НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

Управляемость регулярных систем квазиканонического вида с двумерной нулевой динамикой и скалярным управлением

10, октябрь 2012

DOI: 10.7463/1012.0465329

Фетисов Д. А.

УДК 519.71

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

dfetisov@yandex.ru

1. Введение

Исследование управляемости нелинейных систем составляет значительный раздел теории управления. Большая часть работ посвящена изучению свойств локальной управляемости. Так, установлены условия, при которых все траектории системы, выходящие из фиксированной точки, заполняют полную окрестность данной точки, не покидая этой окрестности. Известен принцип линеаризации [2]: аффинная система локально управляема в окрестности точки, в которой управляемо линейное приближение этой системы. Для случаев, когда по линейному приближению системы о локальной управляемости судить нельзя, получены соответствующие условия высших порядков (см., напр., [3]). Тем не менее представляется интересным получить условия управляемости нелинейной системы на всем пространстве состояний. Один из подходов состоит в преобразовании нелинейной системы к тому или иному эквивалентному виду, для которого задача решается известными методами. В монографии [1] для неавтономных систем предложен способ приведения системы к треугольной форме, дающий возможность для определенного класса систем получить достаточные условия управляемости.

В данной работе рассматриваются аффинные системы со скалярным управлением. Известно [4, 5, 6], что если аффинная система эквивалентна на всем пространстве состояний регулярной системе канонического вида, то эта аффинная система управляема. В статьях [7, 8] сделана попытка расширить класс систем, сравнение с которыми позволяет судить об управляемости. Это сделано за счет введения в рассмотрение систем квазиканонического вида. Получены достаточные условия управляемости для регулярных систем квазиканоническго вида с одномерной нулевой динамикой. В данной работе доказывается условие управляемости для регулярных систем квазиканонияеского вида с двумерной нулевой динамикой. Одновременно предложен способ решения терминальных задач для таких систем.

2. Постановка задачи

Рассмотрим аффинную систему со скалярным управлением

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))^{\mathrm{T}}$; $G(x) = (G_1(x), \ldots, G_n(x))^{\mathrm{T}}$; $F_i(x), G_i(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $i = \overline{1, n}$, и терминальную задачу для нее, т.е. задачу нахождения такого управления $u = u(t) \in C[0, t_*]$, которое переводит систему (1) из начального состояния

$$x(0) = x_0 \tag{2}$$

в конечное состояние

$$x(t_*) = x_*. \tag{3}$$

Будем предполагать, что существует диффеоморфизм $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, который преобразует систему (1) к квазиканоническому виду

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = z_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{z}_{n-2} = f(z,\eta) + g(z,\eta)u, \\ \dot{\eta}_1 = q_1(z,\eta), \\ \dot{\eta}_2 = q_2(z,\eta), \end{cases} \tag{4}$$

где $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-2})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-2}$; $\eta = (\eta_1, \eta_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$; $f(z,\eta), g(z,\eta) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$; $g(z,\eta)$ не обращается в нуль в $\mathbb{R}^n$.

Подсистему

$$\dot{\eta}_1 = q_1(z,\eta), \quad \dot{\eta}_2 = q_2(z,\eta)$$

системы (4), образованную последними двумя уравнениями, будем называть системой нулевой динамики.

Заметим, что управление $u = u(t) \in C[0, t_*]$, переводящее систему (4) за тот же интервал времени $[0, t_*]$ из начального состояния

$$\Phi(x_0) = (z_{10}, z_{20}, \ldots, z_{n-2,0}, \eta_{10}, \eta_{20})^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

в конечное состояние

$$\Phi(x_*) = (z_{1*}, z_{2*}, \ldots, z_{n-2,*}, \eta_{1*}, \eta_{2*})^{\mathrm{T}}, \tag{6}$$

является одновременно и решением исходной задачи (2), (3) для системы (1).

Установим условия, которым должны удовлетворять функции $q_1(z,\eta)$, $q_2(z,\eta)$, чтобы для любого начального состояния (5), любого конечного состояния (6) и любого интервала времени $[0, t_*]$ терминальная задача (5), (6) для системы (4) имела решение. Полученные условия будут являться условиями управляемости системы (4) в $\mathbb{R}^n$ за любое конечное время.

3. Существование решений терминальных задач

В работе [6] получено необходимое и достаточное условие существования решения терминальной задачи для регулярной системы квазиканонического вида с одномерной нулевой динамикой. Непосредственным обобщением этого условия для систем с двумерной нулевой динамикой служит следующая теорема.

Теорема 1. Для того чтобы существовало управление $u = u(t) \in C[0, t_*]$, являющееся решением терминальной задачи (5), (6) для системы (4), необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $B(t) \in C^{n-3}([0, t_*])$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} &B(0) = z_{10}, \quad \dot{B}(0) = z_{20}, \quad \ldots, \quad B^{(n-3)}(0) = z_{n-2,0}, \\ &B(t_*) = z_{1*}, \quad \dot{B}(t_*) = z_{2*}, \quad \ldots, \quad B^{(n-2)}(t_*) = z_{n-2,*} \end{aligned} \tag{7}$$

и такая, что задача Коши

$$\begin{aligned} &\dot{\eta}_1 = q_1(\overline{B}(t), \eta), \quad \dot{\eta}_2 = q_2(\overline{B}(t), \eta), \\ &\eta_1(0) = \eta_{10}, \quad \eta_2(0) = \eta_{20}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\overline{B}(t) = \bigl(B(t),\ \dot{B}(t),\ \ldots,\ B^{(n-2)}(t)\bigr)^{\mathrm{T}}$, имеет решение $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$, определенное при $t \in [0,\ t_*]$ и удовлетворяющее условиям

$$\eta_1(t_*) = \eta_{1*} \quad \eta_2(t_*) = \eta_{2*}. \tag{9}$$

Используя теорему 1, покажем, как можно найти решение терминальной задачи (5), (6) для системы (4).

