

УДК 532.529

**Оптимизация параметров быстрого метода расчета вихревого влияния
при моделировании эволюции вихревых структур**

К.С. Кузьмина

*Студент, кафедра «Прикладная математика»
МГТУ имени Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия*

*Научный руководитель: Марчевский И.К., к.ф.-м.н., доцент кафедры
«Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия*

Метод вихревых элементов

Метод вихревых элементов – это бессеточный лагранжев метод численного моделирования течений. Распределение завихренности моделируется набором вихревых элементов (ВЭ) – изолированных вихревых нитей, перпендикулярных плоскости течения, для каждого из которых задаётся положение в пространстве и интенсивность. Скорость среды в любой точке течения вычисляется по закону Био – Савара, который для плоскопараллельного течения при отсутствии обтекаемых профилей, будет выглядеть следующим образом:

$$\vec{V}(\vec{R}) = \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{\Gamma} \times \vec{K}(\vec{R}, \vec{r}) + \vec{V}_{\infty}, \quad (1)$$

$$\vec{K}(\vec{R}, \vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \frac{(\vec{R} - \vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|^2},$$

где $d\vec{\Gamma}$ – дифференциал завихренности в области течения, $\vec{R}$ и $\vec{r}$ – радиус-векторы точки наблюдения и вихревого элемента соответственно, $\vec{V}_{\infty}$ – скорость набегающего потока.

Интеграл в формуле (1) может быть заменен суммой интегралов по вихревым элементам:

$$\vec{V}(\vec{r}_i) = \sum_{j=1}^n \vec{v}_{ij} + \vec{V}_{\infty},$$

где

$$\vec{v}_{ij} = \vec{\Gamma}_j \times \vec{K}(\vec{r}_i, \vec{r}_j).$$

Именно процедура определения скоростей ВЭ является наиболее затратной с вычислительной точки зрения, особенно при увеличении n – числа ВЭ, поскольку для этого приходится учитывать взаимное влияние всех пар ВЭ. Таким образом, число операций, требуемое для вычисления скоростей всех элементов пропорционально квадрату их количества n^2 , что является фактором, значительно ограничивающим увеличение числа n . В связи с этим разработан ряд алгоритмов, позволяющих уменьшить степень роста количества итераций. Одним из них является так называемый быстрый метод, аналогичный быстрому методу решения гравитационной задачи n тел. Его использование позволяет существенно уменьшить вычислительную сложность задачи и дает возможность увеличить число ВЭ и тем самым повысить точность результатов.

Быстрый метод

В основе метода лежит распределение элементов по областям, образующим иерархическую структуру (дерево). Суть метода заключается в том, что при вычислении скоростей влияния дальних ВЭ в скорость данного элемента вместо суммирования по каждому из них приближенно рассчитывается их коллективное воздействие. Для расчета влияния дальней области S на скорости точек в области S_0 вычисляются интегралы положительной и отрицательной завихренности $\vec{\Gamma}_+, \vec{\Gamma}_-$ в области S и их центры завихренности $\vec{r}_+$ и $\vec{r}_-$:

$$\Gamma_{\pm} = \int_S \Omega_{\pm} ds = \sum_{k\pm} \Gamma_{k\pm},$$

$$\vec{r}_{\pm} = \frac{1}{\Gamma_{\pm}} \int_S \vec{r} \Omega_{\pm} ds = \frac{1}{\Gamma_{\pm}} \sum_{k\pm} \vec{r}_{k\pm} \Gamma_{k\pm},$$

где $\vec{r}_{k+}, \vec{r}_{k-}, \Gamma_{k+}, \Gamma_{k-}$ – радиус-векторы и интенсивности ВЭ с положительной и отрицательной завихренностью области S .

