $O\xi_3$. Эта ось будет одной из главных осей тензора теплопроводности включения, которой будет соответствовать главное значение λ_3 этого тензора. Расположение двух остальных ортогональных главных осей $O\xi_1$ и $O\xi_2$ этого тензор в плоскости, перпендикулярной оси вращения, произвольно и им соответствуют равные главные значения $\lambda_1 = \lambda_2$. Таким образом, тензор теплопроводности включения будет определен лишь двумя независимыми параметрами λ_1 и λ_3.

Построенная в [2] математическая модель (ММ) переноса тепловой энергии в композите в предположении, что одинаково ориентированные анизотропные эллипсоидальные включения не контактируют между собой, т.е. отделены друг от друга слоем изотропного материала матрицы, позволила получить оценки для значений λ_α° эффективных коэффициентов теплопроводности композита в виде безразмерных соотношений

$$\widetilde{\lambda}_\alpha = \frac{\lambda_\alpha^\circ}{\lambda_m} = \frac{1 + (\bar{\lambda}_\alpha - 1)(D_\alpha^\circ + (1 - D_\alpha^\circ)C_V)}{1 + (\bar{\lambda}_\alpha - 1)D_\alpha^\circ(1 - C_V)}, \tag{1}$$

где $\bar{\lambda}_\alpha = \lambda_\alpha/\lambda_m$,

$$D_\alpha^\circ = \frac{b_1 b_2 b_3}{2} \int\limits_0^\infty \frac{du}{(b_\alpha^2 + u) f(u)}, \tag{2}$$

b_α — полуоси эллипсоида и $f(u) = \sqrt{(b_1^2 + u)(b_2^2 + u)(b_3^2 + u)}$. Отметим, что $D_1^\circ + D_2^\circ + D_3^\circ = 1$ (в частности, для шарового включения $D_\alpha^\circ = 1/3$). Интегралы в формуле (2) можно выразить через эллиптические интегралы [3, 4].

Для включений в виде эллипсоидов вращения интегралы в формуле (2) представимы в элементарных функциях [5]. В случае удлиненных эллипсоидов вращения ($b_1/b_3 = b_2/b_3 = \bar{b} < 1$)

$$D_1^\circ = D_2^\circ = \frac{1}{2(1 - \bar{b}^2)} - \frac{\bar{b}^2 \operatorname{Arch}(1/\bar{b})}{4(1 - \bar{b}^2)^{3/2}}, \quad D_3^\circ = 1 - 2D_1^\circ, \tag{3}$$

а в случае сплющенного эллипсоида (сфероида) при $\bar{b} > 1$

$$D_1^\circ = D_2^\circ = \frac{\bar{b}^2 \arccos(1/\bar{b})}{2(\bar{b}^2 - 1)^{3/2}} - \frac{1}{\bar{b}^2 - 1}, \quad D_3^\circ = 1 - 2D_1^\circ,$$

При наличии текстуры, определенной в прямоугольной декартовой системе координат с осями $O\mathrm{x}_i$ («макроосями») и ортами $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, необходимо для каждого эллипсоидального включения задать ориентацию его осей симметрии $O'\xi_k$, $k = 1, 2, 3$ («микроосей»), относительно «макроосей». Эту ориентацию можно задать ортогональной матрицей A направляющих косинусов. Элементы a_{ik} этой матрицы связаны дополнительным соотношением (с учетом используемого здесь и далее правила суммирования по повторяющимся латинским индексам)

$$a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{4}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера (единичный тензор второго ранга), $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. В этом случае каждая из строк матрицы A задает компоненты орта $\mathbf{e}_i$ в ортогональных «микроосях», а при $i = j$ равенство (4) является условием ортогональности двух ортов $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$. Таким образом, из девяти элементов a_{ik} матрицы A с учетом равенства (4) независимыми будут только три. Это связано, в частности, с тем, что любую ориентацию «микроосей» относительно «макроосей» можно задать тремя угловыми координатами Эйлера: φ —угол собственного вращения, ψ — угол прецессии и ϑ — угол нутации [6]. Углы ψ и ϑ задают направление одной из «микроосей» (на рис. 1 оси $O'\xi_3$) относительно «макроосей», а угол φ,

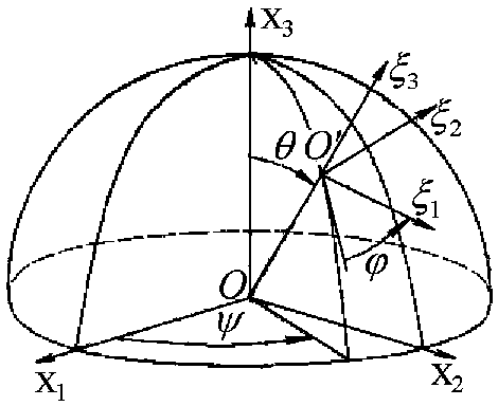

Рис. 1. Ориентация «микроосей» относительно «макроосей»