Будем искать функцию $B(t)$ в виде

$$B(t) = b(t) + c_1\, d_1(t) + c_2\, d_2(t), \tag{10}$$

где функция $b(t) \in C^{n-2}([0, t_*])$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &b(0) = z_{10}, \quad \dot{b}(0) = z_{20}, \quad \ldots, \quad b^{(n-3)}(0) = z_{n-2,0}, \\ &b(t_*) = z_{1*}, \quad \dot{b}(t_*) = z_{2*}, \quad \ldots, \quad b^{(n-3)}(t_*) = z_{n-2,*}, \end{aligned} \tag{11}$$

функции $d_1(t)$, $d_2(t)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &d_i(0) = 0, \quad \dot{d}_i(0) = 0, \quad \ldots, \quad d_i^{(n-3)}(0) = 0, \\ &d_i(t_*) = 0, \quad \dot{d}_i(t_*) = 0, \quad \ldots, \quad d_i^{(n-3)}(t_*) = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

а c_1, c_2 — пока не известные константы.

В качестве функции $b(t)$ можно взять интерполяционный многочлен степени $2n-5$, в качестве функций $d_1(t)$, $d_2(t)$ — два любых многочлена, для которых выполняются соотношения (12), например,

$$d_1(t) = t^{n-2}(t_* - t)^{n-2}, \qquad d_2(t) = t^{n-1}(t_* - t)^{n-1}. \tag{13}$$

При любых значениях c_1, c_2 функция $B(t)$ удовлетворяет условиям (7). Обозначим

$$\overline{b}(t) = \big(b(t),\ \dot{b}(t),\ \ldots, b^{(n-3)}(t)\big)^{\mathrm{T}}, \quad \overline{d}_i(t) = \big(d_i(t),\ \dot{d}_i(t),\ \ldots,\ d_i^{(n-3)}(t)\big)^{\mathrm{T}},\ \ i = 1,\ 2,$$

так что $\overline{B}(t) = \overline{b}(t) + c_1\,\overline{d}_1(t) + c_2\,\overline{d}_2(t)$. Тогда задача Коши (8) с учетом условия (9) преобразуется к граничной задаче

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = q_1(\overline{b}(t) + c_1\,\overline{d}_1(t) + c_2\,\overline{d}_2(t), \eta), \\ \dot{\eta}_2 = q_2(\overline{b}(t) + c_1\,\overline{d}_1(t) + c_2\,\overline{d}_2(t), \eta), \\ \eta_1(0) = \eta_{10}, \quad \eta_2(0) = \eta_{20}, \quad \eta_1(t_*) = \eta_{1*}, \quad \eta_2(t_*) = \eta_{2*}. \end{cases} \tag{14}$$

Если удастся найти значения $c_1 = c_{1*}$, $c_2 = c_{2*}$, для которых существует решение $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ граничной задачи (14), получим, что функция $B_*(t) = b(t)+c_{1*}\,d_1(t)+c_{2*}\,d_2(t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 и, следовательно, терминальная задача (5), (6) для системы (4) имеет решение.

4. Условие управляемости

Далее будем считать, что в системе (4) функции $q_i(z, \eta)$, $i = 1, 2$, представимы в виде произведения функции, зависящей от z, и функции, зависящей от η_i:

$$q_i(z, \eta) = Q_i(z)\,R_i(\eta_i), \quad i = 1,\ 2,$$

причем $R_i(\eta_i)$ не обращаются в нуль в $\mathbb{R}$. Такая система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = z_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{z}_{n-1} = f(z, \eta) + g(z, \eta)u, \\ \dot{\eta}_1 = Q_1(z)\,R_1(\eta_1), \\ \dot{\eta}_2 = Q_2(z)\,R_2(\eta_2). \end{cases} \tag{15}$$

Для системы (15) граничная задача (14) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = Q_1\big(\overline{b}(t) + c_1\,\overline{d}_1(t) + c_2\,\overline{d}_2(t)\big)\,R_1(\eta_1), \\ \dot{\eta}_2 = Q_2\big(\overline{b}(t) + c_1\,\overline{d}_1(t) + c_2\,\overline{d}_2(t)\big)\,R_2(\eta_2), \\ \eta_1(0) = \eta_{10}, \quad \eta_2(0) = \eta_{20}, \quad \eta_1(t_*) = \eta_{1*}, \quad \eta_2(t_*) = \eta_{2*}. \end{cases} \tag{16}$$

Интегрируя эти уравнения с разделяющимися переменными на отрезке $[0,\ t_*]$ и учитывая начальные и конечные значения переменных η_1, η_2, получим следующую систему уравнений относительно c_1, c_2:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\eta_{10}}^{\eta_{1*}} \frac{d\eta_1}{R_1(\eta_1)} &= \int\limits_0^{t_*} Q_1(\overline{b}(t) + c_1\,\overline{d}_1(t) + c_2\,\overline{d}_2(t))\,dt, \\ \int\limits_{\eta_{20}}^{\eta_{2*}} \frac{d\eta_2}{R_2(\eta_2)} &= \int\limits_0^{t_*} Q_2(\overline{b}(t) + c_1\,\overline{d}_1(t) + c_2\,\overline{d}_2(t))\,dt. \end{aligned} \tag{17}$$

Пусть эта система имеет решение $c_1 = c_{1*}$, $c_2 = c_{2*}$. Тогда граничная задача (16) будет иметь решение в том случае, если каждое из уравнений

$$\int\limits_{\eta_{i0}}^{\eta_i} \frac{d\eta_i}{R_i(\eta_i)} = \int\limits_0^t Q_i(\overline{b}(t) + c_{1*}\,\overline{d}_1(t) + c_{2*}\,\overline{d}_2(t))\,dt, \quad i = 1,\ 2, \tag{18}$$

при всех $t \in [0,\ t_*]$ разрешимо относительно η_i.