Вклад $\vec{V}_i(s)$ ВЭ области S в вектор скорости i -й точки области S_0 выражается формулами:

$$\vec{V}_i(s) \approx \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\Delta x_i = x_i - x_c, \quad \Delta y_i = y_i - y_c,$$

$$a = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Gamma_+ y'_+}{r'^2_+} + \frac{\Gamma_- y'_-}{r'^2_-} \right), \quad b = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Gamma_+ x'_+}{r'^2_+} + \frac{\Gamma_- x'_-}{r'^2_-} \right),$$

$$c = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\Gamma_+ x'_+ y'_+}{r'^4_+} + \frac{\Gamma_- x'_- y'_-}{r'^4_-} \right), \quad d = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Gamma_+ (y'^2_+ - x'^2_+)}{r'^4_+} + \frac{\Gamma_- (y'^2_- - x'^2_-)}{r'^4_-} \right).$$

Здесь x_c, y_c – координаты некоторой выделенной точки $\vec{R}_c$ области S_0 , $x'_\pm, y'_\pm$ – координаты векторов $\vec{r}'_\pm = \vec{R}_\pm - \vec{r}_\pm$.

Формула (2) позволяет вычислять вклад в скорости всех ВЭ области S_0 от ВЭ области S , если размеры областей достаточно малы по сравнению с расстоянием между ними. При этом не требуется перебор всех элементов области S , достаточно лишь вычислить четыре величины a, b, c, d , которые будут одинаковыми для всех ВЭ области S_0 .

Алгоритм вычисления скоростей ВЭ быстрым методом состоит из трех последовательных этапов:

- 1) построение дерева;
- 2) вычисление суммарных циркуляций и центров завихренности положительных и отрицательных вихревых элементов в каждой области;
- 3) вычисление скоростей вихревых элементов.

Построение дерева

Для построения дерева строится структура прямоугольных областей (рис. 1). Прямоугольник высшего (нулевого) уровня содержит все вихревые элементы. Он делится по длинной стороне на два одинаковых прямоугольника первого уровня. Путем перебора вихревых элементов определяется их принадлежность к одному из них. Затем размеры каждого прямоугольника уменьшаются до таких минимально возможных, чтобы «усеченный» прямоугольник содержал в себе все ВЭ, входившие в него до усечения. Далее два этих прямоугольника делятся аналогичным образом, образуя области второго уровня и так далее.

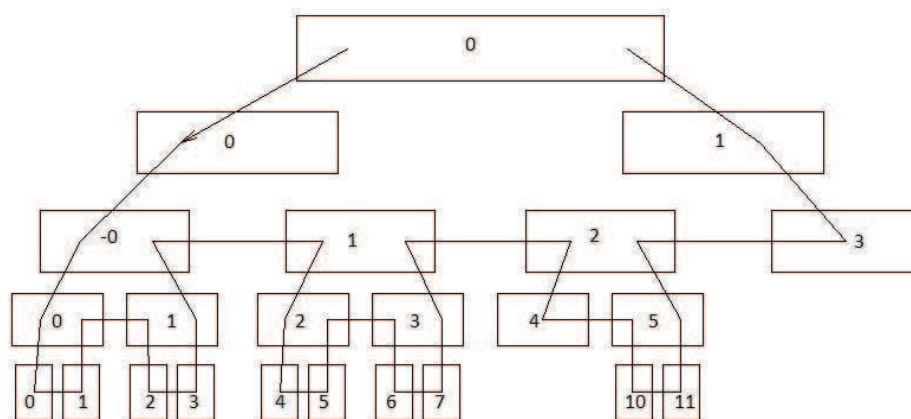


Рис. 1. Структура дерева и схема обхода

Деление прекращается при выполнении заданного критерия по размеру прямоугольника, количеству вихревых элементов в нем и (или) номеру уровня. Области, на которых процесс деления завершился, называются нижними прямоугольниками. Они запоминаются в отдельном списке, в памяти также хранятся параметры всех прямоугольников (координаты центров, ширина и высота), для нижних прямоугольников хранятся списки вошедших в них точек. Пример того, как может выглядеть распределение прямоугольников, представлен на рис. 2.

