НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408
электронный научно-технический журнал

Срыв слежения в дискретной системе фазовой автоподстройки

10, октябрь 2012
DOI: 10.7463/1012.0478399

Ковальчук А. А.

УДК: 621.396.662

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
nastia_kov-k@rambler.ru

Введение

Системы фазовой автоподстройки (ФАП) находят широкое применение в различных областях техники: слежение за несущими и поднесущими частотами принимаемых сигналов, когерентная демодуляция сигналов с частотной и фазовой модуляцией, измерение частоты и фазы сигналов и т.д.

Для анализа дискретных ФАП применяются интегральное уравнение Колмогорова-Чепмена и уравнение среднего времени до срыва синхронизации [1-3]. В указанных работах найдены плотности распределения вероятности (ПРВ) координат, в меньшей степени исследованы характеристики срыва слежения, причем рассмотрены непрерывные системы, и не проводится анализ дискретных ФАП.

В данной статье приводится анализ срыва синхронизации дискретных ФАП 1-го и 2-го порядков различными методами.

1. Постановка задачи

Срыв слежения в непрерывной ФАП, которая описывается системой стохастических ДУ 2-го порядка, представляет собой до настоящего времени в общем случае нерешенную задачу. Корректно эта задача должна быть решена как краевая задача для уравнения Понтрягина [4]. Пусть M - диффузионный оператор Понтрягина. T - среднее время до срыва слежения, ∂D - граница области D фазового пространства. Срыв слежения происходит тогда и только тогда, если изображающая точка выходит за границу ∂D области D фазового пространства. При этом среднее время до срыва удовлетворяет краевой задаче

$$\text{MT} = -1 \text{ в области D; T} = 0 \text{ на границе } \partial D. \quad (1)$$

Однако трудность заключается в правильном выборе краевых условий, чего корректно до сих пор не сделано. Поэтому приходится прибегать к более простым методам вычисления времени до срыва слежения.

Можно, в частности, использовать приближенные формулу Крамерса и формулу Журавлева для ФАП с интегрирующим фильтром (ИФ), а также формулу [5] для ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром (ПИФ). Имеются приближенные выражения для среднего времени до срыва, которые получили Таусворт [6] и Линдсей. Кроме того, для приближенного вычисления среднего времени до срыва слежения могут быть использованы метод усреднения и другие асимптотические методы.

Анализ срыва слежения в непрерывных системах автоматического регулирования второго порядка рассмотрен в ряде работ [6, 7 и др.]. Некоторые неудобства при сопоставлении результатов представляет различная нормировка среднего времени T_c до срыва синхронизации, так, например, Шухман [7] нормирует по шумовой полосе ($\gamma_{c1} = BT_c$), Таусворт [6] и Линдсей - по удвоенной шумовой полосе ($\gamma_{c1} = BT_c = W_L T_c$), в статье отдается предпочтение нормировке $\gamma_{c1} = BT_c$ при $y(x) = sin(x)$, переходящую в нормировку по полосе синхронизации в системе 1-го порядка [8]. В данной статье вначале рассматриваются приближенные соотношения для среднего времени до срыва слежения, а затем решается краевая задача.

2. Приближенные методы анализа

Метод Таусворта (метод аппроксимации условного среднего значения $E\left(\dot{x}/x\right)$). Данный метод используется как для аппроксимации коэффициентов сноса и диффузии в уравнении Понтрягина [6], так и для аппроксимации решения этого уравнения. Рассмотрим вначале первый способ решения задачи: в [6] показано, что в случае ФАП 2-го порядка можно использовать дифференциальное уравнение (ДУ) Понтрягина в форме [6]

$$0{,}5b(x_0)T''(x_0) + a(x_0)T'(x_0) + 1 = 0. \quad (2)$$

Здесь оператор Понтрягина

$$M = \frac{1}{2}b\left(x_0\right)\frac{d}{dx_0^2} + a\left(x_0\right)\frac{d}{dx_0};$$

$a\left(x_0\right)$ - коэффициент сноса; $b\left(x_0\right)$ - коэффициент диффузии;

$$a\left(x_0\right) = \lim_{\vartriangle t \to 0}\left\{\frac{E\left(\vartriangle x_0 / x_0\right)}{\vartriangle t}\right\}; \quad b\left(x_0\right) = \lim_{\vartriangle t \to 0}\left\{\frac{E\left[\left(\vartriangle x_0\right)^2 / x_0\right]}{\vartriangle t}\right\}.$$

Решение $T(x_0)$, как и в системе 1-го порядка, должно удовлетворять граничным условиям (1)

$$T\left(x_0^-\right) = T\left(x_0^+\right) = 0. \quad (3)$$

Запишем ДУ (2) в форме [6]

$$T''(x_0)+g_1(x_0)T'(x_0)+g_2(x_0)=0, \tag{4}$$

где $g_1(x_0)=2a(x_0)/b(x_0); \quad g_2(x_0)=2/b(x_0).$

В [7] по методу Таусворта получено обобщенное ДУ Понтрягина.

Это ДУ при наличии вырожденного ПИФ (ВПИФ) имеет вид

$$T''(x_0)+g_1(x_0)T_n'(x_0)+ng_2(x_0)T_{n-1}=0, \text{т} \tag{5}$$

где $T_n=E\left(T^n\right)$, а граничные условия аналогичны (3)

$$T_n\left(x_0^-\right)=T_n\left(x_0^+\right)=0.$$

При вычислении $T(x_0)$ и $T_n(x_0)$ целесообразно в общем случае численно решать краевую задачу (1) методом прогонки.

