НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408
электронный научно-технический журнал

Приведенные граничные условия для упругой полуплоскости с тонким вязкоупругим покрытием

11, ноябрь 2012
DOI: 10.7463/1112.0496367

Анофрикова Н. С., Приказчиков Д. А.

УДК 539.3

Россия, Саратов, СГУ им. Н.Г. Чернышевского
Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
prikazchikovda@rambler.ru
nanofrikova@yandex.ru

Введение

Исследование динамики покрытий является актуальной задачей, имеющей многочисленные приложения в современной науке и технике [1, 2]. Несмотря на то, что аналитическое решение может быть сравнительно легко записано, его дальнейший анализ существенно затруднен, оставляя возможность лишь для численного исследования. В этой связи одним из основных подходов к задаче остается получение приближенных граничных условий на границе основы и покрытия, в результате чего исследование сводится к более простой задаче для упругого полупространства, с приведенными граничными условиями, учитывающими свойства материала покрытия.

В классической работе [3] приведенные граничные условия были получены на основе физических гипотез. Более строго они могут быть выведены на основе метода прямого асимптотического интегрирования, разработанного А.Л. Гольденвейзером, см. [4-7]. Следует также отметить, что отсутствие должной математической строгости может привести к неточностям, см. например, [8], которые отразились и в последующих работах [9], [10]. В то же время в [11] показано, что слагаемые, за счет которых «уточняются» граничные условия [3], относятся к более высокому порядку малости, чем порядок предлагаемой в [8] приближенной теории.

Целью настоящей работы является вывод на основе метода асимптотического интегрирования приведенных граничных условий на поверхности контакта упругой полуплоскости и вязкоупругого покрытия. Следует отметить, что метод асимптотического интегрирования успешно применялся ранее для вязкоупругих тонкостенных конструкций [12, 13]. В данной работе получено длинноволновое приближение для неоднородных граничных условий на поверхности покрытия. Это позволит в дальнейшем не только использовать их для построения эффективного приближения дисперсионного соотношения, но и построить на их базе асимптотическую модель для волны Рэлея, расширяя подход, ориентированный на выделение вклада поверхностных волн в общую динамическую картину [11, 14, 15], на случай упругого полупространства с вязкоупругим покрытием.

1. Постановка задачи

Рассмотрим упругую изотропную полуплоскость с тонким вязкоупругим покрытием постоянной толщины h. Введем прямоугольную декартову систему координат следующим образом: предположим, что ось Ox_1 лежит на поверхности покрытия, а ось Ox_3 направлена вниз, так, что граница раздела между основанием и покрытием задается уравнением $x_3 = h$.

Уравнения движения в выбранной системе координат имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

где u_n - компоненты вектора перемещения, σ_{in} - компоненты тензора напряжений, ρ - плотность материала. Уравнения состояния для упругой полуплоскости примем в виде:

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \qquad \sigma_{13} = \sigma_{31} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right),$$
$$\sigma_{33} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \tag{1.2}$$

где μ и λ - постоянные Ламе. Скорости волн расширения и сдвига определяются выражениями

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \text{ и } c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{1.3}$$

Уравнения состояния для вязкоупругого изотропного материала возьмем в интегрально-операторной форме

$$\sigma_{11} = (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \tilde{\lambda} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \qquad \sigma_{13} = \sigma_{31} = \tilde{\mu}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right),$$
$$\sigma_{33} = \tilde{\lambda} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \tag{1.4}$$

где $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\lambda}$ - интегральные операторы, задаваемые формулами

$$\tilde{\mu} f(t) = \mu_0\left(f(t) - \int_{-\infty}^{t} \Gamma_\mu (t - \tau) f(\tau) d\tau \right), \tag{1.5}$$

$$\tilde{\lambda} f(t) = \lambda_0\left(f(t) - \int_{-\infty}^{t} \Gamma_\lambda (t - \tau) f(\tau) d\tau \right).$$

Здесь μ_0 и λ_0 - постоянные материала покрытия, $\Gamma_\mu(t)$ и $\Gamma_\lambda(t)$ - ядра релаксации.