отсчитываемый от положения меридиана с долготой ψ на сфере единичного радиуса, задает поворот репера «микроосей» вокруг этой «микрооси». Элементы матрицы A выражают через углы Эйлера следующим образом [7]:

$$
\begin{aligned}
&a_{11} = \cos\varphi\,\cos\psi\,\cos\vartheta - \sin\varphi\,\sin\psi,\\
&a_{12} = -\cos\varphi\,\sin\psi\,\cos\vartheta - \sin\varphi\,\cos\psi,\\
&a_{13} = \cos\varphi\,\sin\vartheta, \qquad a_{21} = \sin\varphi\,\cos\psi\,\cos\vartheta + \cos\varphi\,\sin\psi,\\
&a_{22} = \cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi\,\cos\vartheta, \qquad a_{23} = \sin\varphi\,\sin\vartheta,\\
&a_{31} = -\cos\psi\,\sin\vartheta, \qquad a_{32} = \sin\psi\,\sin\vartheta, \qquad a_{33} = \cos\vartheta.
\end{aligned}
$$

Применительно к текстурированному композиту модифицируем построенную в [2] ММ композита следующим образом. Композит представим состоящим из различно ориентированных эллипсоидальных составных частиц, в каждой из которых анизотропное включение в виде эллипсоида вращения окружено материалом матрицы, причем составная частица и включение геометрически подобны с коэффициентом подобия $K = C_V^{1/3}$. Поскольку каждая такая составная частица является представительным элементов композита с одинаковой ориентацией эллипсоидальных включений, главные оси тензора эффективной теплопроводности такой частицы соосны с ее осями симметрии, а главные значения λ_α° этого тензора определены формулой (1). Составная частица, являясь по форме эллипсоидом вращения, аналогично включению обладает трансверсальной изотропией по отношению к свойству теплопроводности, т.е. в системе координат с «микроосями» $O'\xi_k$ имеем $\lambda_1^\circ = \lambda_2^\circ$.

Рассмотрим произвольное расположение составной частицы относительно координат с «макроосями» $O'\mathrm{x}_i$, определяемое углами Эйлера ψ и ϑ, так как поворот частицы на угол φ относительно ее оси вращения $O'\xi_k$ не влияет на ее ориентацию относительно «макроосей». По компонентам $\lambda_{11}^\circ = \lambda_{22}^\circ = \lambda_1^\circ$ и $\lambda_{33}^\circ = \lambda_3^\circ$ тензора эффективной теплопроводности этой частицы в «микроосях» найдем компоненты λ_{ij}^* ($j = 1,\,2,\,3$) этого тензора в «макроосях», воспользовавшись элементами транспонированной матрицы A и соотношениями [7]

$$\lambda_{ij}^* = \lambda_{kl}^\circ a_{ki} a_{lj}, \quad l = 1,\,2,\,3.$$

В результате запишем

$$\lambda_{11}^* = \lambda_1^\circ(a_{11}^2 + a_{21}^2) + \lambda_3^\circ a_{31}^2 = \lambda_1^\circ(\sin^2\psi + \cos^2\psi\,\cos^2\vartheta) + \lambda_3^\circ\cos^2\psi\,\sin^2\vartheta, \tag{5}$$

$$\lambda_{22}^* = \lambda_1^\circ(a_{12}^2 + a_{22}^2) + \lambda_3^\circ a_{32}^2 = \lambda_1^\circ(\cos^2\psi + \sin^2\psi\,\cos^2\vartheta) + \lambda_3^\circ\sin^2\psi\,\sin^2\vartheta, \tag{6}$$

$$\lambda_{33}^* = \lambda_1^\circ(a_{13}^2 + a_{23}^2) + \lambda_3^\circ a_{33}^2 = \lambda_1^\circ\sin^2\vartheta + \lambda_3^\circ\cos^2\vartheta, \tag{7}$$

$$\lambda_{12}^* = \lambda_1^\circ(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}) + \lambda_3^\circ a_{31}a_{32} = (\lambda_1^\circ - \lambda_3^\circ)\sin\psi\,\cos\psi\sin^2\vartheta, \tag{8}$$

$$\lambda_{13}^* = \lambda_1^\circ(a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23}) + \lambda_3^\circ a_{31}a_{33} = (\lambda_1^\circ - \lambda_3^\circ)\cos\psi\,\sin\vartheta\,\cos\vartheta, \tag{9}$$

$$\lambda_{23}^* = \lambda_1^\circ(a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23}) + \lambda_3^\circ a_{32}a_{33} = (\lambda_3^\circ - \lambda_1^\circ)\sin\psi\,\sin\vartheta\,\cos\vartheta. \tag{10}$$

2. Процедура осреднения

Для перехода к оценке эффективных коэффициентов теплопроводности композита в целом с конкретной заданной текстурой необходимо предварительно определить в общем виде процедуру осреднения компонент $\lambda_{ij}^*(\psi,\,\vartheta)$ тензора эффективной теплопроводности отдельных составных частиц, зависящих, согласно формулам (5)–(10) от углов ψ и ϑ, определяющих ориентацию каждой из этих частиц относительно «макроосей» $O\mathrm{x}_i$. Сначала рассмотрим вариант случайной (хаотической) ориентации составных частиц, при которой любое расположение «микроосей» частиц относительно «макроосей» равновероятно. Выделим в композите объем с достаточно большим числом N_Σ геометрически подобных частиц с одинаковым тензором эффективной теплопроводности. Тогда при $N_\Sigma \to \infty$ можно считать, что относительная плотность η_0 распределения микрообъемов композита по возможным ориентациям «микроосей» будет постоянна, а в силу независимости компонент λ_{ij}^* от угла φ плотность распределения точек пересечения единичной сферы на рис. 1 «микроосью» $O'\xi_3$ будет одинакова на всей ее поверхности. Это означает, что каждому элементарному телесному углу $d\Omega = \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\psi$ соответствует доля $\eta_0\,d\Omega$ рассматриваемого объема композита, для которой ориентация «микрооси» $O'\xi_3$ определена текущими значениями углов ψ и ϑ. После интегрирования по всем возможным ориентациям получим

$$\int\limits_\Omega \eta_0\,d\Omega = \int\limits_0^{2\pi}\eta_0 d\psi \int\limits_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta = 4\pi\eta_0 = 1.$$

Отсюда следует, что $\eta_0 = 1/(4\pi)$, где 4π — площадь поверхности сферы единичного радиуса.