Разбивая отрезок $\left[x^-;x^+\right]$ на N участков длиной $\vartriangle=\left(x^+-x^-\right)/N$ точками $x^i=x^0+(i-1)\vartriangle;\ i=\overline{1,N+1},$ полагая $T_n^i=T_n\left(x^i\right)$ и заменяя производные конечными разностями, при $x^-=x_0-s; \quad x^+=x_0+s; \quad 0\le s\le 2\pi$ имеем [8]

$$\left(T_n^{i+1}-2T_n^i+T_n^{i-1}\right)/\vartriangle^2-A_i\left(T_n^{i+1}-T_n^{i-1}\right)/2\vartriangle+F_i=0, \tag{6}$$

где $i=\overline{2,N}; \quad A_i=g_1\left(x^i\right); \quad F_i=ng_2T_{n-1}^i,$ граничные условия $T_n^1=T_n^{N+1}=0.$

Для системы 1-го порядка ДУ (2), (4) являются точными, для системы 2-го порядка - приближенными за счет приближенного вычисления коэффициентов сноса и диффузии.

Найдем решение ДУ (4). Запишем (4) в форме ДУ 1-го порядка [8]

$$dz/dx + p(x)z = q(x),$$

где $z = dT/dx;\ p(x) = 2a(x)/b(x);\ q(x) = -2/b(x).$

Решением этого ДУ служит

$$z(x)=e^{G_1(x)}\left[C_1+\int_0^x q(u)e^{-rG_1(u)}du\right],$$

где $G_1(x) = -\int_0^x g_1(u)du$. Отсюда $z(0) = dT/dx|_{x=0} = C_1$.

Общее решение ДУ (4) имеет вид

$$T(x) = C_1\int_0^x f(u)du + \int_0^x F(u)du + C_2, \qquad (7)$$

где $f(u) = e^{G_1(u)}$; $F(u) = f(u)\int_0^u q(v)e^{-G_1(v)}dv$. Постоянная C_2 определяется из граничного условия $T(x^-) = 0$:

$$C_2 = C_1\int_{x^-}^0 f(u)du + \int_{x^-}^0 F(u)du.$$

в результате получаем решение ДУ Понтрягина

$$T(x) = \int_{x^-}^x F(u)du + \int_{x^-}^x f(u)du. \qquad (8)$$

Постоянная C_1 находится из второго граничного условия $T(x^+) = 0$:

$$C_1 = -\alpha\int_{x^-}^x F(u)du; \quad \alpha^{-1} = \int_{x^-}^x f(u)du.$$

В результате окончательно находим решение ДУ (4), удовлетворяющее граничным условиям (3)

$$\alpha^{-1}T(x) = \int_{x^-}^x F(u)du\int_{x^-}^{x^+} f(u)du - \int_{x^-}^x f(u)du\int_{x^-}^{x^+} F(u)du.$$

Символическая форма ДУ ФАП имеет вид [6]

$$\dot{x} = \Omega_0 - AKF(p)\left[\sin x + n(t)/A\right],$$

Замечаем, что полоса синхронизации $\Omega = AK$.

Согласно методу Таусворта

$$g_2(x_0) = 4/\left(K^2F^2N_0\right); \quad g_1(x_0) = 4a_T/\left(K^2F^2N_0\right) = e_T g_2(x_0),$$

где $F = F(\infty) = \lim_{s\to\infty} F(s)$; N_0 - односторонний энергетический спектр белого шума $n(t)$; $e_T = E(\dot{x}_0 / x_0)$.

Для системы 1-го порядка

$$g_2 = 4/\left(K^2 N_0\right) = r/(4B); \quad g_1 = -\left[4AK/\left(K^2 N_0\right)\right]\sin x_0 = -r\sin x_0, \qquad (9)$$

где $r = A^2/(N_0 B)$; $B = AK/4 = \Omega/4$.

Пусть фильтр низких частот представляет собой ВПИФ $(c_0 = 0)$, тогда

$$F(s) = (1+\tau_2 s)/(\tau_1 s) = a + 1/\tau_1 s,$$

где $a = \tau_2/\tau_1$; $\tau_1 = \tau_ф$.

Односторонняя шумовая полоса B линеаризованной ФАП имеет вид [8]

$$B = \frac{\Omega}{4}\frac{1+a^2\Omega\tau_ф}{c_0 + a\Omega\tau_ф} = \frac{\Omega}{4}\frac{1+a^2\alpha_0^{-2}}{c_0 + a\alpha_0^{-2}} = \frac{\omega_0}{4}\frac{1+4\xi^2 l^2}{2\xi},$$

где $2\xi = c_0\alpha_0 + a/\alpha_0 = \alpha_0(c_0+\lambda_0)$; $\lambda_0 = a\alpha_0^{-2}$; $l = \lambda_0/(c_0+\lambda_0)$.

Отсюда, если $c_0 = 0 \quad (l=1)$, получаем шумовую полосу ФАП с ВПИФ

$$B = (\omega_0/4)\left(1+4\xi^2\right)/2\xi; \quad 2\xi = a\alpha^{-1} = \varepsilon_0. \qquad (10)$$

При наличии ПИФ $F = a$,

$$g_2 = 4/\left(K^2 F^2 N_0\right) = (\rho/4B)\left[l + 1/\left(4\xi^2 l\right)\right]^2.$$

При $l = 1$ находим коэффициент g_2 для ФАП с ВПИФ

$$g_2 = (\rho/4B)\left(1+1/\varepsilon_0^2\right)^2, \qquad (11)$$

где $\varepsilon_0^2 = 4\xi^2$.