Таким образом, для существования решения терминальной задачи для системы (15) достаточно выполнения двух условий:

1) существования решения $c_1 = c_{1*}$, $c_2 = c_{2*}$ системы уравнений (17);

2) разрешимости каждого из уравнений (18) относительно η_i при всех $t \in [0, t_*]$.

Рассмотрим систему (15), в которой функции $Q_1(z)$ и $Q_2(z)$ являются многочленами нечетных степеней $2l_1 + 1$ и $2l_2 + 1$, $l_1 \neq l_2$:

$$Q_1(z) = \sum_{\substack{i_1,\,\dots,\,i_{n-2}:\\ i_1+\ldots+i_{n-2}\leqslant 2l_1+1}} a_{i_1,\ldots,i_{n-2}}\, z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_{n-2}^{i_{n-2}}, \tag{19}$$

$$Q_2(z) = \sum_{\substack{i_1,\,\dots,\,i_{n-2}:\\ i_1+\ldots+i_{n-2}\leqslant 2l_2+1}} b_{i_1,\ldots,i_{n-2}}\, z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_{n-2}^{i_{n-2}}. \tag{20}$$

Будем предполагать, что слагаемые старшей степени в каждом из многочленов имеют вид

$$z_1^{2l_1+1} + \sum_{\substack{i_1,\,\dots,\,i_{n-2}:\\ i_1+\ldots+i_{n-2}=2l_1+1}} a_{i_1,\ldots,i_{n-2}}\, z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_{n-2}^{i_{n-2}}, \tag{21}$$

$$z_1^{2l_2+1} + \sum_{\substack{i_1,\,\dots,\,i_{n-2}:\\ i_1+\ldots+i_{n-2}=2l_2+1}} b_{i_1,\ldots,i_{n-2}}\, z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_{n-2}^{i_{n-2}}, \tag{22}$$

причем в этих суммах, за исключением $z_1^{2l_1+1}$ в первом многочлене и $z_1^{2l_2+1}$ во втором, присутствуют лишь слагаемые, в которых сумма показателей степеней переменных с четными индексами нечетна, т.е.

$$a_{i_1,\ldots,i_{n-2}} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad i_2 + i_4 + i_6 + \ldots = 2k_1 + 1, \tag{23}$$

$$b_{i_1,\ldots,i_{n-2}} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad i_2 + i_4 + i_6 + \ldots = 2k_2 + 1. \tag{24}$$

Теорема 2. Пусть в системе (15) функции $Q_1(z)$, $Q_2(z)$ являются многочленами степеней $2l_1 + 1$, $2l_2 + 1$, $l_1 \neq l_2$, причем слагаемые старшей степени в этих многочленах имеют вид (21), (22) и удовлетворяют условиям (23), (24). Пусть также функции $R_i(\eta_i)$, $i = 1, 2$, положительны и ограничены в $\mathbb{R}$. Тогда эта система управляема в $\mathbb{R}^n$ за любой интервал времени $[0, t_*]$.

◀ Покажем, что при выполнении условий теоремы терминальная задача для системы (15) имеет решение для любых начальных и конечных значений переменных z, η, а также для любого интервала времени $[0, t_*]$. Для этого достаточно показать, что система уравнений (17) имеет решение $c_1 = c_{1*}$, $c_2 = c_{2*}$ и каждое из уравнений (18) разрешимо относительно η_i, $i = 1, 2$.

Зафиксируем z_0, η_0, z_*, η_* и интервал $[0, t_*]$. Рассмотрим систему (17). Введем следующие обозначения:

$$v_1(c_1, c_2) = \int\limits_0^{t_*} Q_1(\bar{b}(t) + c_1\,\bar{d}_1(t) + c_2\,\bar{d}_2(t))dt - \int\limits_{\eta_{10}}^{\eta_{1*}} \frac{d\eta_1}{R_1(\eta_1)},$$

$$v_2(c_1, c_2) = \int\limits_0^{t_*} Q_2(\bar{b}(t) + c_1\,\bar{d}_1(t) + c_2\,\bar{d}_2(t))dt - \int\limits_{\eta_{20}}^{\eta_{2*}} \frac{d\eta_2}{R_2(\eta_2)}.$$

Тогда система (17) примет вид

$$v_1(c_1, c_2) = 0, \quad v_2(c_1, c_2) = 0. \tag{25}$$

Рассмотрим первое уравнение этой системы: $v_1(c_1, c_2) = 0$. Это уравнение задает некоторую кривую на плоскости c_1, c_2. Покажем, что одна из ветвей этой кривой имеет асимптоту и найдем ее уравнение.

В условиях теоремы функция $v_1(c_1, c_2)$ является многочленом переменных c_1, c_2 степени $2l_1 + 1$. Это дает возможность переписать уравнение в виде

$$v_1(c_1, c_2) \equiv V_{2l_1+1}(c_1, c_2) + V_{2l_1}(c_1, c_2) + \ldots + V_0 = 0, \tag{26}$$

где $V_{2l_1+1}(c_1, c_2)$ — слагаемые степени $2l_1 + 1$; $V_{2l_1}(c_1, c_2)$ — слагаемые степени $2l_1$ и т.д.; V_0 — свободный член.