Предположим, что на поверхности $x_3 = 0$ действует нормальная нагрузка $P = P(x_1, t)$, тогда граничные условия запишутся следующим образом:

$$\sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{33} = -P \qquad \text{при } x_3 = 0. \qquad (1.6)$$

Кроме того, мы будем принимать во внимание условие непрерывности перемещений и напряжений при $x_3 = h$.

2. Приведенные граничные условия

Рассмотрим задачу для вязкоупругого покрытия, задавая на границе $x_3 = h$ условия:

$$u_n = v_n, \tag{2.1}$$

где $v_n = v_n(x_1, t)$ - заданные перемещения, $n = 1{,}3$.

Применим к задаче (1.1), (1.2), (1.4) стандартную схему асимптотического интегрирования, см. например, [4-7, 11]. В случае покрытия $\left(0 \le x_3 \le h\right)$, все параметры материала обозначим индексом '0'. Введем малый геометрический параметр

$$\varepsilon = \frac{h}{L} << 1, \tag{2.2}$$

соответствующий предположению о длинноволновом приближении, где L - характерная длина волны. Введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x_1}{L}, \quad \eta = \frac{x_3}{h}, \quad \tau_2 = \frac{tc_{20}}{L}, \tag{2.3}$$

где $c_{20} = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\rho_0}}$, ρ_0 - плотность материала покрытия. Также введем безразмерные величины

$$u_n^* = \frac{u_n}{V}, \quad v_n^* = \frac{v_n}{V}, \quad \sigma_{11}^* = \frac{L}{\mu_0 V}\sigma_{11}, \quad \sigma_{n3}^* = \frac{L^2}{\mu_0 h V}\sigma_{n3}, \quad p^* = \frac{L^2}{\mu_0 h V}P, \tag{2.4}$$

где V - максимальная амплитуда перемещений и предполагается, что величины со звездочкой одного асимптотического порядка.

Уравнения движения и состояния в безразмерных переменных принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_{11}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{13}^*}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \tau_2^2},$$

$$\frac{\partial \sigma_{33}^*}{\partial \eta} + \varepsilon \frac{\partial \sigma_{13}^*}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial \tau_2^2},$$

$$\varepsilon\sigma_{11}^{*} = \left(\kappa_0^2 - 2\right)\frac{\partial u_3^*}{\partial \eta} + \varepsilon\kappa_0^2 \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \left(\kappa_0^2 - 2\right)\int_{-\infty}^{\tau_2} \Gamma_\lambda^*(\tau_2 - \tau_*)\frac{\partial u_3^*}{\partial \eta} d\tau_* -$$

$$- \varepsilon\left(\left(\kappa_0^2 - 2\right)\int_{-\infty}^{\tau_2} \Gamma_\lambda^*(\tau_2 - \tau_*)\frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} d\tau_* + 2\int_{-\infty}^{\tau_2} \Gamma_\mu^*(\tau_2 - \tau_*)\frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} d\tau_*\right), \qquad (2.5)$$

$$\varepsilon^2\sigma_{13}^* = \frac{\partial u_1^*}{\partial \eta} + \varepsilon\frac{\partial u_3^*}{\partial \xi} - \int_{-\infty}^{\tau_2} \Gamma_\mu^*(\tau_2 - \tau_*)\left(\frac{\partial u_1^*}{\partial \eta} + \varepsilon\frac{\partial u_3^*}{\partial \xi}\right) d\tau_*,$$

$$\varepsilon^2\sigma_{33}^* = \kappa_0^2\frac{\partial u_3^*}{\partial \eta} + \varepsilon\left(\kappa_0^2 - 2\right)\frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \left(\kappa_0^2 - 2\right)\int_{-\infty}^{\tau_2} \Gamma_\lambda^*(\tau_2 - \tau_*)\frac{\partial u_3^*}{\partial \eta} d\tau_* -$$

$$- 2\int_{-\infty}^{\tau_2} \Gamma_\mu^*(\tau_2 - \tau_*)\frac{\partial u_3^*}{\partial \eta} d\tau_* - \varepsilon\left(\kappa_0^2 - 2\right)\int_{-\infty}^{\tau_2} \Gamma_\lambda^*(\tau_2 - \tau_*)\frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} d\tau_*,$$

где $\Gamma_\lambda^*(\tau_2) = \dfrac{L}{c_{20}}\Gamma_\lambda(\tau_2)$, $\Gamma_\mu^*(\tau_2) = \dfrac{L}{c_{20}}\Gamma_\mu(\tau_2)$, $\kappa_0 = \dfrac{c_{10}}{c_{20}}$, $c_{10} = \sqrt{\dfrac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho_0}}$.