Найдем величину $g_1(x_0)$. Согласно [6]

$$e_T = -AKF\sin(x_0) + B(x_0) = -a\Omega\sin x_0 + B(x_0),$$

где $B(x_0) = \alpha_1 x_0 + \alpha_3 x_0^3 + \ldots.$

Если ограничиться линейным членом разложения, то можно получить выражение [6]

$$\alpha_1 = AKF - d^2(0)/4B = a\Omega - l^2(0)/4B,$$

где находим $d(0) = \lim\limits_{s\to\infty}\left\{s\left(AKF(s)/s\right)/\left[1+AKF(s)/s\right]\right\}.$ Отсюда при $F(s) = \left(1+a\tau_\phi s\right)/\left(1+\tau_\phi s\right)$ находим $d(0) = a\Omega = 2\xi\omega_0 l.$ Тогда

$$\alpha_1 = 2\xi\omega_0 l\left[1-4\xi^2 l(1-l)\right]/\left(1+4\xi^2 l^2\right).$$

Коэффициент

$$g_1 = g_1(x) = A_0\sin x + B_0 x,$$

где $A_0 = \rho\left(l + 1/\left(4\xi^2 l\right)\right);\quad B_0 = \rho\left[1-4\xi^2 l(1-l)\right]/\left(4\xi^2 l\right).$

Если ПИФ вырожденный (l = 1), то

$$g_1(x) = -\rho\left(1+1/\varepsilon_0^2\right)\sin x + \left(\rho/\varepsilon_0^2\right)x = -\rho g_0(x). \qquad (12)$$

С учетом приведенных значений коэффициентов уравнения Понтрягина имеем

$$p(x) = g_1(x);\quad g_1(-x) = g_1(x);\quad q(x) = -g_2 = const.$$

Следовательно, $G_1(x) = -\int\limits_0^x g_1(u)du$ является функцией четной. Отсюда следует, что функция $F(u)$ в (8) и (9) является нечетной функцией. В дальнейшем рассматриваются границы $x^- = -s,\ x^+ = s,$ симметричные относительно начала координат, поэтому постоянная $C_1 = 0.$ В этом частном случае по (9) находим среднее время достижения порога [8]:

$$T(x) = \int\limits_{-s}^{x} F(u)du = \int\limits_{-s}^{x} e^{G_1(u)}\left[\int\limits_0^u q(v)e^{-G_1(v)}dv\right]du.$$

Учтем равенство

$$\int\limits_{-s}^{s} F(u)du = \int\limits_{-s}^{0} F(u)du + \int\limits_0^s F(u)du = 0.$$

Тогда получаем

$$T(x) = -\int\limits_x^s F(u)du = g_2\int\limits_x^s e^{G_1(u)}\left[\int\limits_0^u e^{-G_1(v)}dv\right]du.$$

Полагая $l=1$ и используя выражение (11), (12) для коэффициентов g_1 и g_2, находим среднее время достижения порога в системе 2-го порядка с ВПИФ

$$\gamma_1(x)=4BT_1(x)=\rho\left(1+\frac{1}{\varepsilon_0^2}\right)^2\int_x^s e^{G_1(u)}\left[\int_0^u e^{-G_1(u)}dv\right]du,$$

где $G_1(x)=-\int_0^x p(u)du=\rho\int_0^x g_0(u)du=\rho\left[\left(1+\frac{1}{\varepsilon_0^2}\right)G(x)-\frac{x^2}{2\varepsilon_0^2}\right];$

$$G(x)=\int_0^x \sin u du=1-\cos x.$$

При выполнении условия $C_1=dT_1(x)/dx\big|_{x=0}=0$ получаем

$$\gamma_1(s)=4BT_1(s)=\rho\left(1+\frac{1}{\varepsilon_0^2}\right)^2\int_0^s e^{G_1(u)}\left[\int_0^u e^{-G_1(v)}dv\right]du, \tag{13}$$

При $\varepsilon_0^2\to\infty$ по (13) находится точное значение среднего времени достижения порога в системе 1-го порядка при нулевой начальной расстройке [8, формула (1.85)]. Значение $\gamma_1(s)$ можно найти, используя разностную схему ДУ Понтрягина (6).

Вычисленная таким образом зависимость $\gamma_1(s)$ изображена на рис. 1 а при $l=1,\ \xi=1\ \left(\varepsilon_0^2=4\right)$ и рис. 1 б при отношении помеха/сигнал $\varepsilon_0\to\infty$ и различных значениях ρ. Сравнивая рис. 1 а и рис. 1 б, замечаем, что при больших значениях отношения сигнал/шум (ОСШ) ρ

$\gamma_1(\pi)\approx\gamma_1(2\pi)$ (рис. 1 а), $\gamma_1(\pi)\approx 0{,}5\gamma_1(2\pi)$ (рис. 1 б),

в последнем случае, как и для системы 1-го порядка [8]. На рис. 1 а, б: 1- ρ=8, 2- ρ=4, 3- ρ= 2, 4- ρ=1, 5- ρ=0,5, 6- ρ=0,1; на рис. 1 а: 7 - ρ=20.