Вынесем в каждой из функций $V_j(c_1, c_2)$ множитель c_1^j. При этом уравнение (26) примет следующий вид:

$$c_1^{2l_1+1} V_{2l_1+1}\Big(1, \frac{c_2}{c_1}\Big) + c_1^{2l_1} V_{2l_1}\Big(1, \frac{c_2}{c_1}\Big) + \ldots + V_0 = 0.$$

Разделив обе части уравнения на $c_1^{2l_1+1}$, получим

$$V_{2l_1+1}\Big(1, \frac{c_2}{c_1}\Big) + \frac{1}{c_1} V_{2l_1}\Big(1, \frac{c_2}{c_1}\Big) + \ldots + \frac{1}{c_1^{2l_1+1}} V_0 = 0.$$

Введем обозначения $\xi = 1/c_1$, $\zeta = c_2/c_1$. Тогда уравнение запишется в виде

$$\varphi(\xi, \zeta) \equiv V_{2l_1+1}(1, \zeta) + \xi V_{2l_1}(1, \zeta) + \ldots + \xi^{2l_1+1} V_0 = 0.$$

Рассмотрим уравнение

$$V_{2l_1+1}(1, \zeta) = 0. \tag{27}$$

Определим вид функции $V_{2l_1+1}(1, \zeta)$ в условиях теоремы. Для этого выделим слагаемые степени $2l_1 + 1$ в исходном многочлене:

$$Q_1(\bar{b}(t) + c_1\,\bar{d}_1(t) + c_2\,\bar{d}_2(t)) = (c_1 d_1(t) + c_2 d_2(t))^{2l_1+1} +$$
$$+ \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{n-2}:\\ i_1+\ldots+i_{n-2}=2l_1+1}} a_{i_1,\ldots,i_{n-2}} (c_1 d_1(t) + c_2 d_2(t))^{i_1} \ldots (c_1 d_1^{(n-3)}(t) + c_2 d_2^{(n-3)}(t))^{i_{n-2}} + \tilde{\gamma}(c_1, c_2, t),$$

где $\tilde{\gamma}(c_1, c_2, t)$ содержит слагаемые младших степеней по c_1, c_2. Следовательно, сумма членов степени $2l_1 + 1$ в многочлене $v_1(c_1, c_2)$ имеет вид

$$\int\limits_0^{t_*} (c_1 d_1(t) + c_2 d_2(t))^{2l_1+1} dt +$$
$$+ \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_{n-2}: \\ i_1+\ldots+i_{n-2}=2l_1+1}} a_{i_1,\ldots,i_{n-2}} \int\limits_0^{t_*} (c_1 d_1(t) + c_2 d_2(t))^{i_1} \ldots (c_1 d_1^{(n-3)}(t) + c_2 d_2^{(n-3)}(t))^{i_{n-2}} dt.$$

Вычислим интеграл

$$\int\limits_0^{t_*} (c_1 d_1(t) + c_2 d_2(t))^{i_1} \ldots (c_1 d_1^{(n-3)}(t) + c_2 d_2^{(n-3)}(t))^{i_{n-2}} dt \tag{28}$$

для произвольных значений c_1, c_2 в предположении, что выполнено условие (23). Сделаем в нем замену переменной $\tau = t - t_*/2$. Тогда $t = \tau + t_*/2$, $\tau \in [-t_*/2,\ t_*/2]$ и функции $d_1(t)$, $d_2(t)$ преобразуются к виду

$$\tilde{d}_1(\tau) = \left(\frac{t_*^2}{4} - \tau^2\right)^{n-2}, \quad \tilde{d}_2(\tau) = \left(\frac{t_*^2}{4} - \tau^2\right)^{n-1}.$$

Эти функции четные. Их производные нечетных порядков нечетны, производные четных порядков четны. При этом

$$d_\alpha^{(j)}\left(\tau + \frac{t_*}{2}\right) = \tilde{d}_\alpha^{(j)}(\tau), \quad \alpha = 1, 2, \quad j = \overline{1,\, n-3}.$$

Таким образом, интеграл (28) преобразуется к виду

$$\int\limits_{-t_*/2}^{t_*/2} \left[c_1 \tilde{d}_1(\tau) + c_2 \tilde{d}_2(\tau)\right]^{i_1} \ldots \left[c_1 \tilde{d}_1^{(n-3)}(\tau) + c_2 \tilde{d}_2^{(n-3)}(\tau)\right]^{i_{n-2}} d\tau.$$

Подынтегральная функция в полученном интеграле представляет собой произведение $i_1 + {} + i_3 + i_5 + \ldots$ четных функций и $i_2 + i_4 + i_6 + \ldots$ нечетных. Из условия (23) следует, что $i_2 + i_4 + i_6 + \ldots = 2k_1 + 1$, т.е. в этом произведении нечетных функций нечетное число, поэтому подынтегральная функция нечетна и интеграл от нее в симметричных пределах от $-t_*/2$ до $t_*/2$ равен нулю.

Таким образом, интеграл (28) равен нулю. Это означает, что слагаемые степени $2l_1 + 1$ в многочлене $v_1(c_1, c_2)$ имеют вид

$$\int\limits_0^{t_*} \left[c_1 d_1(t) + c_2 d_2(t)\right]^{2l_1+1} dt.$$

Следовательно, функция $V_{2l_1+1}(1,\zeta)$ запишется в виде

$$V_{2l_1+1}(1,\zeta) = \int\limits_0^{t_*} \big[d_1(t) + \zeta d_2(t)\big]^{2l_1+1} dt.$$

Уравнение (27) принимает вид

$$\int\limits_0^{t_*} \big[d_1(t) + \zeta d_2(t)\big]^{2l_1+1} dt = 0. \tag{29}$$

Это уравнение всегда имеет действительное решение $\zeta = k$, так как в его левой части стоит многочлен нечетной степени. Это решение единственно, так как $V_{2l_1+1}(1,\zeta)$ монотонно возрастает по ζ:

$$V'_{2l_1+1}(1,\zeta) = \int\limits_0^{t_*} (2l_1+1)(d_1(t) + \zeta d_2(t))^{2l_1}\, d_2(t) dt > 0, \quad \zeta \in \mathbb{R}.$$

Здесь штрих означает дифференцирование по ζ. Заметим, что всегда $k < 0$, так как все коэффициенты многочлена $V_{2l_1+1}(1,\zeta)$ положительны.