Если составные частицы обладают каким-либо свойством, заданным скалярной величиной $F(\psi,\,\vartheta)$, не зависящей в пределах рассматриваемого объема композита от координат x_i, то среднее значение этой величины для такого композита со случайной ориентацией частиц будет равно

$$\bar{F} = \eta_0\int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} F(\psi,\,\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta = \eta_0\langle F\rangle.$$

При осреднении характеристик частиц, определяемых векторной величиной с проекциями $F_i(\psi,\,\vartheta)$, по аналогии с этой формулой можно записать

$$\bar{F}_i = \eta_0 \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} F_i(\psi,\,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = \eta_0 \langle F_i \rangle.$$

В данном случае интерес представляет характеристика составных частиц, заданная тензором второго ранга с компонентами $\lambda^*_{ij}(\psi,\,\vartheta)$, операцию осреднения которой можно представить в виде

$$\bar{\lambda}^*_{ij} = \eta_0 \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} \lambda^*_{ij}(\psi,\,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = \eta_0 \langle \lambda^*_{ij} \rangle. \tag{11}$$

Тогда, используя формулы (5)–(10), находим $\bar{\lambda}^*_{11} = \lambda^*_{22} = \lambda^*_{33} = 2\lambda^\circ_1/3 + \lambda^\circ_3/3$ и $\lambda^*_{12} = \lambda^*_{13} = \lambda^*_{23} = 0$, т.е. тензор эффективных коэффициентов теплопроводности рассматриваемого объема композита с хаотической ориентацией составных частиц в виде эллипсоидов вращения является шаровым, а этот объем будет изотропным по отношению к свойству теплопроводности. В этом случае совпадают значения $\bar{\lambda}^*_{ii}$ и λ°_{kk} первых инвариантов тензоров эффективных коэффициентов теплопроводности композита и составных частиц, что может служить косвенным подтверждением корректности процедуры осреднения. Отметим, что полученный результат справедлив при такой ориентации для частиц любой формы с произвольной анизотропией [8].

Если ориентация составных частиц в рассматриваемой модели композита упорядочена, т.е. композит текстурирован, то относительная плотность η распределения по ориентациям «микроосей» частиц в виде эллипсоидов вращения зависит от угловых координат ψ и ϑ. В общем случае она может быть неоднородной в рассматриваемом объеме композита, т.е. зависеть и от координат x_i. В этом случае необходимо проводить осреднение не только по ориентациям частиц, но и по объему композита. Если же функция $\eta(\psi,\,\vartheta)$ не зависит от координат x_i и удовлетворяет условию нормирования $\langle\eta\rangle = 1/(4\pi)$, то при осреднении характеристики частиц, определяемой компонентами $\lambda^*_{ij}(\varphi,\,\psi,\,\vartheta)$ тензора теплопроводности, вместо формулы (11) следует записать

$$\bar{\lambda}^*_{ij} = \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} \eta(\psi,\,\vartheta)\lambda^*_{ij}(\psi,\,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = \langle \eta\lambda^*_{ij} \rangle. \tag{12}$$

Функцию $f(\psi,\,\vartheta) = \eta(\psi,\,\vartheta)/\eta_0$ называют текстурной [8, 9]. В данном случае ее текущее значение равно доле объема композита, занятого составными частицами, ориентация которых определена текущими значениям аргументов этой функции. Вероятностная трактовка этой функции связана с понятием совместной плотности распределения случайного вектора [10], координатами которого являются углы Эйлера ψ и ϑ.

При хаотической ориентации составных частиц, т.е. при отсутствии у композита текстуры, зависимость от углов Эйлера исчезает и текстурная функция тождественно равна

единице, что соответствует переходу формулы (12) в равенство (11). Эту функцию также можно принять равной единице в случае так называемой идеальной текстуры, когда ориентация всех анизотропных частиц одинакова [2], а «микрооси» совпадают с соответствующими «макроосями», т.е. $\varphi = \psi = \vartheta = 0$ (см. рис. 1) и матрица A станет единичной, что приведет к формулам (1).