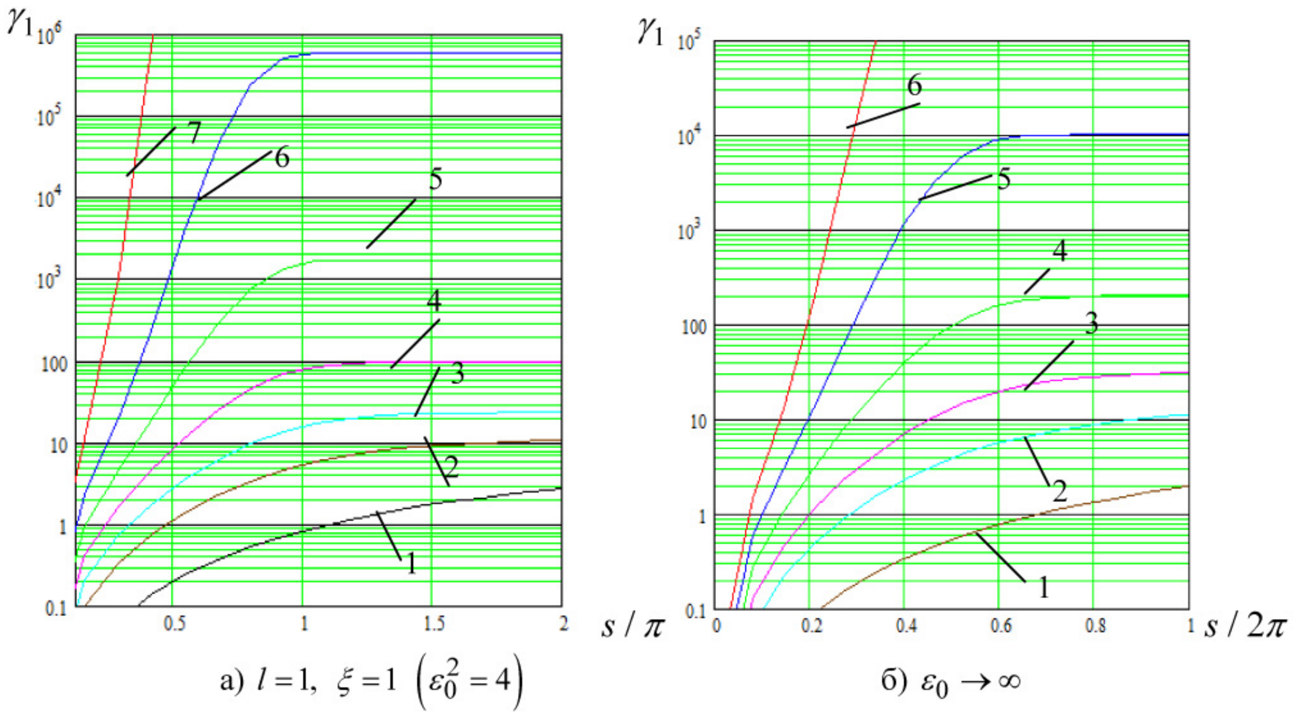

Рис. 1. Среднее время достижения порога в системе 1 порядка при нулевой начальной расстройке

При больших значениях ρ независимо от величины ε_0^2 справедлива приближенная формула для моментов времени $T_n = T_{cn}$ до срыва слежения [8]

$$T_n = nT_1T_{n-1}. \tag{14}$$

Справедливость этой формулы доказана в [8] для ФАП 1-го порядка. С ростом ρ при $\varepsilon_0^2 = const$ значения $\varepsilon_1 = T_c/\sigma_c$, асимметрии Sk_T и эксцесса Ex_T попадают в интервал, определяемый для системы 1-го порядка [8]:

$$1 \le \varepsilon_1 \le \sqrt{1{,}5} \approx 1{,}2247; \quad 1{,}9597 \le Sk_T \le 2; \quad 5{,}8285 \le Ex_T \le 6.$$

При аппроксимации решения уравнения Понтрягина Таусворт получил формулу [6, формула (18)]

$$\gamma_{c2} = 2BT_c = \frac{\hat{\rho}}{2}\frac{\varepsilon_0^2+1}{\varepsilon_0^2+a}\Lambda_0, \tag{15}$$

где

$$\Lambda_0 = D\int_{-2\pi}^{\varphi_0}\int_{y}^{\varphi_0} e(\varphi,y)\,d\varphi dy + (1-D)\int_{\varphi_0}^{2\pi}\int_{\varphi_0}^{y} e(\varphi,y)\,d\varphi dy;$$

$$D=\int_{\varphi_0}^{2\pi} e(\varphi,y)dy \Big/ \int_{-2\pi}^{2\pi} e(0,y)dy;\quad e(\varphi,y)=\exp\left[\hat{\rho}h(\varphi)-\hat{\rho}h(y)\right];$$

$$\hat{\rho}=\rho\left(\varepsilon_0^2+1\right)/\left(\varepsilon_0^2+a\right);\quad \varepsilon_0=a/\alpha;\quad h(x)=ux+\cos x+vx^2/2;$$

$$u=\sin\varphi_0-v\varphi_0;\quad v=\left[(1-a)\cos\varphi_0\right]/\left(1+\varepsilon_0^2\cos\varphi_0\right).$$

При больших α_0 и малых ε_0^2 формула (15) дает большую погрешность.

Асимптотические методы. Для ФАП с ИФ при малой постоянной времени фильтра или, что эквивалентно, при большом значении величины α_0 можно воспользоваться приближенным соотношением

$$\gamma_c=\left(2\pi/\beta_c\right)th\pi v, \tag{16}$$

причем величина β_c может быть вычислена по формуле Журавлева.

В результате получаем

$$\gamma_c=\gamma_{c0}\left(1+\bar{\alpha}_0^2\overline{\cos x}\right), \tag{17}$$

где $\gamma_{c0}=\left(2\pi/\beta_{c0}\right)th\pi v;\quad \overline{\cos x}=\int_{-\pi}^{\pi}\cos xW(x)dx=\pi a_1$ ([8]); *W(x)* - ПРВ системы 1-го порядка.