Рассмотрим уравнение

$$\varphi(\xi,\zeta) = 0.$$

Функция $\varphi(\xi,\zeta)$ обращается в нуль в точке $(0,k)$. Найдем частные производные функции $\varphi(\xi,\zeta)$ по ξ и ζ:

$$\varphi'_\xi(\xi,\zeta) = V_{2l_1}(1,\zeta) + \ldots + (2l_1+1)\xi^{2l_1} V_0,$$
$$\varphi'_\zeta(\xi,\zeta) = V'_{2l_1+1}(1,\zeta) + \xi V'_{2l_1}(1,\zeta) + \ldots + \xi^{2l_1} V'_1(1,\zeta).$$

Вычислим значение $\varphi'_\zeta(\xi,\zeta)$ в точке $(0,k)$:

$$\varphi'_\zeta(0,k) = V'_{2l_1+1}(1,k).$$

Как показано выше, $V'_{2l_1+1}(1,\zeta) > 0$ для любых значений ζ. Следовательно, $\varphi'_\zeta(0,k)$ отлична от нуля. По теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки $(0,k)$ уравнение $\varphi(\xi,\zeta) = 0$ разрешимо относительно ζ: $\zeta = \zeta(\xi)$, причем $\zeta(0) = k$.

По правилу дифференцирования неявной функции производная функции $\zeta(\xi)$ при $\xi = 0$ вычисляется по формуле

$$\zeta'(0) = -\frac{\varphi'_\xi(0,k)}{\varphi'_\zeta(0,k)} = -\frac{V_{2l_1}(1,k)}{V'_{2l_1+1}(1,k)}.$$

С другой стороны, по определению производной

$$\zeta'(0) = \lim_{\xi\to 0} \frac{\zeta(\xi) - k}{\xi}.$$

Следовательно,
$$\lim_{\xi\to 0}\frac{\zeta(\xi)-k}{\xi}=-\frac{V_{2l_1}(1,k)}{V'_{2l_1+1}(1,k)}.$$
Возвращаясь к переменным c_1, c_2, получим следующий результат:
$$\lim_{c_1\to\infty}(c_2-kc_1)=-\frac{V_{2l_1}(1,k)}{V'_{2l_1+1}(1,k)}.$$
Отсюда следует, что уравнение
$$c_2=kc_1-\frac{V_{2l_1}(1,k)}{V'_{2l_1+1}(1,k)}$$
является уравнением асимптоты одной из ветвей кривой $v_1(c_1,c_2)=0$.

Покажем, что кривая $v_1(c_1,c_2)=0$ не имеет других ветвей, уходящих на бесконечность.

Согласно сделанному замечанию, действительных корней, кроме k, у уравнения (27) нет. Это означает, что у кривой $v_1(c_1,c_2)=0$ нет других наклонных асимптот. Кроме того, у нее нет и вертикальных асимптот. Чтобы показать это, нужно рассмотреть уравнение
$$V_{2l_1+1}(\zeta,1)=0. \tag{30}$$
Кривая $v_1(c_1,c_2)=0$ имела бы вертикальную асимптоту лишь в том случае, если бы у этого уравнения был корень $\zeta=0$. В то же время уравнение (30) имеет единственный действительный корень $\zeta=1/k$, который соответствует той же асимптоте, что и корень $\zeta=k$ уравнения (27). Заметим, что и ветвей, не имеющих асимптот, но удаляющихся на бесконечность, у кривой $v_1(c_1,c_2)=0$ нет. Каждой такой ветви должен соответствовать корень $\zeta=0$ одного из двух уравнений (27) либо (30), а, как показано выше, нулевых корней ни у одного из этих уравнений нет.

Аналогичные рассуждения справедливы и для кривой, заданной уравнением $v_2(c_1,c_2)=$ $=0$. Одна из ветвей этой кривой также будет иметь асимптоту, и эта асимптота описывается уравнением
$$c_2=\tilde{k}\,c_1-\frac{\tilde{V}_{2l_2}(1,\tilde{k})}{\tilde{V}'_{2l_2+1}(1,\tilde{k})},$$
где $\tilde{V}_{2l_2+1}(c_1,c_2)$ — слагаемые степени $2l_2+1$; $\tilde{V}_{2l_2}(c_1,c_2)$ — слагаемые степени $2l_2$ в многочлене $v_2(c_1,c_2)$; $\tilde{k}$ — единственное решение уравнения
$$\int\limits_0^{t_*}(d_1(t)+\zeta d_2(t))^{2l_2+1}dt=0. \tag{31}$$
Так же, как и для первого уравнения, $\tilde{k}$ отрицательно. При этом $\tilde{k}\neq k$. Других ветвей, уходящих на бесконечность, у кривой $v_2(c_1,c_2)=0$ также нет.