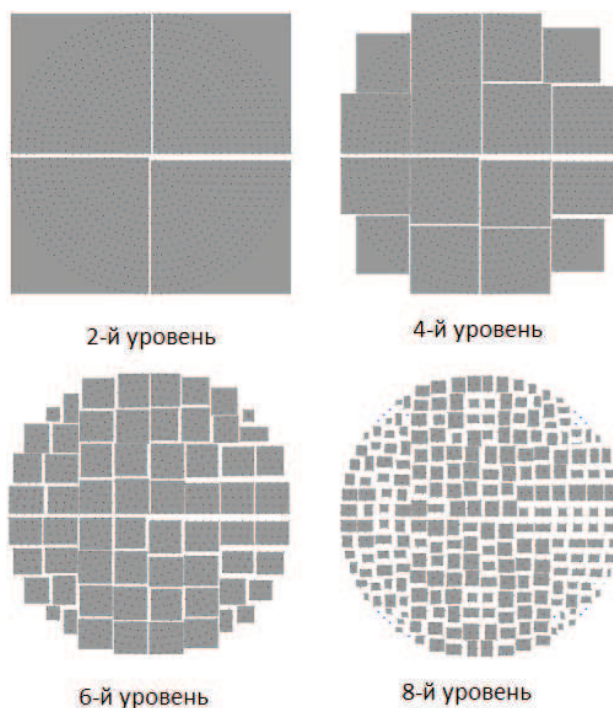


Рис. 2. Прямоугольники соответствующих уровней дерева

Вычисление скоростей вихревых элементов

При вычислении скоростей вихревых элементов последовательно рассматриваются нижние прямоугольники. Для каждого из них проводится обход дерева с целью выявления областей, достаточно удаленных по сравнению с величиной h , равной сумме диагоналей обоих прямоугольников (или сумме их размеров по высоте и ширине). Если заданный критерий не выполняется, то осуществляется переход вниз по дереву. Если же критерий выполняется, то вычисляются коэффициенты a , b , c и d . Эти коэффициенты при дальнейшем обходе суммируются с аналогичными коэффициентами от других прямоугольников, удовлетворяющих заданному критерию. Схема обхода дерева представлена на рис. 1. Если при обходе достигнут нижний прямоугольник, но заданный критерий не выполняется, он запоминается. Таким образом, после обхода дерева оказываются вычисленными величины A , B , C и D , представляющие собой суммы a , b , c и d для областей, удовлетворяющих заданному критерию, а также имеется список прямоугольников, вклад от которых вычисляется непосредственно путем перебора вихревых элементов с использованием закона Био – Савара.

После этого скорости всех вихревых элементов рассматриваемого нижнего прямоугольника вычисляются по формуле:

$$\vec{V}_i \approx \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & D \\ D & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{pmatrix} + \sum_j \vec{v}_{ij} + \vec{V}_\infty,$$

где суммирование по j осуществляется по вихревым элементам, принадлежащим рассматриваемому нижнему прямоугольнику и прямоугольникам из списка; $\vec{V}_\infty$ – скорость набегающего потока. Затем процедура повторяется для следующего нижнего прямоугольника. Вычислительная сложность быстрого метода пропорциональна $n \log n$, в то время как вычислительная сложность прямого метода, использующего закон Био – Савара для вычисления влияния каждого вихревого элемента на каждый, пропорциональна n^2 , поэтому быстрый метод тем эффективнее по сравнению с прямым, чем больше n – число вихревых элементов в задаче. Отметим, что для задач с малым числом вихревых элементов (порядка нескольких сотен) использование быстрого метода нецелесообразно, т.к. он оказывается менее эффективным по сравнению с прямым методом.

Оптимизация параметров быстрого метода

При вычислении скоростей ВЭ быстрым методом, количество операций существенно зависит не только от n – количества элементов, но и от таких параметров, как θ – параметра близости ячеек, который определяется требуемой точностью решения, и k – максимального уровня дерева. Естественно, что на практике приходится работать с системами, у которых может быть совершенно разное количество ВЭ, и для них оптимальные θ и k будут разными. Под оптимальными параметрами имеются в виду такие, при которых требуется наименьшее количество операций. Оценим оптимальное значение параметра k для заданного количества элементов.