На рис. 2 зависимость (17) изображена сплошными линиями при α_0 = 2, 5, здесь же крестиками обозначены значения γ_c, вычисленные по формуле (17), когда величина рассчитывалась методом матричной прогонки; штриховыми линиями на рис. 2 изображена зависимость $\gamma_c=\gamma_c(r)$ для системы 1-го порядка [8]

$$\gamma_c=\frac{2\pi}{\beta}\left[I_0^2(r)+2v^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n I_n^2(r)}{n^2+v^2}\right]th\pi v=\frac{2\pi}{\beta}R_\Sigma th\pi v, \tag{18}$$

где $v=\beta r$.

При наличии ПИФ справедлива система стохастических ДУ, из первого уравнения которой при $a\neq 0$ $\alpha_0\to 0$ получаем ДУ

$$dx=(\beta-\sin x)d\tau-\sqrt{2/\rho}d\omega_\tau, \tag{19}$$

т.е. ДУ ФАП 1-го порядка, отличающееся параметром τ и ρ.

При $\alpha_0 \to 0 \quad B \to a\Omega/4; \quad v_0 \to 1; \quad \rho \to 4A^2/N_0 a\Omega = r/a; \quad \tau \to at,$ тогда среднее значение частотного рассогласования

$$\left(\overline{dx/d\tau}\right) = \beta_c / a = \tilde{\beta}_c = \beta - \left(\overline{\sin x}\right)_2,$$

где $\left(\overline{\sin x}\right)_2$ - среднее значение величины $\sin x$ при усреднении с весом ПРВ *$W_1(x)$*, которая отличается от *W(x)* системы 1-го порядка значением ρ: *$W_1(x)$* получается из *W(x)* заменой *r* на $\rho = r/a$ и $v = \rho\beta$. Следовательно, все формулы, справедливые для системы 1-го порядка, оказываются асимптотическими для системы 2-го порядка с ПИФ при $\alpha_0 \to 0$. Формула для среднего времени до срыва слежения принимает вид

$$\tilde{\gamma}_c = 4BT_c = a\Omega T_c = \frac{2\pi}{\beta}\tilde{R}_\Sigma th\pi\rho\beta,$$

где $\tilde{R}_\Sigma = I_0^2(\rho) + 2(\rho\beta)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n I_n^2(\rho)}{n^2 + (\rho\beta)^2}.$

Эта зависимость в форме $\tilde{\gamma}_c = 4BT_c = f(\rho, \beta)$ $(B = a\Omega/4)$ изображена на рис. 2.

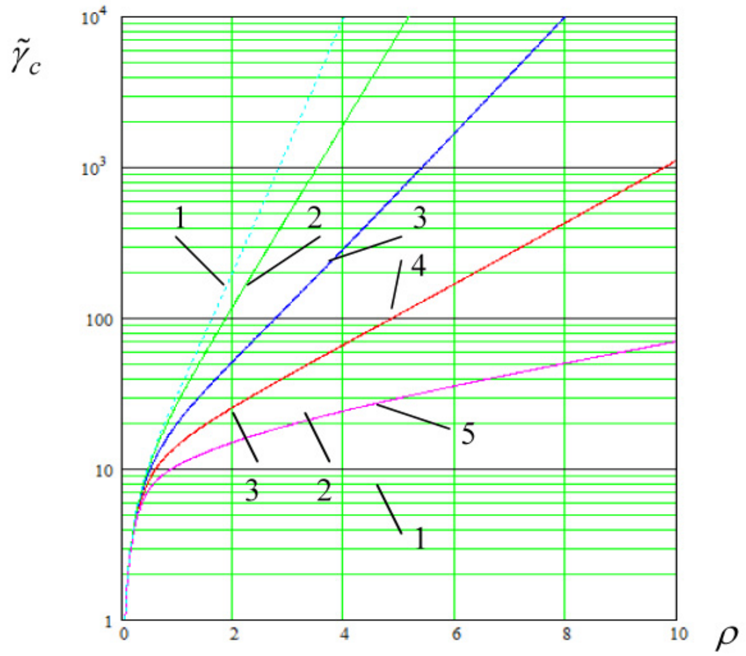

Рис. 2. Зависимость среднего времени от ОСШ для дискретной ФАП 2-го порядка с невырожденным ФАП асимптотическим методом

1- $\varepsilon_0 = 0$; 2- $\varepsilon_0 = 0{,}2$; 3- $\varepsilon_0 = 0{,}4$; 4- $\varepsilon_0 = 0{,}6$; 5- $\varepsilon_0 = 0{,}8$

По (13) можно получить асимптотические формулы, справедливые при малых и больших значениях ρ.