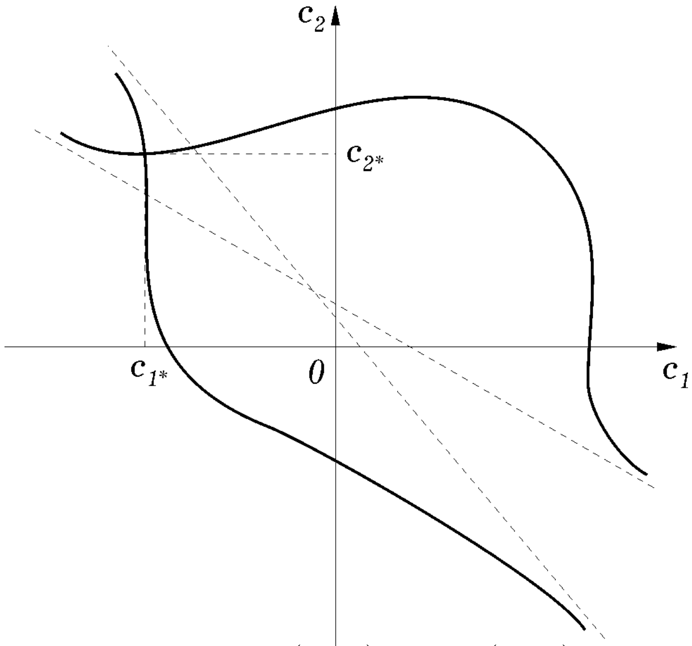

Рис. 1. Кривые $v_1(c_1, c_2) = 0$ и $v_2(c_1, c_2) = 0$

Заметим, что для любого значения $c_1 = c_{10}$ каждое из уравнений $v_\alpha(c_{10}, c_2) = 0$, $\alpha = 1,\ 2$, имеет хотя бы одно решение. Это объясняется тем, что при фиксировании $c_1 = c_{10}$ функция $v_\alpha(c_{10}, c_2)$ обладает всеми свойствами функции $v(c)$, определенной в доказательстве теоремы 2 из работы [8]. Точно так же, каким бы ни было значение $c_2 = c_{20}$, уравнение $v_\alpha(c_1, c_{20}) = 0$, $\alpha = 1,\ 2$, всегда имеет решение.

Примерный вид кривых $v_1(c_1, c_2) = 0$, $v_2(c_1, c_2) = 0$ показан на рис. 1. Ветви этих кривых, уходящие на бесконечность, имеют асимптоты с разными угловыми коэффициентами. Следовательно, у кривых $v_1(c_1, c_2) = 0$, $v_2(c_1, c_2) = 0$ есть по крайней мере одна точка пересечения (c_{1*}, c_{2*}), которая и соответствует решению системы (25).

Осталось показать, что при выполнении условий теоремы каждое из уравнений (18) при всех $t \in [0,\ t_*]$ разрешимо относительно η_i, $i = 1,\ 2$. Функции $R_i(\eta_i)$, $i = 1,\ 2$, обладают всеми свойствами функции $R(\eta)$ из теоремы 2 [7]. Повторяя рассуждения этой теоремы, убеждаемся в справедливости доказываемого утверждения. ►

Пример. Рассмотрим систему четвертого порядка

$$\begin{cases} \dot z_1 = z_2, \\ \dot z_2 = f(z, \eta) + g(z, \eta)u, \\ \dot\eta_1 = \dfrac{z_1^3 - z_2^2}{\eta_1^2 + 1}, \\ \dot\eta_2 = z_1^5 - z_2^4, \end{cases} \tag{32}$$

где $g(z, \eta) \neq 0$ в $\mathbb{R}^4$. Для этой системы функция $Q_1(z) = z_1^3 - z_2^2$ является многочленом третьей степени, функция $Q_2(z) = z_1^5 - z_2^4$ является многочленом пятой степени. Слагаемые старшей степени в обоих многочленах не содержат переменную z_2. Следовательно, условия (23) и (24) заведомо выполнены. Функции $R_1(\eta_1) = 1/(\eta_1^2 + 1)$ и $R_2(\eta_2) = 1$ положительны и ограничены в $\mathbb{R}$.

Согласно теореме 2 эта система управляема в $\mathbb{R}^4$ за любой интервал времени $[0, t_*]$. Далее будем полагать, что функции $f(z,\eta)$, $g(z,\eta)$ в системе (32) имеют следующий вид:

$$f(z,\eta) = -z_1\eta_1, \quad g(z,\eta) = 10 + z_1^2.$$

Найдем управление $u(t)$, переводящее систему (32) из начального состояния $(0,\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$ в конечное состояние $(5,\ 1,\ 5,\ -5)^{\mathrm{T}}$ за интервал времени $[0,\ 5]$.

Функция $b(t)$, удовлетворяющая на отрезке $[0,\ 5]$ граничным условиям по z, имеет вид

$$b(t) = -\frac{1}{25}t^3 + \frac{2}{5}t^2,$$

функции $d_1(t)$, $d_2(t)$ для системы четвертого порядка

$$d_1(t) = t^2(5-t)^2, \qquad d_2(t) = t^3(5-t)^3.$$

Система уравнений (17) принимает вид

$$140/3 = \int\limits_0^5 \Big[\big(b(t) + c_1\,d_1(t) + c_2\,d_2(t)\big)^3 - \big(\dot b(t) + c_1\,\dot d_1(t) + c_2\,\dot d_2(t)\big)^2\Big]\,dt,$$

$$-5 = \int\limits_0^5 \Big[\big(b(t) + c_1\,d_1(t) + c_2\,d_2(t)\big)^5 - \big(\dot b(t) + c_1\,\dot d_1(t) + c_2\,\dot d_2(t)\big)^4\Big]\,dt.$$

Приближенное решение этой системы

$$c_{1*} = -9{,}109, \qquad c_{2*} = 1{,}652.$$

Функция $B(t)$ из теоремы 1 принимает вид

$$B(t) = b(t) + c_{1*}\,d_1(t) + c_{2*}\,d_2(t) = -\frac{1}{25}t^3 + \frac{2}{5}t^2 - 9{,}109\,t^2(1-t)^2 + 1{,}652\,t^3(1-t)^3.$$

Траектории $z_1(t)$, $z_2(t)$, удовлетворяющие граничным условиям по z, имеют вид

$$z_1(t) = B(t), \qquad z_2(t) = \dot B(t).$$

Соответствующие графики приведены на рис. 2.