В общем случае текстура композита может быть комбинированной, включающей набор из n дискретных идеальных текстур и непрерывно распределенную, характеризуемую текстурной функцией $f_1(\psi,\, \vartheta)$. Пусть для каждой из дискретных идеальных структур ориентация «микроосей» определена значениями ψ_β и ϑ_β ($\beta = \overline{1,\, n}$) углов Эйлера. Тогда вместо формулы (12) следует использовать соотношение

$$\bar{\lambda}^*_{ij} = \eta_0 \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} f_1(\psi,\, \vartheta)\lambda^*_{ij} \sin\vartheta\, d\vartheta + \sum_{\beta=1}^{n} v_\beta \lambda^*_{ij}(\psi_\beta,\, \vartheta_\beta),$$

где v_β — доля объема композита, в которой идеальная текстура определена значениями ψ_β и ϑ_β. При этом текстурную функцию $f_1(\psi,\, \vartheta)$ следует нормировать согласно условию

$$\int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} f_1(\psi,\, \vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta = 1 - \sum_{\beta=1}^{n} v_\beta.$$

3. Коническая текстура композита

Среди непрерывно распределенных текстур композита с эллипсоидальными включениями можно выделить так называемую коническую текстуру [9], когда одноименные «микрооси» всех частиц являются образующими соосных круговых конических поверхностей и равномерно распределены по этим поверхностям, а направления двух остальных ортогональных «микроосей» случайны. Если ось этих поверхностей совместить с «макроосью» $O\mathrm{x}_3$, то текстурная функция $F(\vartheta)$ в этом случае будет зависеть лишь от одной угловой координаты ϑ. После осреднения по углу ψ из формул (5) и (6) получим

$$\lambda^*_{11} = \lambda^*_{22} = \frac{\lambda^\circ_1}{2}(1 + \cos^2\vartheta) + \frac{\lambda^\circ_3}{2}\sin^2\vartheta, \tag{13}$$

формула (7) для λ^*_{33} останется без изменения, а из формул (8)–(10) (как и при хаотической ориентации «микроосей») следует $\lambda^*_{12} = \lambda^*_{13} = \lambda^*_{23} = 0$, т.е. «макроось» $O\mathrm{x}_3$ композита будет главной осью тензора эффективной теплопроводности композита с конической текстурой.

В рассматриваемом случае составных частиц в виде эллипсоидов вращения при осреднении допустимо ограниться интегрированием по углу ϑ в в интервале $(0;\, \pi/2)$. Тогда текстурную функцию $F(\vartheta)$ следует нормировать из условия

$$\int\limits_0^{\pi/2} F(\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta = 1, \tag{14}$$

причем равномерному распределению «микроосей» $O'\xi_3$ по углу ϑ соответствует значение $F(\vartheta) \equiv 1$. Таким образом, для главных значений тензора эффективной теплопроводности композита с конической текстурой с учетом формул (7) и (13) получим

$$\bar{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_2^* = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (\lambda_1^\circ(1+\cos^2\vartheta) + \lambda_3^\circ \sin^2\vartheta)\, F(\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta, \tag{15}$$

$$\bar{\lambda}_3^* = \int\limits_0^{\pi/2} (\lambda_1^\circ \sin^2\vartheta + \lambda_3^\circ \cos^2\vartheta)\, F(\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta. \tag{16}$$

При идеальной конической текстуре микрооси $O'\xi_3$ всех составных частиц будут образующими одной конической поверхности с заданным значением $\gamma \in (0;\, \pi/2]$ полуугла раствора конуса. Тогда из условия (14) следует $F(\vartheta) = 1/\sin\gamma$ и формулы (15) переходят в равенства

$$\bar{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_2^* = \frac{\lambda_1^\circ}{2}(1+\cos^2\gamma) + \frac{\lambda_3^\circ}{2}\sin^2\gamma, \quad \bar{\lambda}_3^* = \lambda_1^\circ \sin^2\gamma + \lambda_3^\circ \cos^2\gamma. \tag{17}$$

Отметим, что первая формула (17) идентична формуле (13), а вторая — формуле (7).

При $\gamma = \pi/2$ текстуру называют кольцевой [9]. В этом случае $\bar{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_2^* = (\lambda_1^\circ + \lambda_3^\circ)/2$ и $\bar{\lambda}_3^* = \lambda_1^\circ$. В случае $\gamma = 0$ имеем частный случай идеальной конической текстуры, называемой аксиальной [9], для которой главные значения тензора эффективной теплопроводности композита совпадают со значениями эффективных коэффициентов теплопроводности составных частиц, т.е. $\bar{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_2^* = \lambda_1^\circ$ и $\bar{\lambda}_3^* = \lambda_3^\circ$.

В отличие от идеальной конической текстуры для реальной текстуры возможно ее некоторое рассеяние, вызванное тем, что не все одноименные «микрооси» частиц (в данном случае оси $O'\xi_3$) строго направлены по образующим одной конической поверхности. При упрощенном описании слабого рассеяния идеальной конической текстуры можно принять, что «микрооси» $O'\xi_3$ составных частиц равномерно заполняют зазор между двумя соосными круговыми коническими поверхностями, образующие которых составляют с осью углы $\gamma+\delta$ и $\gamma-\delta$, причем $\delta \leqslant \gamma$ и $\gamma+\delta \leqslant \pi/2$. Совместим ось этих поверхностей с «макроосью» $O\mathrm{x}_3$, а зазор между ними равномерно заполним «микроосями» $O\xi_3$ составных частиц. Тогда условие (14) примет вид

$$\int\limits_{\gamma-\delta}^{\gamma+\delta} F_\delta(\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = 1,$$

