

## Математические модели управляемых процессов: полнота описаний и соразмерность задачам

77-48211/465152

Инженерный вестник # 09, сентябрь 2012

Чулин Н. А.

УДК 681.5.01

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

[nchulin@yandex.ru](mailto:nchulin@yandex.ru)

### Введение

При разработке систем управления для новых объектов естественным и вполне оправданным является желание иметь такие модели, которые с достаточной подробностью объясняют и воспроизводят управляемые процессы и, одновременно, позволяют применять для создания алгоритмов известные и вновь создаваемые методы теории управления. Одновременно существует устойчивое мнение, что математическая модель должна входить в число исходных данных задачи управления. По крайней мере, именно в таком виде задачи управления рассматривает подавляющее большинство тех, кто предлагает новые методы решения этих задач. При этом не принимается в расчет то, что модель в требуемом для применения этих методов виде просто некому создавать — нужна она, как правило, только для целей управления и создать её сможет специалист, знакомый как с конкретной предметной областью, так и со спецификой задач управления. И даже если такая модель уже существует, она может оказаться слишком сложной для непосредственного применения методов теории управления или далеко не всегда сопровождается определением тех условий, когда она действительно работоспособна. Последнее — принципиально, так как задачи управления часто ставятся именно как задачи изменения характера и условий протекания процессов. В результате разрабатываемые в теории управления методы, достаточно часто обладающие определенным математическим изяществом, оказываются фактически непригодными для решения практических задач, так как получаемые с их помощью решения не удается использовать на реальном объекте хотя бы в качестве «начального приближения». Происходить это может и в тех случаях, когда *на расчётной модели* получался вполне удовлетворительный результат, т.е. речь здесь идёт не об ошибочных методиках расчёта, а об ошибочной постановке задачи, точнее, о неправильном использовании в задаче

управления математических моделей. Достаточно часто *расчётные модели* создаются «под метод» — под требования и ограничения, налагаемые методом расчёта, а свойства самого объекта учитываются «по возможности».

Успехи вычислительной техники породили устойчивое мнение о том, что указанная проблема не имеет принципиального значения для теории управления. Действительно, зачем проверять теоретическое решение на самом объекте — сначала его нужно проверить и, при необходимости, исправить, на *полной модели* управляемого процесса, слишком сложной для теоретико-управленческих методов, но успешно «обрабатываемой» современными вычислительными средствами. При всей привлекательности этого мнения нельзя забывать, что необходимая *полнота модели* обычно получается на достаточно поздних этапах жизненного цикла системы и достигается путем проведения большого объема исследований и экспериментов, причем значительная их часть может оказаться просто невозможной без работоспособной системы управления.

Сказанное имеет целью напомнить об очевидном: создание систем управления требует не только развития методов *синтеза законов* управления, но и адекватных задачам подходов к получению как *полных*, так и *расчётных* математических моделей управляемых процессов. Это относится не только к новым для теории управления по своей природе объектам, но и к традиционным, таким как летательные аппараты. Последнее вызвано даже не столько усложнением самих объектов, сколько существенным расширением круга задач, которые должны решаться в автоматическом режиме, особенно при стремлении повысить «интеллектуальность» управляющих систем.

Вопросам создания, упрощения и использования моделей, в том числе – и при разработке систем управления, посвящено такое количество публикаций, что даже беглый их обзор существенно превзошёл бы по объёму основное содержание настоящей статьи. Считаю достаточным указать наиболее известные труды [7-9], тем более, что в них, кроме изложения сути вопроса, содержатся и достаточно содержательные обзоры литературы. В отличие от известных работ в настоящей рассматривается не просто способ упрощения моделей, а подход, позволяющий варьировать эту сложность в соответствии с требованиями частных задач в процессе разработки систем управления.

Цель работы – обратить внимание, что открылась возможность ещё одного подхода к декомпозиции при создании моделей сложных процессов.

Новизна этого подхода – не только в использовании для декомпозиции теории динамических систем, но и в возможности изменения сложности частей модели.