Траектории $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ можно найти, решив задачу Коши

$$\begin{cases} \dot\eta_1 = \dfrac{(b(t) + c_1\,d_1(t) + c_2\,d_2(t))^3 - (\dot b(t) + c_1\,\dot d_1(t) + c_2\,\dot d_2(t))^2}{1+\eta_1^2}, \\ \dot\eta_2 = (b(t) + c_1\,d_1(t) + c_2\,d_2(t))^5 - (\dot b(t) + c_1\,\dot d_1(t) + c_2\,\dot d_2(t))^4, \\ \eta_1(0) = 0, \qquad \eta_2(0) = 0. \end{cases}$$

Результат численного решения приведен на рис. 3, 4.

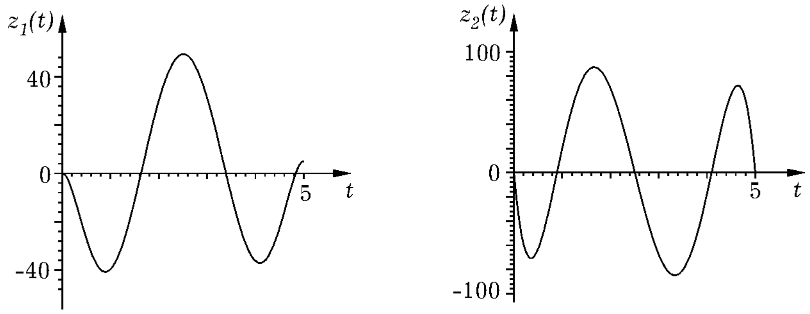

Рис. 2. Траектории $z_1(t)$, $z_2(t)$

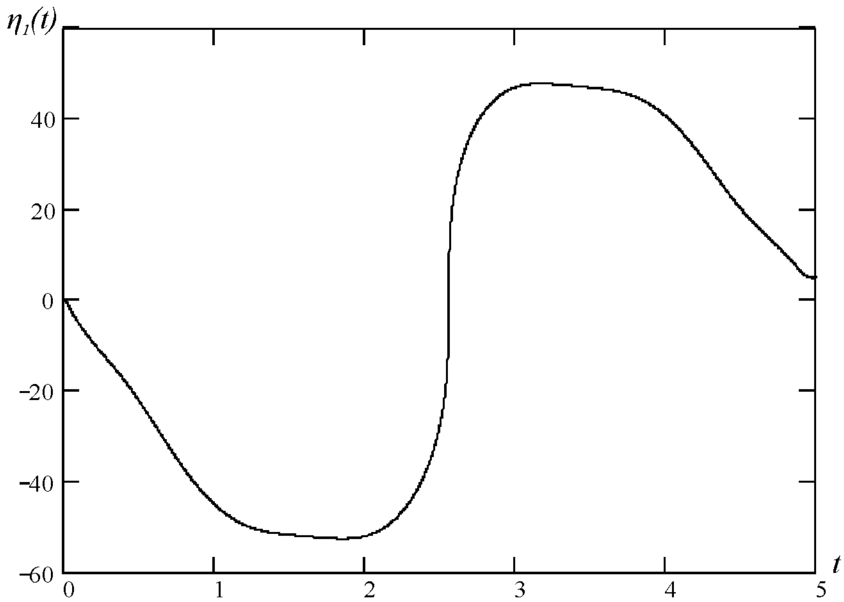

Рис. 3. Траектория $\eta_1(t)$

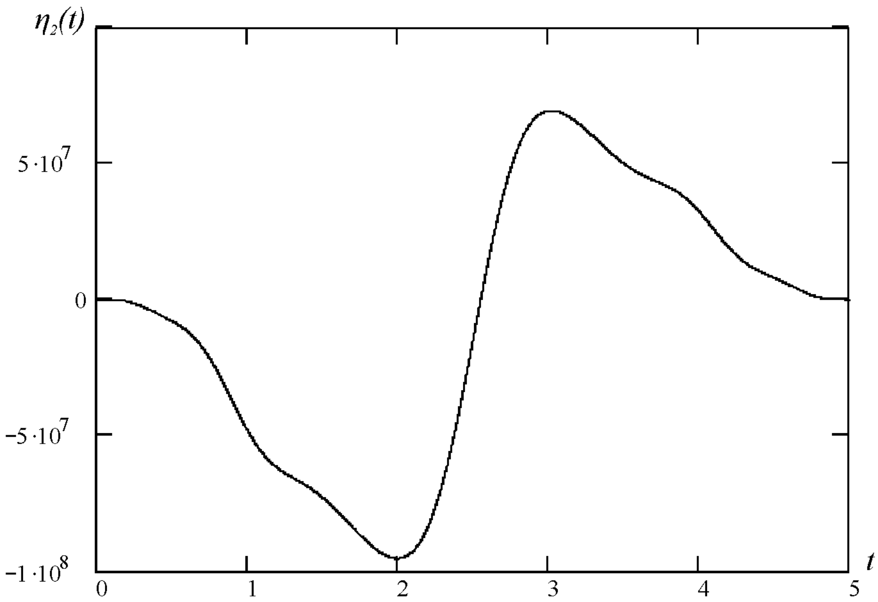

Рис. 4. Траектория $\eta_2(t)$

Управление $u(t)$, $t \in [0,\ 5]$, являющееся решением рассматриваемой терминальной задачи, выражается формулой

$$u(t) = \frac{\ddot{B}(t) + B(t)\eta_1(t)}{10 + B^2(t)}.$$

Полученная зависимость $u(t)$ показана на рис. 5.