но в пределах интервала интегрирования $F_\delta(\vartheta) = F(\gamma,\, \delta) = \mathrm{const}$. После вычисления интеграла находим $F(\gamma,\, \delta) = 1/(2\sin\gamma\, \sin\delta)$ и вместо формул (15) и (16) получаем соответственно

$$\bar{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_2^* = \frac{\lambda_1^\circ}{2}\Big(1+\cos^2\gamma\cos^2\delta + \frac{1}{3}\sin^2\gamma\sin^2\delta\Big) + \frac{\lambda_3^\circ}{2}\Big(\sin^2\gamma + \sin^2\delta - \frac{4}{3}\sin^2\gamma\sin^2\delta\Big), \tag{18}$$

$$\bar{\lambda}_3^* = \lambda_1^\circ\Big(\sin^2\gamma + \sin^2\delta - \frac{4}{3}\sin^2\gamma\, \sin^2\delta\Big) + \lambda_3^\circ\Big(\cos^2\gamma\, \cos^2\delta + \frac{1}{3}\sin^2\gamma\, \sin^2\delta\Big). \tag{19}$$

4. Результаты расчетов

В качестве примера на рис. 2 и 3 представлены построенные с использованием формул (1), (3) и (15)—(17) графики зависимостей $\widetilde{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_1^*/\lambda$ и $\widetilde{\lambda}_3^* = \bar{\lambda}_3^*/\lambda_m$ от C_V для некоторых конических текстур композита при различных сочетаниях значений $\bar{b}$, $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\lambda}_3$. Ромбы на кривых соответствуют удлиненным эллипсоидам вращения при $\bar{b} = 0,2$, а квадраты — сфероидам при $\bar{b} = 5$. На рис. 2 утолщенные кривые отвечают хаотической ориентации эллипсоидальных включений при значениях $\bar{\lambda}_1 = 8$, $\bar{\lambda}_3 = 2$ (позиция *1*) и $\bar{\lambda}_1 = 2$, $\bar{\lambda}_3 = 8$ (позиция *3*), а на рис. 3 — при значениях $\bar{\lambda}_1 = 0,9$, $\bar{\lambda}_3 = 0,3$ (позиция *1*) и $\bar{\lambda}_1 = 0,2$, $\bar{\lambda}_3 = 0,8$ (позиция *3*).

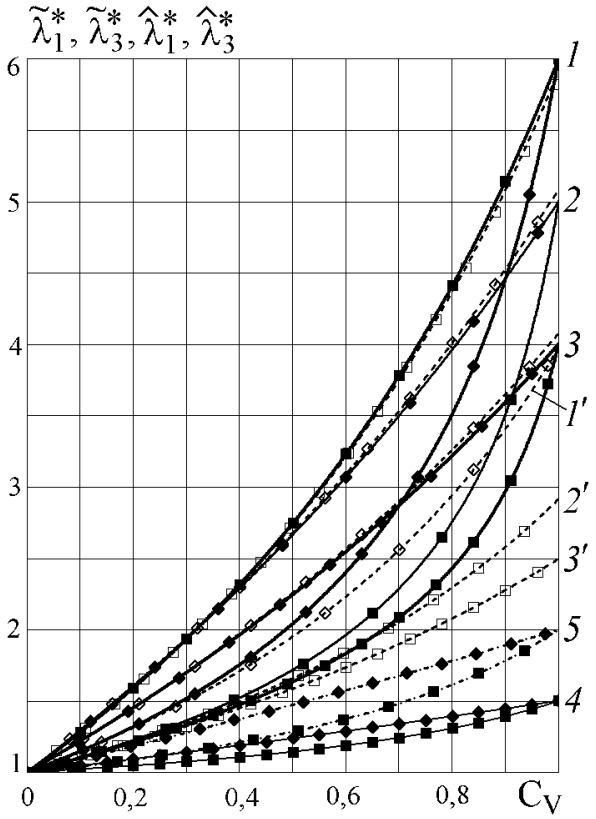

Рис. 2. Графики зависимостей безразмерных эффективных коэффициентов теплопроводности композита от объемной концентрации включений при различных сочетаниях значений $\bar{\lambda}_1 > 1$ и $\bar{\lambda}_3 > 1$

Штриховые линии со светлыми ромбами и квадратами построены на рис. 2 и 3 при указанных сочетаниях значений $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\lambda}_3$ по формулам [11]

$$\widehat{\lambda}_1^* = \widehat{\lambda}_2^* = \frac{2 + \big(\beta_1(1 - D_1^\circ)(1 + \Theta) + \beta_3(1 - D_3^\circ)(1 - \Theta)\big)C_V}{2 - \big(\beta_1 D_1^\circ(1 + \Theta) + \beta_3 D_3^\circ(1 - \Theta)\big)C_V}, \tag{20}$$

$$\widehat{\lambda}_3^* = \frac{1 + \big(\beta_1(1 - D_1^\circ)(1 - \Theta) + \beta_3(1 - D_3^\circ)\Theta)\big)C_V}{1 - \big(\beta_1 D_1^\circ(1 - \Theta) + \beta_3 D_3^\circ)\Theta)\big)C_V}, \tag{21}$$

