

УДК 519.642

Моделирование течения в пограничном слое вблизи плоской пластины методом вихревых элементов

Макарова М.Е., студент

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Прикладная математика»*

*Научный руководитель: Марчевский И. К., к.ф.-м.н.,
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
fn2@bmstu.ru*

1. Постановка задачи Блазиуса

Рассмотрим модельную задачу об обтекании несжимаемой вязкой средой неподвижной тонкой пластинки, расположенной параллельно установившемуся набегающему потоку. Пусть l – длина пластинки, ν – коэффициент кинематической вязкости среды, δ – характерная толщина пограничного слоя. Систему координат введем следующим образом: направим ось Ox вдоль пластинки, ось Oy – перпендикулярно к ней, начало координат поместим в переднюю кромку (рис. 1). Скорость установившегося течения будем обозначать $\vec{v}(x, y) = \{v_x; v_y\}$, а $v(x, y)$ – модуль скорости в точке.

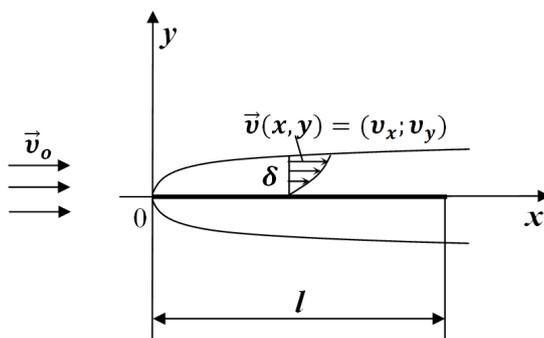


Рис. 1. Пограничный слой на обтекаемой пластинке

Исключив малые слагаемые из уравнения Навье – Стокса, описывающего течение среды (в пограничном слое отношение δ/l принимается в качестве основной малой величины) и приняв, что в рассматриваемой задаче давление в пограничном слое постоянно, получим, что при обтекании пластинки плоскопараллельным потоком уравнения движения в пограничном слое имеют вид [1]:

$$\begin{cases} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Аналитическое решение задачи (1.1) можно найти лишь для обтекания бесконечной пластинки ($y = 0, x \geq 0$), тогда граничные условия в приближенной постановке, предложенной Блазиусом, примут вид [1, 2]:

$$v_x = v_y = 0, \quad \text{при } y = 0, x \geq 0, \quad (1.2)$$

$$v_x \rightarrow v_0, \quad \text{при } y \rightarrow \infty.$$

Решение данной задачи будет непригодно вблизи передней и задней кромок конечной пластинки [2].

Для перехода к автомодельным переменным необходимо ввести функцию тока ψ :

$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ и записать задачу (1.1) с условиями (1.2) в терминах функции ψ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \psi = 0, \quad \text{при } y = 0, x \geq 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow v_0, \quad \text{при } y \rightarrow \infty.$$

Задача (1.3) обладает групповым свойством, допускающим «растяжение» независимых и зависимой переменных. Это позволяет свести ее к обыкновенному дифференциальному уравнению [1, 2]:

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + \frac{f}{2} \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0, \quad (1.4)$$

$$f|_{\eta=0} = \left. \frac{df}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \left. \frac{df}{d\eta} \right|_{\eta=\infty} = 1,$$

где $\eta = y \sqrt{\frac{\text{Re}}{xl}}, f(\eta) = \frac{\psi}{v_0} \sqrt{\frac{\text{Re}}{xl}}$ – замена Блазиуса, $\text{Re} = \frac{v_0 l}{\nu}$ – число Рейнольдса,

Краевую задачу (1.4) можно свести к задаче Коши. Пусть $F(\eta)$ – некоторое решение уравнения (1.4), тогда непосредственной проверкой легко убедиться, что

функция $f_0(\eta) = \alpha^{1/3} F(\alpha^{1/3} \eta)$ также является решением уравнения (1.4) при любом постоянном α [1].