Рассмотрим модельную задачу, в которой n вихревых элементов равномерно распределены в квадрате со стороной $2a$. Общее число ячеек k -го уровня равно $N = 2^k$, Тогда сторона квадрата k -го уровня без учета того, что при каждом делении ячейка усекается, равна $l_k = \sqrt{\frac{S}{2^k}} = \frac{2a}{\sqrt{2^k}}$. Для того, чтобы учесть влияние усечения ячеек на каждом шаге построения дерева, оценим «зазор» между ячейками дерева: $D \approx \frac{2a}{\sqrt{n}}$. Так как ВЭ, вообще говоря, расположены в области течения неупорядоченно, усечение ячейки происходит не на эту величину, а на меньшую, поэтому введем параметр $0 \leq \alpha \leq 1$, который будет это учитывать, тогда «зазор» между ячейками дерева примем равным $d = \alpha \frac{2a}{\sqrt{n}}$. Для длины стороны ячейки k -го уровня с учетом усечения ячеек можно получить соотношение

$$a_k = \frac{2a}{\sqrt{2^k}} \left(1 - \frac{\alpha(\sqrt{2^k} - 1)}{\sqrt{n}} \right).$$

В результате проведения вычислительных экспериментов было установлено, что наиболее подходящим является $\alpha \approx 0.7$.

Для каждой ячейки есть зона (далее будем называть ее ближней зоной), влияние вихревых элементов из которой вычисляется непосредственно по закону Био – Савара. Расстояния в дальнейшем (для простоты рассуждений) будем измерять в кубической норме. Тогда ближней зоной является квадрат с центром в центре рассматриваемой ячейки и стороной 2Δ , где $\Delta = \frac{2h_0}{\theta}$, $h_0 = 2a_k$. Площадь ближней зоны

$$S_{\text{бл}} = 4 \left(\frac{4}{\theta} \right)^2 \left(\frac{4a^2}{2^k} \right) \left(1 - \frac{\alpha(\sqrt{2}^k - 1)}{\sqrt{n}} \right)^2.$$

Число ячеек k -го уровня, попавших в эту зону

$$N_{\text{бл}} = \frac{4\Delta^2}{l_k^2} = 4 \left(\frac{4}{\theta} \right)^2 \left(1 - \frac{\alpha(\sqrt{2}^k - 1)}{\sqrt{n}} \right)^2.$$

Это соотношение справедливо только для тех ячеек, которые находятся внутри исходного квадрата далеко от его границы, а для близких к границе число ячеек ближней зоны меньше (рис. 3). Такими граничными ячейками являются те, которые отстоят на величину Δ или меньше от границы.

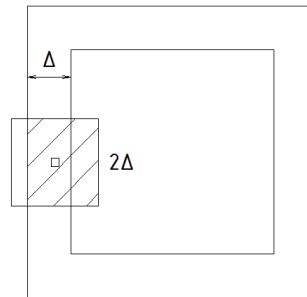


Рис. 3. Ближняя зона для граничных ячеек (заштрихована).

Оценим, какая часть числа $N_{\text{бл}}$ попадает в исходный квадрат в среднем для всех граничных ячеек:

$$\int_0^1 \frac{2 \times (2 - x)}{4} dx = \frac{3}{4}.$$

Количество граничных ячеек: $N_{\text{гр}} = \frac{8a \cdot \Delta}{l_k^2} = \frac{32a}{\theta} \left(1 - \alpha \frac{(\sqrt{2}^k - 1)}{\sqrt{n}} \right)$. Тогда среднее

число ячеек, попавших в ближнюю зону, будет таким:

$$N_{\text{бл ср}} = \frac{(N - N_{\text{гр}})N_{\text{бл}} + N_{\text{гр}} \cdot \frac{3}{4} N_{\text{бл}}}{N} = N_{\text{бл}} \left(1 - \frac{8 \left(1 - \alpha \frac{\sqrt{2}^k - 1}{\sqrt{n}} \right)}{\theta \cdot 2^k} \right).$$

Сравним полученную теоретическую оценку с экспериментальными результатами. Для этого построим графики (в логарифмическом масштабе) зависимости величины $N_{\text{бл ср}}$

от величины θ . Расчеты проводились для $n = 175674$ элементов, $\alpha = 0.7$ и θ от 0.2 до 2 с шагом 0.1 для разных k . Кривая, полученная теоретически, достаточно хорошо описывает экспериментальные данные (рис. 4).