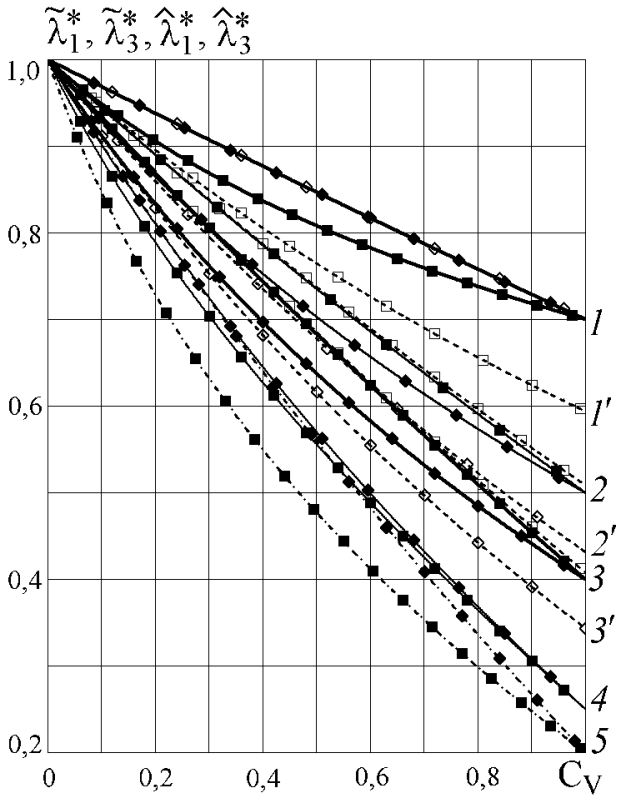

Рис. 3. Графики зависимостей безразмерных эффективных коэффициентов теплопроводности композита от объемной концентрации включений при различных сочетаниях значений $\bar{\lambda}_1 < 1$ и $\bar{\lambda}_3 < 1$

где

$$\beta_1 = \frac{\widetilde{\lambda}_1 - 1}{1 + (\widetilde{\lambda}_1 - 1)D_1^\circ}, \quad \beta_3 = \frac{\widetilde{\lambda}_3 - 1}{1 + (\widetilde{\lambda}_3 - 1)D_3^\circ}, \quad \Theta = \frac{\int\limits_0^\pi F(\vartheta)\cos^2\vartheta\,\sin\vartheta\,d\vartheta}{\int\limits_0^\pi F(\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta},$$

причем в случае хаотической ориентации включений $\Theta = 1/3$. Эти формулы получены с использованием сингулярного приближения теории случайных функций [8] и результаты расчета по ним при $\Theta = 1/3$ практически совпадают с результатами вычислений по формулам (15) и (16) для сфероидов при $\bar{\lambda}_1 > \bar{\lambda}_3 > 1$ (позиция *1* на рис. 2) и $\bar{\lambda}_1 < \bar{\lambda}_3 < 1$ (позиция *3* на рис. 3), а также для удлиненных эллипсоидов вращения при $\bar{\lambda}_3 > \bar{\lambda}_1 > 1$ (позиция *3* на рис. 2) и $\bar{\lambda}_3 < \bar{\lambda}_1 < 1$ (позиция *1* на рис. 3). Но для сфероидов при $\bar{\lambda}_3 > \bar{\lambda}_1 > 1$ (позиция *3′* на рис. 2) и $\bar{\lambda}_3 < \bar{\lambda}_1 < 1$ (позиция *1′* на рис. 3), а также для удлиненных эллипсоидов вращения при $\bar{\lambda}_1 > \bar{\lambda}_3 > 1$ (позиция *1′* на рис. 2) и $\bar{\lambda}_1 < \bar{\lambda}_3 < 1$ (позиция *3′* на рис. 3) отличие в результатах значительно. Корректность формул (20) и (21) вызывает сомнение вследствие несовпадения результатов расчета по ним при $C_V = 1$ со значением $(2\lambda_1 + \lambda_3)/3$ для эффективного коэффициента теплопроводности материала, состоящего из хаотически ориентированных анизотропных фрагментов любой формы [8, 9].

Кольцевой текстуре ($\gamma = \pi/2$) отвечают построенные по первой формуле (17) сплошные кривые для зависимости $\widetilde{\lambda}_1^*$ от C_V при $\bar{\lambda}_1 = 2$, $\bar{\lambda}_3 = 8$ (позиция *2* на рис. 2) и при $\bar{\lambda}_1 = 0,8$, $\bar{\lambda}_3 = 0,2$ (позиция *2* на рис. 3). Близкие результаты при $\Theta = 0$ дает формула (20) в первом случае для удлиненных эллипсоидов вращения, а во втором — для сфероидов. Однако для сфероидов в первом случае и удлиненных эллипсоидов вращения во втором (позиции $2'$ на рис. 2 и 3) расчеты по формуле (20) приводят к заниженным результатам.

Для идеальной конической текстуры при $\gamma = \pi/4$, $\bar{\lambda}_1 = 1$ и $\bar{\lambda}_3 = 3$ на рис. 2 тонкие линии (позиция *4*) соответствуют зависимостям $\widetilde{\lambda}_1^*$ от C_V, а штрихпунктирные (позиция *5*) — зависимостям $\widetilde{\lambda}_3^*$ от C_V. На рис. 3 (позиции *4* и *5*) представлены аналогичные графики при $\gamma = \pi/4$, $\bar{\lambda}_1 = 0,3$ и $\bar{\lambda}_3 = 0,1$.