При $\rho \ll 1$, используя приближенные равенства $e^{\pm G_1(x)} \approx 1$, находим

$$\gamma_1(s) = 4BT_c = \rho\left(1 + 1/\varepsilon_0^2\right)^2 s^2 / 2. \tag{20}$$

При $\varepsilon_0^2 \to \infty$ $\gamma_1(s) \to \gamma_1^1(s)$ для системы 1-го порядка [8]; $\gamma_1^1(s) = \rho s^2 / 2$. Тогда приближенная формула для среднего времени до срыва слежения принимает вид

$$\gamma_1 = 4BT_c = \gamma_1(2\pi) = 2\pi^2\rho\left(1 + 1/\varepsilon_0^2\right)^2. \tag{21}$$

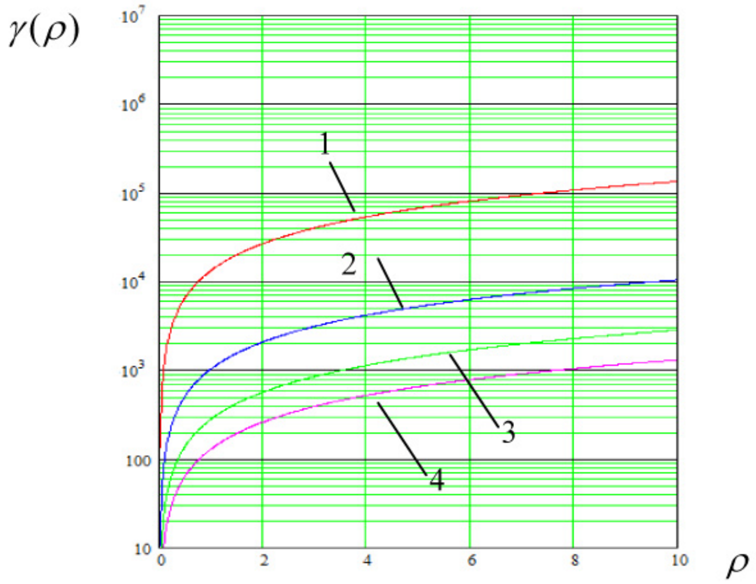

Рис. 3. Зависимость среднего времени от ОСШ для дискретной ФАП 1-го порядка асимптотическим методом: 1- $\varepsilon_0 = 0{,}2$; 2- $\varepsilon_0 = 0{,}4$; 3- $\varepsilon_0 = 0{,}6$; 4- $\varepsilon_0 = 0{,}8$.

Значения γ_c, рассчитанные по этой формуле, при ρ=0,1 и соответственно ε_0^2 = 2; 4; 10; 1000 равны 4,4413 (3,3759); 3,0842 (2,6731); 2.3884 (2,2575); 1,9778 (1,9865) (в скобках указаны точные значения). Таким образом, точность приближенной формулы растет с - ростом ε_0^2.

Пусть $\rho \gg 1$, тогда подынтегральные функции в (13) имеют острые максимумы: во внутреннем интеграле в точке x_{01}, во внешнем – в точке $x_{02} \approx s = \pi$, причем x_{01} и x_{02} находятся из уравнения $g_1(x) = 0$ или

$$\left(1+1/\varepsilon_0^2\right)\sin x - x/\varepsilon_0^2 = 0.$$

Следовательно, x_{01}=0, а x_{02} можно вычислить, используя приближенное равенство $\sin x \approx \pi - x$,

$$x_{02} \approx \left[\left(1+1/\varepsilon_0^2\right)/\left(1+2/\varepsilon_0^2\right)\right]\pi < \pi.$$

Имея в виду острый максимум в точке $x = x_{01} = 0$, воспользуемся отрезком ряда

$$G_1(x) \approx G_1(0) + G'(0)x + G''(0)x^2/2 = \rho g_0' x^2/2 = \rho x^2/2,$$

тогда приближенно можно вычислить внутренний интеграл в (13)

$$\int_0^u e^{-G_1(v)}dv \approx \frac{1}{2}\int_{-u}^{u} e^{-v^2/2D}du = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi D} = \sqrt{\pi/2\rho}.$$

Остается вычислить внешний интеграл в (13), используя разложение во втором остром максимуме

$$G_1(x) \approx G_1(x_{02}) + G'(x_{02})(x - x_{02}) + G''(x_{02})(x - x_{02})^2/2 =$$

$$= G_1(x_{02}) - \rho\left|g_0'(x_{02})\right|(x - x_{02})^2/2 = G_1(x_{02}) - (x - x_{02})^2/2D_1;$$

$$D_1 = 1/\rho\left|g_0'(x_{02})\right|; \quad \left|g_0'(x_{02})\right| = \left(1+1/\varepsilon_0^2\right)\left|\cos x_{02}\right| + 1/\varepsilon_0^2.$$

В результате находим приближенное значение внешнего интеграла (13)

$$\int_0^s e^{G_1(u)}du \approx \int_0^{x_{02}} e^{G_1(u)}du = e^{G_1(x_{02})}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(x-x_{02})^2/2D_1}dx \approx$$

$$\approx e^{G_1(x_{02})}\sqrt{\frac{\pi}{2\rho\left|g_0(x_{02})\right|}}.$$

Таким образом, приближенная формула для среднего времени до срыва слежения для ФАП с ВПИФ с учетом (13) и равенства $\gamma_c = \gamma_1(2\pi) \approx 2\gamma_1(x_{02})$ принимает вид

$$\gamma_c = 4BT_c = \pi\left[\left(1+1/\varepsilon_0^2\right)^2/\sqrt{\left|g_0'(x_{02})\right|}\right]e^{G_1(x_{02})}, \tag{22}$$

где $G_1(x_{02}) = \rho\left[\left(1+1/\varepsilon_0^2\right)G_1(x_{02}) - x_{02}^2/2\varepsilon_0^2\right].$