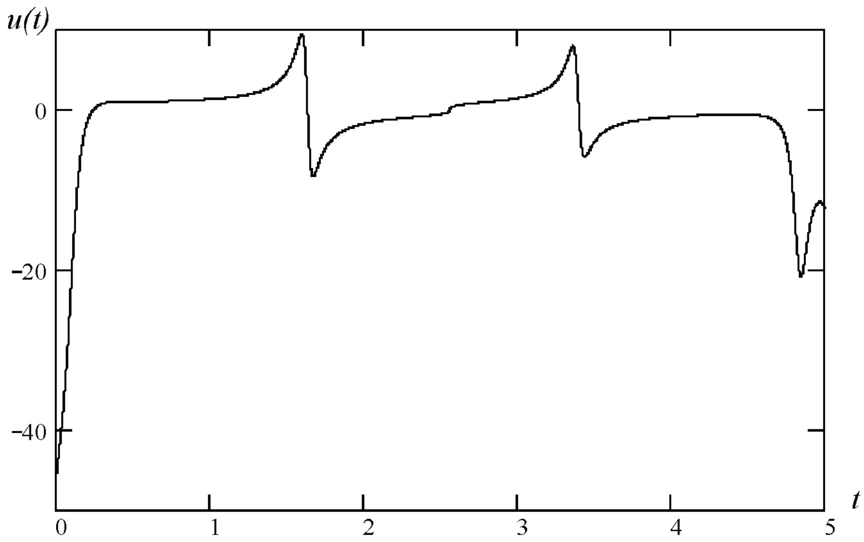

Рис. 5. Управление $u(t)$

5. Заключение

Предложен метод решения терминальных задач для регулярных систем квазиканонического вида с двумерной нулевой динамикой и скалярным управлением. С использованием предложенного метода доказано достаточное условие управляемости. Полученное условие проиллюстрировано на примере системы четвертого порядка.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ N11-01-00733 и Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-3659.2012.1).

Список литературы

1. Ковалев А.М. Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. Киев: Наукова думка, 1980. 174 с.
2. Sastry S. Nonlinear systems: analysis, stability, and control. New York: Springer Verlag, 1999.
3. Hirschorn R.M., Lewis A.D. Geometrical local controllability: second order conditions // Proc. 41st IEEE Conference on Decision and Control CDC’02. Las Vegas, 2002. P. 368–369.
4. Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.
5. Крищенко А.П. Исследование управляемости и множеств достижимости нелинейных систем управления // Автоматика и телемеханика. 1984. №6. С. 30–36.

6. Жевнин А.А., Крищенко А.П. Управляемость нелинейных систем и синтез алгоритмов управления // ДАН СССР. 1981. Т. 258, № 4. С. 805–809.
7. Фетисов Д.А. Исследование управляемости регулярных систем квазиканонического вида // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2006. № 3. С. 12–30.
8. Фетисов Д.А. Условие управляемости аффинной системы // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2011. № 10. Режим доступа: http://technomag.edu.ru/doc/236936.html (дата обращения 02.07.2012).

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

Regular systems of a quasicanonical form with scalar control and two-dimensional zero dynamics controllability

10, October 2012

DOI: 10.7463/1012.0465329

Phetisov D. A.

Russia, Bauman Moscow State Technical University

dfetisov@yandex.ru

The new method is proposed to solve a terminal problem for regular systems of a quasicanonical form with two-dimensional zero dynamics and scalar control. The example of terminal problem solving by means of the method proposed is given. The controllability sufficient condition for regular systems of a quasicanonical form with scalar control and two-dimensional zero dynamics is proven. The example is represented to illustrate the condition received.

References

1. Kovalev A.M. *Nelineinye zadachi upravleniia i nabliudeniia v teorii dinamicheskikh system* [Nonlinear problems of control and observing in the theory of dynamical systems]. Kiev, Naukova dumka, 1980. 174 p.

2. Sastry S. *Nonlinear systems: analysis, stability, and control.* New York, Springer Verlag, 1999.

3. Hirschorn R.M., Lewis A.D. Geometrical local controllability: second order conditions *Proc. 41st IEEE Conference on Decision and Control CDC'02.* Las Vegas, 2002, pp. 368–369.

4. Krasnoshchechenko V.I., Krishchenko A.P. Nelineinye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza [Nonlinear systems: geometrical methods of analysis and synthesis]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2005. 520 p.

5. Krishchenko A.P. Issledovanie upravliaemosti i mnozhestv dostizhimosti nelineinykh sistem upravleniia [The study of the controllability and sets of attainability of nonlinear control systems]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automatics and Remoute Control], 1984, no. 6, pp. 30–36.

6. Zhevnin A.A., Krishchenko A.P. Upravliaemost' nelineinykh sistem i sintez algoritmov upravleniia [Controllability of nonlinear systems and synthesis of control algorithms]. *Dokl. AN SSSR* [Reports of Academy of Sciences of the USSR], 1981, vol. 258, no. 4, pp. 805-809.

7. Fetisov D.A. Issledovanie upravliaemosti reguliarnykh sistem kvazikanonicheskogo vida [Study of controllability of regular systems of quasicanonical type]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2006, no. 3, pp. 12–30.
8. Fetisov D.A. Uslovie upravliaemosti affinnoi sistemy [Affine System Controllability Condition]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2011, no. 10. Available at: http://technomag.edu.ru/doc/236936.html, accessed 02.07.2012).