Как и выше, ромбы на кривых на рис. 4 и 5 соответствуют удлиненным эллипсоидам вращения при $\bar{b} = 0,2$, а квадраты — сфероидам при $\bar{b} = 5$. На рис. 4 сплошные и штрихпунктирные линии построены по формулам (18) и (19) и отвечают зависимостям соответственно $\widetilde{\lambda}_1^*$ и $\widetilde{\lambda}_3^*$ от угла δ (в градусах) рассеяния конической текстуры ($\gamma = \pi/4$) при $C_V = 0,8$ (позиции *1—4*) и $C_V = 0,5$ (позиции *5—8*). При этом позициям *1, 2* и *5, 6* соответствуют значения $\bar{\lambda}_1 = 8$ и $\bar{\lambda}_3 = 2$, а остальным позициям — значения $\bar{\lambda}_1 = 2$ и $\bar{\lambda}_3 = 8$. Графики аналогичных зависимостей представлены на рис. 5, причем позициям *1, 2* и *5, 6* отвечают значения $\bar{\lambda}_1 = 0,5$ и $\bar{\lambda}_3 = 0,1$, а остальным позициям — значения $\bar{\lambda}_1 = 0,1$ и $\bar{\lambda}_3 = 0,5$.

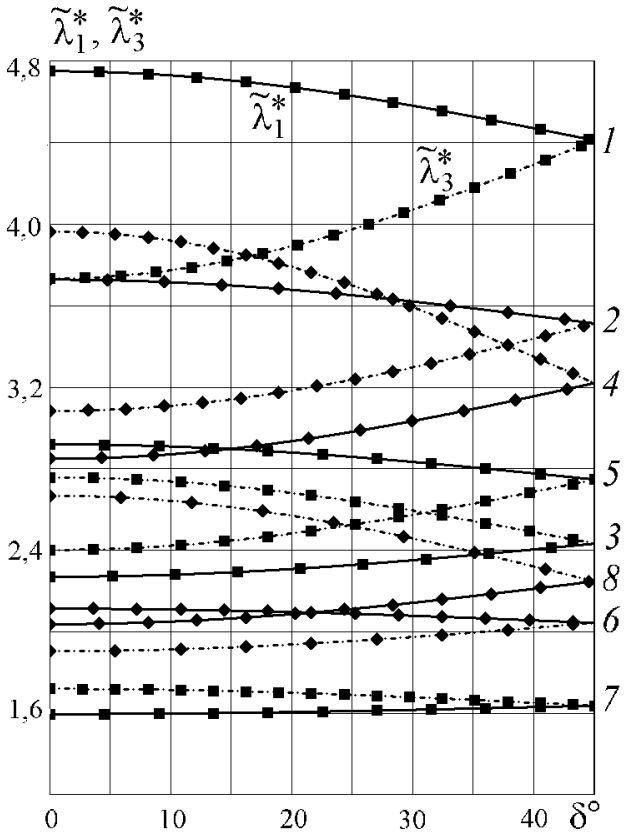

Рис. 4. Графики зависимостей $\widetilde{\lambda}_1^*$ (сплошные линии) и $\widetilde{\lambda}_3^*$ (штрихпунктирные линии) от угла δ (в градусах) при различных сочетаниях значений C_V, $\bar{\lambda}_1 > 1$ и $\bar{\lambda}_3 > 1$

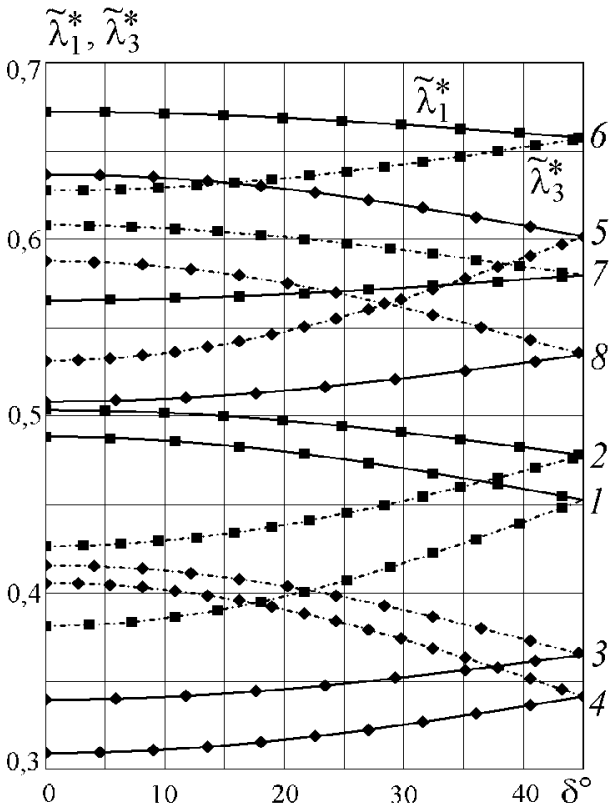

Рис. 5. Графики зависимостей $\widetilde{\lambda}_1^*$ (сплошные линии) и $\widetilde{\lambda}_3^*$ (штрихпунктирные линии) от угла δ (в градусах) при различных сочетаниях значений C_V, $\bar{\lambda}_1 > 1$ и $\bar{\lambda}_3 > 1$

Отметим, что при $\delta = \pi/4 = 45°$ данная коническая текстура с рассеянием эквивалентна хаотической ориентации эллипсоидальных составных частиц, причем $\widetilde{\lambda}_1^* = \widetilde{\lambda}_3^* = \widetilde{\lambda}^*(C_V)$ для каждого значения C_V и каждого сочетания значений $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\lambda}_3$. Непосредственная проверка показывает, что $\widetilde{\lambda}^*(C_V) = 2\widetilde{\lambda}_1(C_V)/3 + \widetilde{\lambda}_3(C_V)/3$ для фиксированного значения C_V, что является косвенным подтверждением корректности использованной выше процедуры учета рассеяния конической текстуры.