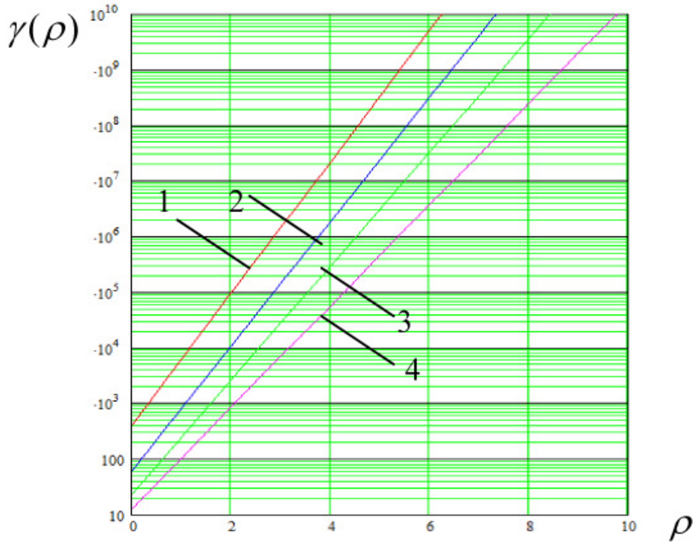

Рис. 4 Зависимость среднего времени от ОСШ для дискретной ФАП с ВПИФ асимптотическим методом: 1- $\varepsilon_0 = 0.2$; 2- $\varepsilon_0 = 0.4$; 3- $\varepsilon_0 = 0.6$; 4- $\varepsilon_0 = 0.8$.

Отсюда при $\varepsilon_0^2 \to \infty$ следует известное приближенное равенство (14).

Запишем полученное соотношение в виде произведения

$$\gamma_c = \Re_s \hat{\gamma}_c, \tag{23}$$

где $\Re_s = \left[\left(1 + 1/\varepsilon_0^2\right)^2 / \sqrt{\left|g_0'\left(x_{02}\right)\right|} \right] e^{G_1(x_{02}) - 2\rho}$; $\hat{\gamma}_c = \pi e^{2\rho}$.

Сравним результаты вычислений γ_c по формуле (4.23) и точные данные (указаны в скобках). При ε_0^2=2; 4; 10 соответственно получаем: при $\rho = 2$ – 47,2 (74,2); 70,8 (37,9); 110 (138); при $\rho = 5$ - $1{,}59 \cdot 10^3$ ($2{,}28 \cdot 10^3$); $5{,}88 \cdot 10^3$ ($7{,}32 \cdot 10^3$); $2{,}08 \cdot 10^4$ ($2{,}33 \cdot 10^4$). Как видно, относительная погрешность превышает 36% и 30% соответственно при $\rho = 2$, $\rho = 5$ и уменьшается с ростом ε_0^2. Для сравнения отметим, что погрешность (4.14) составляет 21 %, 17%, 5% соответственно при $\rho = 1,\ 2$ и 5.

В качестве оценки времени до срыва слежения может быть использована формула

$$\gamma_c = 1/\left(\gamma_n^+ + \gamma_n^-\right),$$

где $\gamma_n^\pm$ - частота достижения уровня $\pm\pi$ фазовым случайным процессом.

При $\beta = 0$ получаем

$$\gamma_c = \hat{\gamma}_c / \alpha_0; \quad \hat{\gamma}_c = \pi e^{2r}. \tag{24}$$

Это же равенство находится по формуле Крамерса при $\alpha_0 \to 0$ и $\beta = 0$.

3. Срыв слежения в системе с интегрирующим фильтром

На рис. 5 изображены графики зависимости среднего времени до срыва слежения от параметров системы при r=1; 2 и $\beta = 0$. Кривые 1 и 2 соответствуют первой формуле Крамерса.

Метод Крамерса (малая расстройка β и значительная величина ОСШ *r*). При вычислении среднего времени в системе с ИФ воспользуемся формулой Крамерса. При $g(x) = \sin x$ формула Крамерса для нормированной величины среднего времени $\hat{\gamma}_c = \Omega \hat{T}_c$ принимает вид

$$\hat{\gamma}_c = \Omega \hat{T}_c = K_\gamma \gamma_{c0}, \tag{25}$$

где $$K_\gamma = \alpha_0^{-2}\left[\sqrt{\alpha_0^4/4 + \alpha_0^2\sqrt{1-\beta^2}} + \alpha_0^2/2\right];$$

$$\gamma_{c0} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\beta^2}\, ch\pi v}\exp\left[2r\left(\sqrt{1-\beta^2} + \beta \arcsin\beta\right)\right]; \quad v = \beta r \tag{26}$$

Кривые 3 и 4 соответствуют второй формуле Крамерса

$$\gamma_c = \gamma_{c\kappa} = K_{\gamma 1}\gamma_{c0}, \tag{27}$$

где $K_{\gamma 1} = 1/4r\alpha_0^2$; $\gamma_{c0} = \pi e^{2r}$.

В крайних точках параметра α_0 численным методом получены следующие результаты: при *r*=1 $\gamma_c = 44$, если $\alpha_0 = 1$, и $\gamma_c = 671$, если $\alpha_0 = 0{,}1$; при *r*=2 $\gamma_c = 272$, если $\alpha_0 = 1$, и $\gamma_c = 2613$, если $\alpha_0 = 0{,}1$.