Граничные условия в безразмерной форме имеют вид:

$$\sigma_{13}^* = 0,\ \sigma_{33}^* = -p^* \text{ при } \eta = 0, \qquad u_n^* = v_n^* \text{ при } \eta = 1. \qquad (2.6)$$

Разложим перемещения и напряжения в ряды по малому параметру ε:

$$\begin{pmatrix} u_n^* \\ \sigma_{11}^* \\ \sigma_{13}^* \\ \sigma_{33}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n^{(0)} \\ \sigma_{11}^{(0)} \\ \sigma_{13}^{(0)} \\ \sigma_{33}^{(0)} \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} u_n^{(1)} \\ \sigma_{11}^{(1)} \\ \sigma_{13}^{(1)} \\ \sigma_{33}^{(1)} \end{pmatrix} + \ldots. \qquad (2.7)$$

Подставляя эти ряды в уравнения (2.5) и граничные условия (2.6), и приравнивая коэффициенты при ε^0, получаем систему для определения компонент ведущего порядка

$$\frac{\partial \sigma_{11}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{13}^{(0)}}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 u_1^{(0)}}{\partial \tau_2^2},$$

$$\frac{\partial \sigma_{33}^{(0)}}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial \tau_2^2},$$

$$0 = \left(\kappa_0^2 - 2\right)\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial \eta} - \left(\kappa_0^2 - 2\right)\int_{-\infty}^{\tau_2} \Gamma_\lambda^*(\tau_2 - \tau_*)\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial \eta} d\tau_*, \qquad (2.8)$$

$$0 = \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial \eta} - \int_{-\infty}^{\tau_2} \Gamma_\mu^*(\tau_2 - \tau_*)\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial \eta} d\tau_*,$$

$$0=\kappa_0^2\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial\eta}-\left(\kappa_0^2-2\right)\int\limits_{-\infty}^{\tau_2}\Gamma_\lambda^*(\tau_2-\tau_*)\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial\eta}d\tau_*-2\int\limits_{-\infty}^{\tau_2}\Gamma_\mu^*(\tau_2-\tau_*)\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial\eta}d\tau_*,$$

$$u_n^{(0)}=v_n^* \text{ при } \eta=1,$$

$$\sigma_{33}^{(0)}=-p^* \text{ при } \eta=0,$$

$$\sigma_{13}^{(0)}=0 \text{ при } \eta=0.$$

Интегрируя уравнения $(2.8)_4$ и $(2.8)_5$ совместно с граничными условиями $(2.8)_6$, а также уравнение $(2.8)_2$ совместно с граничным условием $(2.8)_7$, найдем

$$u_n^{(0)}=v_n^*,\qquad \sigma_{33}^{(0)}=\eta\frac{\partial^2 v_3^*}{\partial\tau_2^2}-p^* \tag{2.9}$$

Последняя формула дает главный член искомого значения нормального напряжения σ_{33}.
Из уравнения $(2.5)_4$ получим:

$$0=\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial\xi}-\int\limits_{-\infty}^{\tau_2}\Gamma_\mu^*(\tau_2-\tau_*)\left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial\xi}\right)d\tau_*, \tag{2.10}$$

откуда,

$$0=\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial\xi}. \tag{2.11}$$

Из граничных условий (2.6) имеем

$$u_n^{(1)}=0 \text{ при } \eta=1, \tag{2.12}$$

следовательно,

$$u_1^{(1)}=(1-\eta)\frac{\partial v_3^*}{\partial\xi}. \tag{2.13}$$

Аналогично, из $(2.5)_5$, с учетом граничного условия (2.12)

$$u_3^{(1)}=(1-\eta)\left(1-2\kappa_0^{-2}\right)\left(I-\left(1-2\kappa_0^{-2}\right)\widetilde{\Gamma}_\lambda^*-2\kappa_0^{-2}\widetilde{\Gamma}_\mu^*\right)^{-1}\left(I-\widetilde{\Gamma}_\lambda^*\right)\frac{\partial v_1^*}{\partial\xi}, \tag{2.14}$$