## Теория динамических систем как возможная основа при создании моделей управляемых процессов

В качестве основы подхода к созданию моделей управляемых процессов предлагается использовать известные приёмы разработки математических моделей «под задачу», когда создаётся не *полная модель*, а лишь её часть, но такая, которая отражает все свойства объекта, существенные при решении определённой частной задачи. Отсутствие *полной модели* нельзя рассматривать как недостаток, так как *полнота* — не самоцель, она возникла из стремления обеспечить адекватность при недостаточном априорном знании конкретных режимов, из-за чего приходится предусматривать модель под все возможные решения. Избыточная *полнота модели* ведет к излишней сложности работы с ней. Успех подобных приемов обеспечивался, как правило, тогда, когда они соответствовали известным способам упрощения моделей, таким как декомпозиция по скоростям (частотам), каналам управления, видам движения. При этом часто в моделях полностью отсутствовала информация, необходимая для других (смежных) задач управления тем же процессом — для них приходилось составлять свои частные модели, и составление *избыточно полной* модели становилось неизбежностью. Очевидно, оптимальным было бы сочетание общности и детализации, но без громоздкости. Например, было бы замечательно, если математическая модель обладала бы таким же свойством, каким обладает зрительная картина мира: в какой бы точке ни находился наблюдатель, он детально видит непосредственно окружающую его область, а то, что находится дальше от наблюдателя, соответственно уменьшается, скрывая свои подробности. Нужно подчеркнуть, что этим свойством обладает любая точка, т.е. подробности «далёкого» не пропадают, они как бы находятся в свёрнутом состоянии и разворачиваются по мере необходимости. Внешне (т.е., с точки зрения наблюдателя) подобным, хотя, по сути – обратным свойством наделил одну из своих моделей вселенной Пуанкаре, в которой соответственно размерам объектов меняются размеры самого наблюдателя. В определенной степени таким свойством обладают частотные модели процессов, лучшим примером тому является использование понятия среднечастотного диапазона в методе синтеза корректирующих устройств В.В. Солодовникова, известном как *метод желаемых логарифмических амплитудных характеристик* [1]. Но такой подход, как и вообще частотные методы, применялся к достаточно ограниченному кругу задач управления, когда допустимы линейные модели. Кстати, определенным шагом в направлении создания управляемых процессов по моделям с желательным сочетанием рассматриваемых качеств, стал провозглашенный опять же В.В. Солодовниковым *принцип сложности*, но он, правда, получил развитие в несколько ином направлении.

Итак, предлагается при разработке математических моделей рассматривать процессы, исходя из, как правило, существующего разделения общей задачи управления на частные. Но само разделение задач должно быть максимально свободным от «влияния» предполагаемых методов решения этих частных задач и опираться преимущественно на само их (задач) содержание и динамические свойства процессов. Причём - даже при разной «физической» природе этих процессов.

Под динамическими свойствами здесь понимается не только влияние одних параметров процессов на изменение других и различие скоростей протекания (частот) разных частей процесса, но и топологические особенности - наличие аттракторов (как притягивающих точек, так и областей) и разделяющих поверхностей, а также - «расположение» желаемого поведения системы относительно этих особенностей. Для каждой частной задачи можно создавать и использовать свою часть модели, предполагая существование модели «полной» и обеспечивая «стыковку», т.е. описание взаимного влияния частей. В модели для каждой частной задачи можно использовать упрощенное описание такого влияния - главное, чтобы при наличии взаимного влияния в этой системе моделей существовала такая, в которой есть динамическое описание влияющих процессов. Например, при описании движения летательного аппарата часто используется модель тяги в виде статических зависимостей от нескольких параметров движения. Она вполне достаточна для управления на установившихся режимах полета, но при энергичном маневрировании не обойтись без знания динамики изменения тяги. Таким образом, «полная» модель в процессе разработки алгоритмов управления может вообще отсутствовать - она заменяется системой частных - в «чёрном ящике» сделана система «окон», через которые можно увидеть всё необходимое.