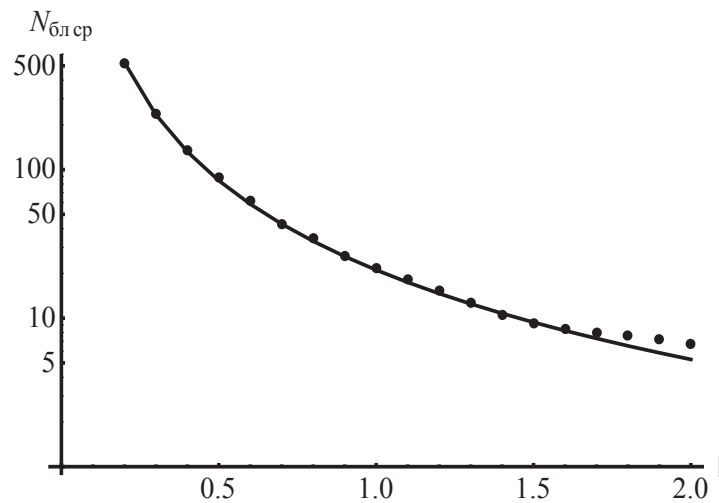


Рис. 4. Среднее число ближних ячеек.

Линия – теоретическая оценка, точки – экспериментальные данные ($k = 16$).

Вычисление влияния одного ВЭ на скорость другого требует 6 арифметических операций. Для каждого ВЭ (n штук) нужно посчитать влияние всех элементов, находящихся в ячейках ближней зоны ($\frac{n}{2^k}$ штук для каждой ячейки). Таким образом, влияние ВЭ ближней зоны, рассчитываемое напрямую по закону Био – Савара, требует выполнения следующего числа арифметических операций:

$$Q_{\text{бс}} = 6N_{\text{бл ср}} \frac{n}{2^k} n = \frac{6n^2 N_{\text{бл ср}}}{2^k} =$$

$$= \frac{6n^2}{2^k} 4 \left(\frac{4}{\theta} \right)^2 \left(1 - \frac{\alpha (\sqrt{2^k} - 1)}{\sqrt{n}} \right)^2 \left(1 - \frac{8\alpha \left(1 - \alpha \frac{\sqrt{2^k} - 1}{\sqrt{n}} \right)}{\theta \cdot 2^k} \right).$$

Как видно из графика (рис. 5), теоретическая оценка $Q_{\text{бс}}$ хорошо согласуется с экспериментальными данными.

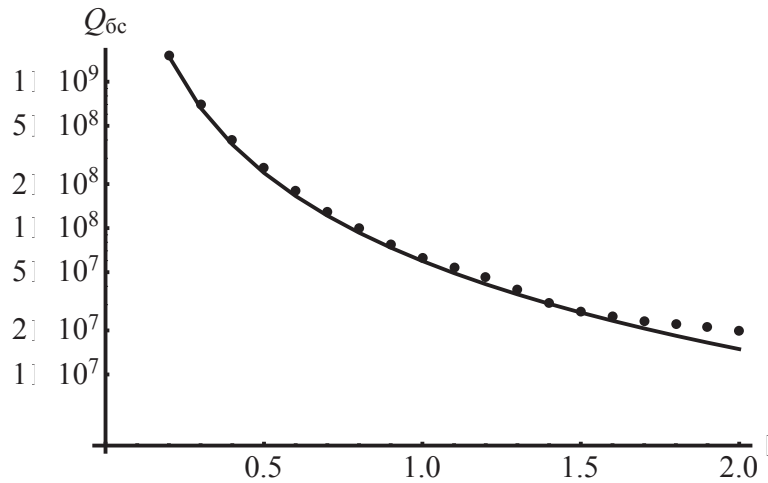


Рис.5. Количество операций, требуемое для вычисления влияния ВЭ из ячеек ближней зоны. Линия – теоретическая оценка, точки – экспериментальные данные ($k = 16$).

Теперь оценим количество операций, требуемое для вычисления влияния ВЭ, находящихся в дальней зоне.