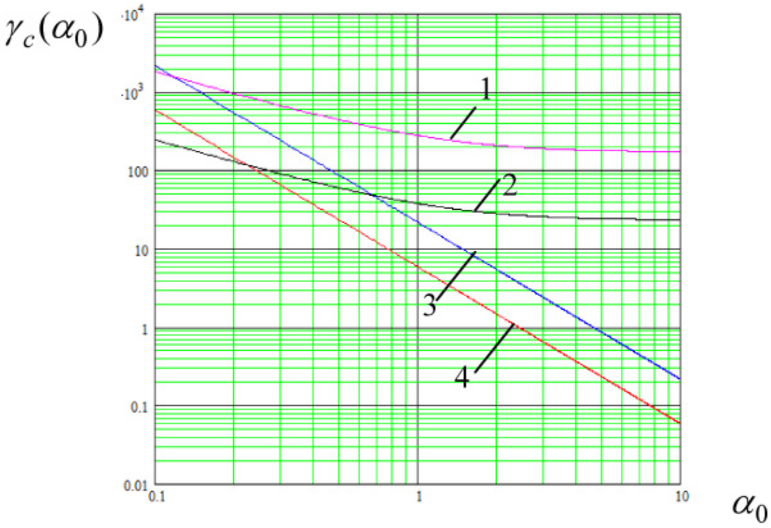

Рис. 5. Зависимости среднего времени от срыва слежения от параметров системы численным методом при $\beta = 0$, 1, 2 – соответствует 1-ой формуле Крамерса, 3, 4 – 2-ой формуле Крамерса; 1, 3 - r=1; 2, 4 - r=2.

На рис. 5 замечаем, что при малых α_0 результаты ближе ко 2-ой формуле Крамерса, а при умеренных α_0 результаты численного метода совпадают с данными, полученными по 1-ой формуле Крамерса, и при $\alpha_0 \to \infty$ среднее время до срыва стремится к асимптоте, характеризующей систему 1-го порядка. Кроме того, замечаем, что с уменьшением α_0 сближаются средние времена достижения порогов π и 2π.

Заключение

Таким образом, в результате проведенного анализа были получены сравнительные характеристики среднего времени до срыва синхронизации приближенными методами в зависимости от значений отношения сигнал/шум и отношения помеха/сигнал. Представлены полученные результаты для ФАП 1-го и 2-го порядков. Получены характеристики для ФАП с ПИФ и ВПИФ.

Список литературы

1. Chie C.M. Mathematical analogies between first-order digital and analog phase-locked loops // IEEE Trans. 1978. Vol. COM-26, № 6. P. 860-865. DOI: 10.1109/TCOM.1978.1094148
2. Weinberg A., Liu B. Discrete time analysis of nonuniform sampling first- and second- order phase-locked loops // IEEE Trans. 1972. Vol. COM-22, № 2. P. 123-137. DOI: 10.1109/TCOM.1974.1092168

3. Битюцкий В.И., Сердюков П.Н. Оценка времени до срыва синхронизма в импульсной системе ФАПЧ // Радиотехника. 1973. № 8. С. 95-97.
4. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977. 525 с.
5. Шахтарин Б.И. Статистическая динамика систем синхронизации. М.: Радио и связь, 1998. 488 с.
6. Tausworthe R.C. Cycle slipping in phase-locked loops // IEEE Trans. on Communications. 1967. Vol. COM-15, № 3. P. 417-421.
7. Schuchman L. Time to cycle slip in first and second order phase locked loop // Inter. Comm. Conf. San-Francisco. 1970. P. 341-349.
8. Шахтарин Б.И. Анализ систем синхронизации при наличии помех. М.: ИПРЖР, 1996. 252 с.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

Cycle skip in discrete phase-lock system

10, October 2012

DOI: 10.7463/1012.0478399

Kovalchuk A.A.

Russia, Bauman Moscow State Technical University

nastia_kov-k@rambler.ru

The cycle skip phenomenon can have a significant impact on performance of phase-lock systems, it results in a sharp increase in frequency errors. The author analyzes the mean time till the skip of discrete phase-lock systems when interference in several ways is present. To study phase-lock systems the approximate Kramers formula and Zhuravlev formula for phase-lock systems with the integrating filter. The author compares characteristics of the average time for phase-lock systems of the 1st and 2nd order.

Publications with keywords:average time, tracking failure, approximate methods, the Kramers formula, the discrete system

Publications with words:average time, tracking failure, approximate methods, the Kramers formula, the discrete system

References

1. Chie C.M. Mathematical analogies between first-order digital and analog phase-locked loops. *IEEE Trans. on Communications*, 1978, vol. COM-26, no. 6, pp. 860-865. DOI: 10.1109/TCOM.1978.1094148

2. Weinberg A., Liu B. Discrete time analysis of nonuniform sampling first- and second- order phase-locked loops. *IEEE Trans. on Communications*, 1974, vol. COM-22, no. 2, pp. 123-137. DOI: 10.1109/TCOM.1974.1092168

3. Bitiutskii V.I., Serdiukov P.N. Otsenka vremeni do sryva sinkhronizma v impul'snoi sisteme FAPCh [Estimate of the time to stalling of synchronism in pulsed PLL]. *Radiotekhnika*, 1973, no. 8, pp. 95-97.

4. Tikhonov V.I., Mironov M.A. *Markovskie protsessy* [Markov processes]. Moscow, Sovetskoe radio, 1977. 525 p.

5. Shakhtarin B.I. *Statisticheskaia dinamika system sinkhronizatsii* [Statistical dynamics of the systems of synchronization]. Moscow, Radio i sviaz', 1998. 488 p.

6. Tausworthe R.C. Cycle slipping in phase-locked loops. *IEEE Trans. on Communications*, 1967, vol. COM-15, no. 3, pp. 417-421.

7. Schuchman L. Time to cycle slip in first and second order phase locked loop. *Inter. Comm. Conf. San-Francisco*, 1970, pp. 341-349.

8. Shakhtarin B.I. *Analiz sistem sinkhronizatsii pri nalichii pomekh* [Analysis of the systems of synchronization at presence of noise]. Moscow, IPRZhR Publ., 1996. 252 p.