Определим функцию $F(\xi)$, где $\xi = \alpha^{1/3} \eta$, как решение следующей задачи Коши:

$$\frac{d^3 F}{d\xi^3} + \frac{F}{2} \frac{d^2 F}{d\xi^2} = 0, \quad (1.5)$$

$$F|_{\xi=0} = \frac{dF}{d\xi}|_{\xi=0} = 0, \quad \frac{d^2 F}{d\xi^2}|_{\xi=0} = 1.$$

Функцию F можно рассчитать численными методами для любых $\xi > 0$. По данным расчета возможно приближенно вычислить предел $\lim_{\xi \rightarrow \infty} F'(\xi) = k \neq 1$. Из предыдущих равенств следуют соотношения $f_0'(\eta) = \alpha^{2/3} F'(\xi)$, $f_0''(\eta) = \alpha F''(\xi)$, тогда $\lim_{\eta \rightarrow \infty} f_0'(\eta) = \alpha^{2/3} \lim_{\xi \rightarrow \infty} F'(\xi) = \alpha^{2/3} k = 1$ [1]. Таким образом, значение α находится численно после определения либо $\lim_{\xi \rightarrow \infty} F'(\xi) = k$, либо $f_0''(0) = \alpha$, используя решение краевой задачи (1.4).

В данной работе определялась величина $f_0''(0)$. С помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica было получено значение $\alpha \approx 0,332057$, что хорошо согласуется с результатами, опубликованными в [1].

2. Численное моделирование течения методом вихревых элементов

Численное решение задачи осуществляется с помощью метода вихревых элементов. Достаточно тонкая плоская пластинка помещается в поток, который имеет скорость U_0 . По истечении некоторого времени течение в области устанавливается и определяется распределение скоростей в сечениях пограничного слоя на пластинке.

Скорость среды находится как суперпозиция полей скоростей отдельных вихревых элементов (ВЭ) и набегающего потока. ВЭ генерируются на поверхности обтекаемой пластины на каждом шаге расчета; их интенсивности таковы, что обеспечивается выполнение граничного условия на профиле [3]. Таким образом, от правильности определения интенсивностей ВЭ зависит точность решения задачи в целом.

Для простоты выкладок будем считать течение трехмерным с одинаковыми характеристиками во всех плоскостях $z = const$. Тогда $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)^T$, интенсивность вихревого слоя, моделирующего профиль, в любой точке границы профиля ∂C с радиус-

вектором $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, 0)^T$ также будем считать векторной величиной $\vec{\gamma}(\vec{r}_0) = (0, 0, \gamma(\vec{r}_0))^T$. При этом скорость среды в точке с радиус-вектором $\vec{r} = (x, y, 0)^T$ вычисляется по формуле [3, 4]

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_\infty + \vec{v}_{wake}(\vec{r}) + \oint_{\partial C} \frac{\vec{\gamma}(\vec{r}_0) \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{2\pi \cdot |\vec{r} - \vec{r}_0|^2} dl_{r_0}, \quad \vec{r} \in R^2 \setminus \partial C.$$

Здесь $\vec{v}_{wake}(\vec{r})$ – скорость среды, индуцируемая вихревым следом – ВЭ с известными расположениями и интенсивностями, сгенерированными на предыдущих шагах расчета.

Предельное значение скорости потока $\vec{v}_-(\vec{r})$ на границе ∂C со стороны профиля [3]

$$\vec{v}_-(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}) - \left(\frac{\vec{\gamma}(\vec{r})}{2} \times \vec{n}(\vec{r}) \right), \quad \vec{r} \in \partial C, \quad (2.1)$$

где $\vec{n}(\vec{r})$ – единичная внешняя нормаль к профилю.

Для нахождения неизвестной плотности интенсивности вихревого слоя $\gamma(\vec{r})$ в МВЭ используется условие равенства нулю вектора скорости $\vec{v}_-(\vec{r})$ на границе профиля, которое обеспечивается равенством нулю либо нормальной («классический» метод), либо касательной компоненты вектора $\vec{v}_-(\vec{r})$ («модифицированный» метод) [3-6]; с математической точки зрения эти подходы эквивалентны.

В «модифицированном» МВЭ решение задачи сводится к вычислению интенсивности вихревого слоя на профиле $\gamma(\vec{r}_0)$, который затем заменяется набором вихревых элементов. Интегральное уравнение для $\gamma(\vec{r}_0)$ получается из условия равенства нулю касательной компоненты предельного значения скорости (2.1) на профиле:

$$\oint_{\partial C} \frac{[\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)] \cdot \vec{\tau}(\vec{r})}{2\pi \cdot |\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \cdot \gamma(\vec{r}_0) dl_{r_0} - \frac{\gamma(\vec{r})}{2} = -\vec{\tau}(\vec{r}) \cdot (\vec{v}_\infty + \vec{v}_{wake}), \quad \vec{r} \in \partial C. \quad (2.2)$$

При этом орт касательной $\vec{\tau}(\vec{r})$ к профилю выбирают таким образом, что $\vec{n}(\vec{r}) \times \vec{\tau}(\vec{r}) = \vec{k}$ и $|\vec{\tau}(\vec{r})| = 1$, где \vec{k} – орт оси Oz .