Пусть j – расстояние, выражаемое в длинах стороны квадрата k -го уровня, при котором квадрат k -го уровня попадает в дальнюю зону (т. е. относится к ячейкам, влияние ВЭ из которых вычисляется быстрым методом), тогда

$$j = \frac{2}{\theta} \left(1 + (\sqrt{2})^{k-s} \right),$$

и на расстоянии j от ячеек k -го уровня к дальней зоне будут относиться ячейки уровня

$$s = k + 2 - 2 \log_2(\theta j - 2).$$

Радиусы ближней зоны и всей исходной области, выраженные в длинах стороны квадрата k -го уровня, равны соответственно $p_k = \frac{4}{\theta}$ и $P_k = (\sqrt{2})^{k-2}$ (оценка строится для квадрата k -го уровня, расположенного в центре). Тогда приближенно число ячеек (максимально высокого уровня), находящихся в дальней зоне, можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} N_{\text{дал}} &= \sum_{j=p_k+1}^{P_k} \frac{8j \cdot l_k}{l_s^2} = \sum_{j=p_k+1}^{P_k} \frac{32j}{(\theta j - 2)^2} \approx 32 \int_{\frac{4}{\theta} + \frac{1}{2}}^{(\sqrt{2})^{k-2}} \frac{y}{(\theta y - 2)^2} dy = \\ &= \frac{32}{\theta^2} \left(4 \left(\frac{1}{4 + \theta} + \frac{1}{4 - \sqrt{2}^k \theta} \right) - \ln(4 + \theta) + \ln(\sqrt{2}^k \theta - 4) \right). \end{aligned}$$

Вычисление четырех коэффициентов влияния от каждой ячейки дальней зоны требует 28 арифметических операций, таким образом, общее число операций равно

$$Q_{\text{дал}} = \beta \cdot 28N_{\text{дал}} \cdot 2^k =$$

$$= \frac{896\beta \cdot 2^k}{\theta^2} \left(4 \left(\frac{1}{4 + \theta} + \frac{1}{4 - \sqrt{2}^k \theta} \right) - \ln(4 + \theta) + \ln(\sqrt{2}^k \theta - 4) \right),$$

где β – коэффициент, учитывающий то, что для ячеек, отличных от центральной, число $N_{\text{дал}}$ будет несколько отличаться. В результате проведенных вычислительных экспериментов было получено, что $\beta \approx 1.3$ достаточно хорошо описывает это явление. Из графика, изображенного на рис. 6, видно, что данная оценка хорошо согласуется с экспериментальными данными.

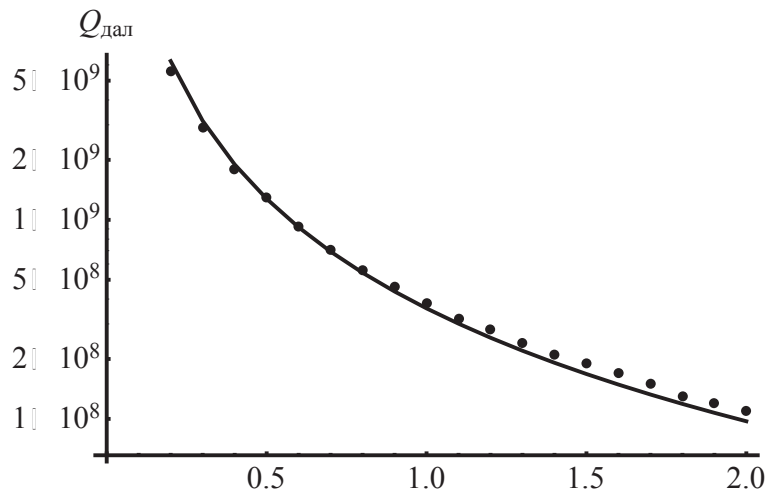


Рис. 6. Количество операций, требуемое для вычисления влияния ВЭ, относящихся к дальней зоне. Линия – теоретическая оценка, точки – экспериментальные данные ($k = 16$).

Вычисление скоростей ВЭ, находящихся внутри ячеек нижнего уровня, через рассчитанные коэффициенты требует $Q_{\text{ниж}} = 4n$ операций.

Итого общее число операций, необходимое для вычисления скорости на одном шаге расчета, составляет

$$Q = Q_{\text{бс}} + Q_{\text{дал}} + Q_{\text{ниж}} =$$

$$= \frac{6n^2}{2^p} 4 \left(\frac{4}{\theta} \right)^2 \left(1 - \frac{\alpha(\sqrt{2}^k - 1)}{\sqrt{n}} \right)^2 \left(1 - \frac{8a \left(1 - \alpha \frac{\sqrt{2}^k - 1}{\sqrt{n}} \right)}{\theta \cdot 2^k} \right) +$$

$$+ \frac{896\beta \cdot 2^k}{\theta^2} \left(4 \left(\frac{1}{4 + \theta} + \frac{1}{4 - \sqrt{2}^k \theta} \right) - \ln(4 + \theta) + \ln(\sqrt{2}^k \theta - 4) \right) + 4n. \quad (3)$$

То, как данная оценка соотносится с экспериментальными данными, видно из графика (рис. 7).