Новые возможности в развитие рассматриваемого подхода может принести активно развиваемое в настоящее время математическое направление, обозначаемое как *теория сложных динамических систем*, или *теория динамического хаоса и самоорганизации* [3 – 6], основанное на результатах, изложенных в книге [2]. Для построения моделей с указанными свойствами (а, по сути, и для исследования объектов управления) предлагается применять к знаниям о конкретных процессах ряд концепций этих теорий, относящихся, прежде всего, к бифуркациям, катастрофам, видам и свойствам аттракторов и разделяющих поверхностей — того, что сейчас модно связывать с *синергетикой*. Правда, при этом придётся отказаться от идеи навязывания синтезируемой системе произвольного наперёд заданного «желаемого поведения», например, в виде определяемой во времени программной траектории. Предлагаемые приемы предопределяют постановку задачи управления с обязательным учётом *топологии поведения* управляемого процесса.

Это также не следует считать ограничением: можно утверждать, что большинство работоспособных алгоритмов и так построено по принципу комбинирования «свойственных объекту движений». Однако, без топологии решений успех обеспечивался лишь самым простейшим приемом из всех возможных, сводящимся к «созданию» притягивающих точек (из множества таковых, возможных для конкретного объекта) и обеспечению качества переходных процессов при движении к ним. Кстати, при этом во всей открытой области притяжения определённого аттрактора можно вообще обходиться без линеаризованных моделей (как бы предполагая их существование), используя известные линейные (при необходимости — с ограничителями) структуры корректирующих устройств и проводя настройку параметров методом моделирования. Основные проблемы возникают на «далёких» и «очень близких» расстояниях от притягивающих точек. Первые, естественно, связаны с незнанием границ области притяжения соответствующих точек, а вторые — с проявлением новых особенностей поведения, например, зон нечувствительности, «невидимых» на моделях, используемых при решении задачи в «макроокрестностях» целевой точки. Если верить разработчикам *теории бифуркаций и катастроф*, то методы именно этих теорий позволяют осмысленно подходить к оценкам границ областей притяжения («бассейнов»). С другой стороны, разработчики *теории динамического хаоса и самоорганизации* предоставляют возможность рассматривать аттракторы, отличающиеся от точечных и простейших периодических.

Хотя в современном состоянии теория динамических систем мало пригодна для непосредственного использования при разработках систем управления «сложными процессами», обозначенные в ней результаты по топологии решений дифференциальных уравнений сами по себе могут оказать существенную помощь при решении рассматриваемого круга задач. В частности, они обоснованно указывают на возможность упрощенного рассмотрения процессов в открытых областях бассейнов аттракторов (т.е. – не включающих ни сами аттракторы, ни границы бассейнов). Упрощение состоит в том, что сами аттракторы любого вида заменяются областью их возможных траекторий, процессы вне которых можно описывать аналогично процессам около точек равновесия. При приближении к аттрактору требуется более детальная динамическая модель процессов для этой области, но появляется возможность упрощенного описания вне её. Такой приём используется, в частности, при описании процессов с зоной нечувствительности вблизи целевых точек. Подобным образом можно поступать и вблизи границ бассейнов, рассматривая их как «неустойчивые равновесные режимы». В результате получается, как минимум, тройка моделей, в каждой из которых есть подробная и две (в общем случае) упрощённые части.