Уравнение (2.2) – интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода [3, 5], его ядро ограничено величиной $\kappa/4\pi$, где κ – кривизна границы профиля в соответствующей точке. Отметим, что «классический» МВЭ [3, 4] приводит к необходимости решения сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта. В ограниченности ядра интегрального уравнения (2.2) и состоит основное преимущество «модифицированного»

подхода над «классическим». В связи с этим при численном решении уравнения (2.2) не накладывается жестких ограничений на вид расчетной схемы, она может быть достаточно произвольной [3-7].

В расчете границу профиля разбивают на панели (граница профиля аппроксимируется ломаной, под панелями подразумеваются участки этой ломаной – отрезки); интенсивности вихревого слоя принимается постоянной на каждой панели и равной среднему значению $\tilde{\gamma}_i$ плотности интенсивности вихревого слоя на этой панели. Тогда интегральное уравнение (2.2) может быть приближенно заменено системой из N линейных алгебраических уравнений, переход к которым подробно рассматривается в работе [7]

$$\sum_{j=1}^N \frac{\tilde{\gamma}_j \vec{\tau}_j}{L_j} \int_{K_j} dl_r^j \int_{K_i} \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{2\pi \cdot |\vec{r} - \vec{r}_0|^2} dl_r^i - \frac{\tilde{\gamma}_i}{2} = -\vec{\tau}_i \cdot \left(\vec{v}_\infty + \frac{1}{L_i} \int_{K_i} \vec{v}_{wake}(\vec{r}_0) dl_{r_0}^i \right), \vec{r} \in \partial C, i = \overline{1, N}. \quad (2.3)$$

где $dl_{r_0}^i$, $dl_{r_0}^j$ – дифференциалы длин панелей с номерами i и j соответственно, по которым производится интегрирование.

В уравнении (2.3) все интегралы вычисляются по аналитическим формулам, описанным в работе [7]. Отметим, что в отличие от «классического» МВЭ выполнение граничного условия обеспечивается не в отдельных контрольных точках, а в среднем на каждой панели [5-7]. В связи с указанными особенностями расчетных схем использование модифицированного метода представляется перспективным.

3. Результаты расчета обтекания

Численное моделирование обтекания профиля (передняя и задняя кромки пластины имеют вид полуокружностей, толщина составляет 2 % от длины $l = 1$) осуществлялось с помощью программного комплекса Polara [8]. Задача решалась в нестационарной постановке, вязкость среды соответствовала значению $Re = 10^3$. Скорость набегающего потока за первые 15 шагов расчета увеличивалась постепенно до значения $v_0 = (3, 0, 0)$, затем оставалась постоянной (рис. 2).

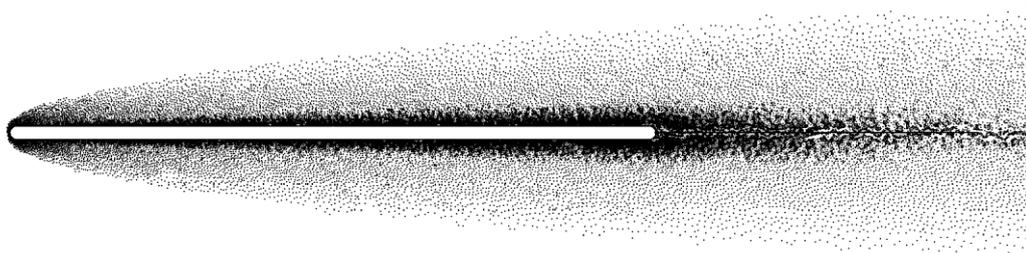


Рис. 2. Вид вихревого следа вблизи тонкой пластинки

После этого в сечениях пластинки $x = 0,35$, $x = 0,50$, $x = 0,65$ измерялись величины скоростей. Для получения значения безразмерной скорости при численном расчете вместо значения U_0 необходимо брать величину $\max_{0 < y < \infty} U = U_\delta(x) > U_0$ в соответствующем сечении $x = const$, $0 < x < l$, поскольку скорость в потоке изменяется немонотонно из-за вытесняющего действия пластинки [4].