где I – тождественный оператор и

$$\widetilde{\Gamma}_\lambda^* f(\tau_2)=\int\limits_{-\infty}^{\tau_2}\Gamma_\lambda^*(\tau_2-\tau_*)f(\tau_*)d\tau_*,\quad \widetilde{\Gamma}_\mu^* f(\tau_2)=\int\limits_{-\infty}^{\tau_2}\Gamma_\mu^*(\tau_2-\tau_*)f(\tau_*)d\tau_*. \tag{2.15}$$

Используя формулы $(2.5)_3$, (2.9) и (2.14), находим

$$\sigma_{11}^{(0)}=\Big[-\kappa_0^2\left(1-2\kappa_0^{-2}\right)^2\left(\mathrm{I}-\tilde{\Gamma}_\lambda^*\right)\left(\mathrm{I}-\left(1-2\kappa_0^{-2}\right)\tilde{\Gamma}_\lambda^*-2\kappa_0^{-2}\tilde{\Gamma}_\mu^*\right)^{-1}\left(\mathrm{I}-\tilde{\Gamma}_\lambda^*\right)+$$
$$+\kappa_0^2\left(\mathrm{I}-\left(1-2\kappa_0^{-2}\right)\tilde{\Gamma}_\lambda^*-2\kappa_0^{-2}\tilde{\Gamma}_\mu^*\right)\Big]\frac{\partial v_1^*}{\partial\xi} \tag{2.16}$$

Подставляя (2.16) в $(2.8)_1$, учитывая $(2.8)_8$, получим выражение для $\sigma_{13}^{(0)}$ – главного члена в разложении σ_{13}^*:

$$\sigma_{13}^{(0)}=\eta\left[\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial\tau_2^2}+\Big[\kappa_0^2\left(1-2\kappa_0^{-2}\right)^2\left(\mathrm{I}-\tilde{\Gamma}_\lambda^*\right)\left(\mathrm{I}-\left(1-2\kappa_0^{-2}\right)\tilde{\Gamma}_\lambda^*-2\kappa_0^{-2}\tilde{\Gamma}_\mu^*\right)^{-1}\left(\mathrm{I}-\tilde{\Gamma}_\lambda^*\right)-\right.$$
$$\left.-\kappa_0^2\left(\mathrm{I}-\left(1-2\kappa_0^{-2}\right)\tilde{\Gamma}_\lambda^*-2\kappa_0^{-2}\tilde{\Gamma}_\mu^*\right)\Big]\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial\xi^2}\right]. \tag{2.17}$$

Возвращаясь к исходным переменным, запишем приведенные граничные условия на поверхности контакта $x_3=h$:

$$\sigma_{13}=\rho_0 h\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+c_{20}^2\left\{\left(\kappa_0-2\kappa_0^{-1}\right)^2\left(\mathrm{I}-\tilde{\Gamma}_\lambda\right)R\left(\mathrm{I}-\tilde{\Gamma}_\lambda\right)-\kappa_0^2R^{-1}\right\}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}\right],$$
$$\sigma_{33}=\rho_0 h\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}-P, \tag{2.18}$$

где

$$\tilde{\Gamma}_\lambda f(t)=\int_{-\infty}^{t}\Gamma_\lambda(t-\tau)f(\tau)d\tau,\quad \tilde{\Gamma}_\mu f(t)=\int_{-\infty}^{t}\Gamma_\mu(t-\tau)f(\tau)d\tau,\quad R=\left(\mathrm{I}-\left(1-2\kappa_0^{-2}\right)\tilde{\Gamma}_\lambda-2\kappa_0^{-2}\tilde{\Gamma}_\mu\right)^{-1}.$$

Заключение

В данной работе в рамках длинноволнового приближения получены эффективные граничные условия для системы «упругая основа – вязкоупругое покрытие» для случая заданных на поверхности покрытия нормальных усилий. В дальнейшем результаты (2.18) могут быть использованы для анализа поля волны Рэлея в случае заданного типа нагрузки на поверхности, см. [11], а также исследования распространения поверхностной волны в зависимости от параметров материала вязкоупругого покрытия. При этом возможность рассмотрения динамической задачи обеспечивается тонкостью покрытия.