Насколько реальны эти возможности? Ведь указанные теории предъявляют достаточно серьезные требования к классам математических объектов, когда эти теории позволяют получать более или менее содержательные результаты. Модели реальных управляемых процессов обычно не просто далеки от удовлетворения этим требованиям, но зачастую представляются прямо противоречащими им. Например, требования достаточной гладкости используемых функций явно противоречит обычному наличию так называемых «существенных» (неаналитических) нелинейностей, входящие в дифференциальные уравнения функции часто представляют собой многопараметрические семейства, при этом заданные также не аналитически, а таблично. Для ответа на этот вопрос следует обратить внимание на несомненное сходство «процессов со сложным поведением», когда для их описания зачастую привлекают искусственно конструируемые «гладкие» уравнения [6], и процессов, например, автоколебаний, в нелинейных «негладких» системах. Это сходство требует более глубокого изучения, но сам факт его существования дает возможность использовать при необходимости как динамический, так и параметрический способы описания одних и тех же частей модели в разных частных задачах с возможностью перехода от одного способа к другому. Исходя из этого, предлагается вместо избыточно сложной *полной модели* создавать систему упрощенных взаимосвязанных моделей, в каждой из которых сочетается динамическое описание существенного для соответствующей частной задачи с параметрическим для всего остального. Динамическое описание необходимо как для собственно исследования частных процессов, так и для выявления топологии, параметрическое – для сохранения связей, обеспечивающих целостность рассмотрения процесса в целом даже для частных задач. При адекватной декомпозиции сложной задачи, используя разрабатываемые в теории хаоса и самоорганизации топологические приемы, можно упростить эту систему до такого уровня, что в каждой частной модели останется подробное описание поведения лишь относительно одной из особенностей.

Примечательно, что для объектов, для которых имеется опыт создания «полных» математических моделей в виде систем дифференциальных уравнений с большим числом нелинейностей, не обязательно представимых в аналитической форме, и как правило – с неточно известными параметрами, рассматриваемый подход может привести как подтверждению традиционных способов декомпозиции задач управления и использования упрощенных моделей, так и к выявлению причин неудачных решений. Например, для аэродинамических летательных аппаратов с плоским крылом общепринятое деление задачи на управление траекторным и угловым движением твердого тела с отдельным рассмотрением динамики силовой установки, измерительных средств, приводов и учетом нежесткости является вполне соответствующим рассматриваемому делению с учетом

топологии динамической системы. Действительно, грамотная декомпозиция в этом классе задач предполагает для каждой частной задачи наличие балансовых или установившихся режимов для остальных задач, причём в расчёт должны приниматься лишь грубые алгоритмы управления, учитывающие неточное знание этих режимов. Нарушение этих условий, например – желание обеспечить движение по произвольной наперёд заданной траектории, является типичной причиной проблем при решении других частных задач или при объединении частных решений в общее. Подобным образом обстоит дело и с другим общепринятым способом декомпозиции в том же классе задач – делении на продольное и боковое движение. И здесь успех гарантирован лишь в том случае, когда учитывается, что сбалансированные режимы определяются движением всего объекта, а не только рассматриваемого канала. Что же касается тех сфер деятельности, в которых математическое описание динамики управляемых процессов как движения взаимодействующих подсистем еще не стало привычным, то представляется, что для них рассматриваемый подход при создании алгоритмов управления окажется особо полезным.

### **Заключение**

Для построения математических моделей управляемых процессов предлагается вместо избыточно сложной «полной» или недостаточно точной «простой» модели создавать систему взаимосвязанных «упрощенных» моделей. Обеспечение адекватности решаемым задачам по сложности и сохранение при этом всего существенного для управления может быть достигнуто применением известных приёмов разработки математических моделей «под задачу» в сочетании с результатами теории сложных динамических систем.

### **Список литературы**

1. *Солодовников В.В.* Синтез корректирующих устройств следящих систем при типовых воздействиях. // Автоматика и телемеханика —1951. — № 5. — С. 352...388.
2. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. - М.: Наука, 1981.- 568 с.
3. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. В 2-х т. — М.: Мир, 1984. – т.1- 350 с., т.2-287 с.
4. *Хакен Г.* Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. — М.: Мир, 1985.- 405 с.
5. *Николис Г., Пригожин И.* Познание сложного. Введение. — М.: Мир, 1990.- 344 с.
6. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. — М.: Физматлит, 2001.- 296 с.
7. *Пайерлс Р.* Построение физических моделей // Успехи физических наук. — 1983. — № 6. — Т. 140. — с. 315-332.

8. *Советов Б. Я., Яковлев С. А.* Моделирование систем: Учеб. для вузов — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Высшая школа, 2001. — 343 с.
9. *Мышкис А. Д.* Элементы теории математических моделей. — 3-е изд., испр. — М.: КомКнига, 2007. — 192 с