Заключение

На основе построенной в работе [2] математической модели переноса тепловой энергии в композите с анизотропными включениями эллипсоидальной формы разработана модель текстурированного композита с включениями в виде эллипсоидов вращения, главные оси тензора теплопроводности которых совпадают с осями симметрии таких включений. Эта модель в сочетании с известной процедурой осреднения характеристик текстурированной среды использована для оценки эффективных коэффициентов теплопроводности рассматриваемого композита. Приведены расчетные зависимости для этих коэффициентов в случае различных вариантов конической текстуры композита с учетом возможного рассеяния такой текстуры. Представленные результаты могут быть использованы для прогноза эффектив-

ных коэффициентов теплопроводности текстурированных композитов, модифицированных эллипсоидальными включениями (в том числе наноструктурными элементами).

Работа выполнена по гранту НШ–255.2012.8 программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ.

Список литературы

1. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление. М.: Высшая школа, 2001. 575 с.
2. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с анизотропными эллипсоидальными включениями // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 4. DOI: 10.7463/0413.0541050.
3. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций: пер. с англ. М.: Изд-во иностр. литературы, 1963. 248 с.
4. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с эллипсоидальными включениями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. № 3. С. 76–85.
5. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел: пер. с англ. М.: Наука, 1964. 488 с.
6. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: пер. с англ. М.: Наука, 1968. 720 с.
8. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
9. Адамеску Р.А., Гельд П.В., Митюшов Е.А. Анизотропия физических свойств металлов. М.: Металлургия, 1985. 136 с.
10. Теория вероятностей / А.В. Печинкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова и др.; Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 456 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVI).
11. Nan C.-W., Birringer R., Clarke D.R., Gleiter H. Effective thermal conductivity of particulate composites with interfasial thermal resistance // Journal of Applied Physics. 1997. Vol. 81, no. 10. P. 6692–6699.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

Thermal conductivity of the textured composite with anisotropic inclusions in the form of ellipsoids of rotation

06, June 2013

DOI: 10.7463/0613.0569312

Zarubin V. S., Kuvyrkin G. N.

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russian Federation
fn2@bmstu.ru

On the basis of a developed mathematical model of heat transfer in composite with anisotropic inclusions of ellipsoidal shape, a procedure for calculating components of an effective heat-conduction tensor of the textured composite was proposed. A variant of inclusions in the form of ellipsoids of rotation was considered. The main axes of the heat-conduction tensor of such inclusions coincide with symmetric axes of an ellipsoid. In case of conic texture of a composite its possible dispersion was taken into account. The obtained results could be used for estimating effective thermal conductivity of composites modified with nanostructured elements (including carbon nanotubes). Due to electrothermal analogy these results are applicable when consideringcharacteristics of electrical conductivity and dielectric capacitance of textured composites.

References

1. Dimitrienko Iu.I. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor calculus]. Moscow, Vysshaia shkola, 2001. 575 p.
2. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Effektivnye koeffitsienty teploprovodnosti kompozita s anizotropnymi ellipsoidal'nymi vkliucheniiami [Effective thermal conductivity coefficients of composite with anisotropic ellipsoidal inclusions]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2013, no. 4. DOI: 10.7463/0413.0541050.
3. Eshelby J.D. *The continuum theory of lattice defects*. In: Seitz F., Turnbull D., eds. Progress in Solid State Physics. Vol. 3. New York, Academic Press, 1956, pp. 79–144. (Russ. ed.: Eshelbi Dzh. *Kontinual'naia teoriia dislokatsii*. Moscow, Izd-vo inostrannoi literatury, 1963. 248 p.).

4. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Effektivnye koeffitsienty teploprovodnosti kompozita s ellipsoidal'nymi vkliucheniiami [Effective coefficients of thermal conductivity of a composite with ellipsoidal inclusions]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Bulletin of the Bauman MSTU. Ser. Natural Sciences], 2012, no. 3, pp. 76–85.
5. Carslaw H.S., Jaeger J.C. *Conduction of Heat in Solids*. 2nd ed. Oxford University Press, 1959. (Russ. ed.: Karslou G., Eger D. *Teploprovodnost' tverdykh tel*. Moscow, Nauka, 1964. 488 p.).
6. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoi sredy* [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2008. 512 p.
7. Korn G., Korn T. *Mathematical Handbook for scientists and engineers. Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New-York, Toronto, London, 1961. 943 p. (Russ. ed.: Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov*. Moscow, Nauka, 1968. 720 p.).
8. Shermergor T.D. *Teoriia uprugosti mikroneodnorodnykh sred* [Theory of elasticity of microinhomogeneous media]. Moscow, Nauka, 1977. 400 p.
9. Adamesku R.A., Gel'd P.V., Mitiushov E.A. *Anizotropiia fizicheskikh svoistv metallov* [Anisotropy of physical properties of metals]. Moscow, Metallurgiia, 1985. 136 p.
10. Pechinkin A.V., Teskin O.I., Tsvetkova G.M. *Teoriia veroiatnostei* [Probability theory]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2004. 456 p. (Ser. *Matematika v tekhnicheskom universitete* [Mathematics in Technical University], vol. 16).
11. Nan C.-W., Birringer R., Clarke D.R., Gleiter H. Effective thermal conductivity of particulate composites with interfasial thermal resistance. Journal of Applied Physics, 1997, vol. 81, no. 10, pp. 6692–6699.