Авторы выражают свою искреннюю благодарность д.ф.-м.н., проф. Каплунову Ю.Д. за плодотворные обсуждения. Исследования Анофриковой Н.С. поддержаны грантом РФФИ № 11-01-00545-а. Исследования Приказчикова Д.А. выполнены при поддержке РФФИ, грант № 12-01-33049.

Список литературы

1. Shuvalov A.L., Every A.G. On the long-wave onset of dispersion of the surface-wave velocity in coated solids // Wave Motion. 2008. Vol. 45, no. 6. P. 857-863. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2007.12.002
2. Захаров Д.Д. Эффективные аппроксимации высокого порядка для слоистых покрытий и прослоек из анизотропных упругих, вязкоупругих и нематических материалов // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74, № 3. С. 403-418.
3. Tiersten H.F. Elastic surface waves guided by thin films // J. Appl. Phys. 1969. Vol. 40. P. 770-789.
4. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26, № 4. С. 662-686.
5. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510 с.
6. Goldenveiser A.L., Kaplunov J.D., Nolde E.V. On Timoshenko-Reissner type theories of plates and shells // Int. J. Solids Struct. 1993. Vol. 30. P. 675-694.
7. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. N.-Y.: Academic Press, 1998. 226 p.
8. Bovik P. A comparison between the Tiersten model and O(h) boundary conditions for elastic surface waves guided by thin layers // ASME J. Appl.Mech. 1996. Vol. 63. P. 162-167.
9. Niklasson J., Datta S.K., Dunn M.L. On approximating guided waves in plates with thin anisotropic coating by means of effective boundary conditions // J. Acoust. Soc. Am. 2000. Vol. 108. P. 924-933.
10. Vinha P.C., Linhb N.T.K. An approximate secular equation of Rayleigh waves propagating in an orthotropic elastic half-space coated by a thin orthotropic elastic layer // Wave Motion. 2012. Vol. 49, № 7. P. 681-689. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2012.04.005
11. Dai H.-H., Kaplunov J., Prikazchikov D.A. A long-wave model for the surface elastic wave in a coated half-space // Proc. Roy. Soc. A. 2010. Vol. 466. P. 3097-3116.
12. Anofrikova N.S., Kossovich L.Yu., Kirillova I.V., Shevtsova Yu.V. Non-stationary waves in thin walled bodies at shock loading: asymptotic approach // Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics. Elite Publishing House Ltd., 2011. P. 318-330. ISBN 81-88901-43-1.
13. Бажанова Н.С., Коссович Л.Ю., Суховловская М.С. Нестационарные волны в вязкоупругих оболочках: модель Максвелла // Изв. ВУЗов Сев.-Кавк. региона. Естественные науки. 2000. № 2. С. 17-24.
14. Kaplunov J., Zakharov A., Prikazchikov D.A. Explicit models for elastic and piezoelastic surface waves // IMA J. Appl. Math. 2006. Vol. 71. P. 768-782.

15. Приказчиков Д.А. Развитие асимптотических моделей для поверхностных и интерфейсных волн // Вестник НГУ им. Н.И. Лобачевского. 2011. Т. 4, № 4. С. 1713-1715.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

Reduced boundary conditions for an elastic half-plane coated with a thin viscoelastic layer

11, November 2012

DOI: 10.7463/1112.0496367

Anofrikova N.S., Prikazchikov D.A.

Russia, Saratov State University named after N.G. Chernishevskiy

Russia, Bauman Moscow State Technical University

prikazchikovda@rambler.ru

nanofrikova@yandex.ru

The paper describes reduced boundary conditions for an elastic half-plane covered with a thin viscoelastic coating in case of normal force applied to the surface. A long-wave approximation was constructed with the use of the method of asymptotic integration for motion equations and constitutive relations of the viscoelastic coating.