Аналитическое решение найдено с помощью системы вычислений Wolfram Mathematica. После решения задачи Коши (1.5) и осуществления обратных преобразований, были получены в безразмерных координатах графики распределения продольной и вертикальной скоростей вдоль пластинки (рис. 3, 4).

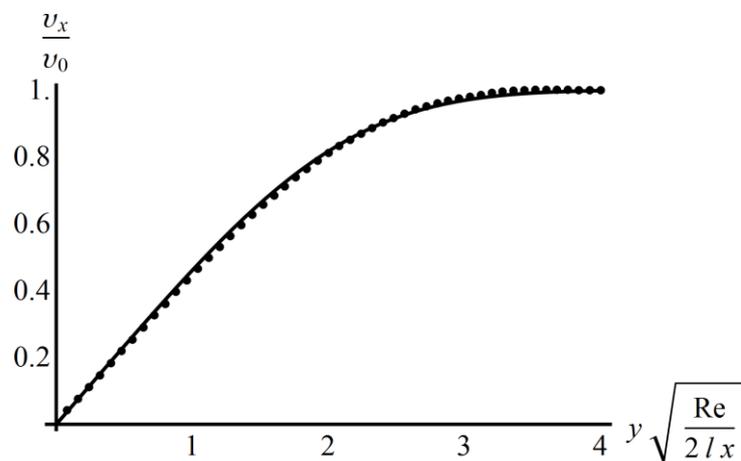


Рис. 3. График распределения продольной компоненты скорости в сечении $x = 0,35$ пограничного слоя на пластинке

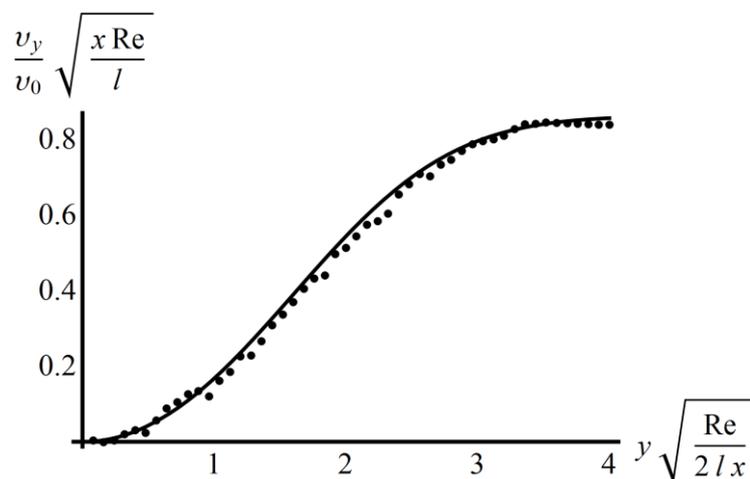


Рис. 4. График распределения вертикальной компоненты скорости в сечении $x = 0,35$ пограничного слоя на пластинке

Из рис. 3, 4 можно увидеть, что результаты моделирования (точки) хорошо согласуются с аналитическим решением (сплошная линия). В остальных сечениях получаются аналогичные результаты. Таким образом, «модифицированный» МВЭ с касательными компонентами скорости позволил моделировать поле скоростей в пограничном слое пластинки с высокой точностью.

Список литературы

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. СПб.: Лань, 2004. 560 с.
2. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. М.: ГИФМЛ, 1962. 480 с.
3. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: Янус, 1995. 520 с.
4. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: Изд-во МГУ, 2006. 184 с.
5. Kempka S.N., Glass M.W., Peery J.S., Strickland J.H. Accuracy Considerations for Implementing Velocity Boundary Conditions in Vorticity Formulations // SANDIA REPORT SAND96-0583 UC-700, March, 1996. 50 p.
6. Макарова М.Е. Расчет стационарного безотрывного обтекания профиля потоком идеальной несжимаемой среды // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. Спец. выпуск Прикладная математика. С. 124-133.
7. Морева В.С. Вычисление вихревого влияния в модифицированной схеме метода вихревых элементов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2012. Спец. выпуск № 2 Математическое моделирование в технике. С. 137-144.

8. Марчевский И.К., Морева В.С. Численное моделирование в задачах аэрогидродинамики с использованием метода вихревых элементов// CAD/CAM/CAE Observer, 2012. № 2. С. 84-91.