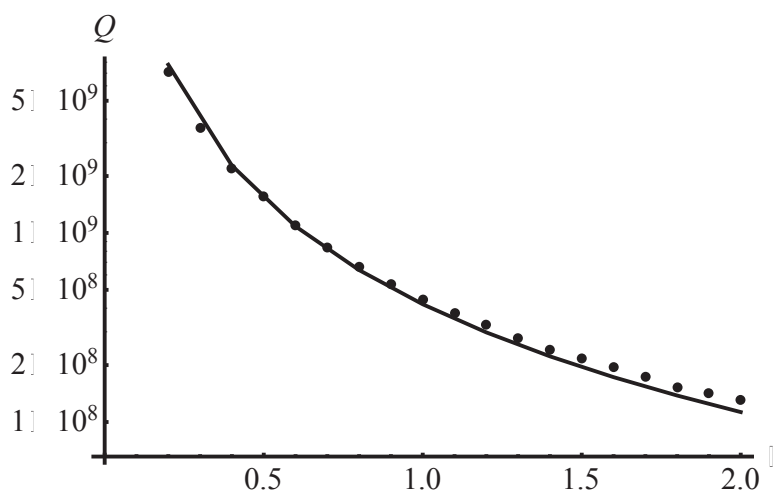


Рис. 7. Общее количество операций, требуемое для выполнения одного шага в зависимости от времени. Линия – теоретическая оценка, точки – экспериментальные данные. ($k = 16$).

Оптимальное значение параметра k можно найти численно: продифференцировав выражение (3) по k и приравняв нулю, найти корень полученного уравнения, либо графически: построить график зависимости Q от k . Т.к. выражение (3) является достаточно сложным, то второй вариант может оказаться на практике (при известном n и θ) проще. К примеру, график зависимости Q от k для $\theta = 0.6$ выглядит следующим образом (рис. 8):



Рис. 8. Зависимость числа операций Q от максимальной глубины дерева k для $\theta = 0.6$.

Из графика видно, что оптимальной в данном случае является глубина дерева $k = 15$, что согласуется с практикой: для $\theta = 0.6$ действительно оптимальным является именно такой уровень дерева, т.к. количество операций при этом равно 1.0×10^9 , что меньше, чем при k равном 14 и 16, для которых Q равно 1.6×10^9 и 1.1×10^9 соответственно.

Выводы

В ходе построения алгоритма быстрого метода обнаружено, что сложность вычислений зависит от нескольких параметров: n – количество ВЭ, θ – параметр близости ячеек и k – максимальный уровень дерева. Рассмотрена модельная задача, для которой приведена оценка количества арифметических операций, требуемых для вычисления скоростей всех вихревых элементов при выполнении одного шага. Теоретическая оценка достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными. Таким образом, получено соотношение, из которого можно найти оптимальный параметр k – максимальный уровень дерева для определенного количества элементов и при заданном параметре θ . Данный результат может быть полезен на практике при решении задачи тем, что позволит заранее определять оптимальный параметр k , который достаточно сильно влияет на скорость решения.

Список литературы

1. Barnes J., Hut P. A hierarchical ($N \log N$) force-calculation algorithm // Nature. 1986. V. 324. № 4. P. 446–449.
2. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2010. 592 с.
3. Дынникова Г.Я. Использование быстрого метода решения задачи N тел при вихревом моделировании течений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49, № 8. С.1458–1456.
4. Марчевский И.К. Устойчивость по Ляпунову положений равновесия профиля в потоке. Математическое моделирование обтекания профиля и исследование его устойчивости в потоке по Ляпунову. LAM LAMBERT Academic Publishing, 2011. 134 с.
5. Морева В.С. Способы ускорения вычислений при решении плоских задач аэродинамики методом вихревых элементов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. Спец. выпуск Прикладная математика. С. 83-95.