Publications with keywords: effective boundary conditions, asymptotic integration, viscoelastic coating

Publications with words: effective boundary conditions, asymptotic integration, viscoelastic coating

References

1. Shuvalov A.L., Every A.G. On the long-wave onset of dispersion of the surface-wave velocity in coated solids. *Wave Motion*, 2008, vol. 45, no. 6, pp. 857-863. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2007.12.002

2. Zakharov D.D. Effektivnye approksimatsii vysokogo poriadka dlia sloistykh pokrytii i prosloek iz anizotropnykh uprugikh, viazkouprugikh i nematicheskikh materialov [Effective high-order approximations of layered coatings and linings of anisotropic elastic, viscoelastic and nematic materials]. *Prikladnaia matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 2010, vol. 74, no. 3, pp. 403-418. (Trans. version: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, vol. 74, no. 3, pp. 286-296. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2010.07.004).

3. Tiersten H.F. Elastic surface waves guided by thin films. *J. Appl. Phys.*, 1969, vol. 40, pp. 770-789.

4. Gol'denveizer A. L. Postroenie priblizhennoi teorii izgiba plastinki metodom asimptoticheskogo integrirovaniia uravnenii teorii uprugosti [Construction of the approximate

theory of bending the plate by the method of asymptotic integration of equations of the theory of elasticity]. *Prikladnaia matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1962, vol. 26, no. 4, pp. 662-686.

5. Gol'denveizer A.L. *Teoriia uprugikh tonkikh obolochek* [Theory of elastic thin shells]. Moscow, Nauka, 1976. 510 p.

6. Goldenveiser A.L., Kaplunov J.D., Nolde E.V. On Timoshenko-Reissner type theories of plates and shells. *Int. J. Solids Struct*., 1993, vol. 30, pp. 675-694.

7. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. *Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies*. N.-Y., Academic Press, 1998. 226 p.

8. Bovik P. A comparison between the Tiersten model and O(h) boundary conditions for elastic surface waves guided by thin layers. *ASME J. Appl.Mech*., 1996, vol. 63, pp. 162-167.

9. Niklasson J., Datta S.K., Dunn M.L. On approximating guided waves in plates with thin anisotropic coating by means of effective boundary conditions. *J. Acoust. Soc. Am*., 2000, vol. 108, pp. 924-933.

10. Vinha P.C., Linhb N.T.K. An approximate secular equation of Rayleigh waves propagating in an orthotropic elastic half-space coated by a thin orthotropic elastic layer. *Wave Motion*, 2012, vol. 49, no. 7, pp. 681-689. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2012.04.005

11. Dai H.-H., Kaplunov J., Prikazchikov D.A. A long-wave model for the surface elastic wave in a coated half-space. *Proc. Roy. Soc. A.,* 2010, vol. 466, pp. 3097-3116.

12. Anofrikova N.S., Kossovich L.Yu., Kirillova I.V., Shevtsova Yu.V. Non-stationary waves in thin walled bodies at shock loading: asymptotic approach. In: *Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics*. Elite Publishing House Ltd., 2011, pp. 318-330. ISBN 81-88901-43-1.

13. Bazhanova N.S., Kossovich L.Iu., Sukholovskaia M.S. Nestatsionarnye volny v viazkouprugikh obolochkakh: model' Maksvella [Unsteady waves in viscoelastic shells: the Maxwell model]. *Izv. VUZov Sev.-Kavk. regiona. Estestvennye nauki* [Proc. of the Universities of the North-Caucasian region. Natural sciences], 2000, no. 2, pp. 17-24.

14. Kaplunov J., Zakharov A., Prikazchikov D.A. Explicit models for elastic and piezoelastic surface waves. *IMA J. Appl. Math*., 2006, vol. 71, pp. 768-782.

15. Prikazchikov D.A. Razvitie asimptoticheskikh modelei dlia poverkhnostnykh i interfeisnykh voln [Development of asymptotic models for surface and interface waves]. *Vestnik NGU im. N.I. Lobachevskogo* [Herald of the Lobachevsky NSU], 2011, vol. 4, no. 4, pp. 1713-1715.