

# Статистическая динамика фазовой автоподстройки второго порядка при воздействии комбинированных помех

### 77-30569/359541

# 05, май 2012 Шахтарин Б. И., Асланов Т. Г. УДК 621.396

> Россия, МГТУ им. Н.Э.Баумана shakhtarin@mail.ru tabasik@gmail.com

#### Введение

Последние десятилетия характерны широким применением систем синхронизации. Наибольшее распространение системы синхронизации нашли в связи, в навигационных системах GPS, Galileo, Глонасс, для синхронизации OPERA и CERN и т.д.

Внедрение спутниковых радионавигационных и радиосвязных систем породил повышенный интерес к системам синхронизации и к повышению их точности и помехозащищенности т.к. все эти системы работают в условиях воздействия помех [1-3].

Дальнейшее усовершенствование систем синхронизации за счет улучшения конструктивных и технологических решений имеет предел, вызываемый воздействием флуктуаций и помех естественного и искусственного происхождения. Помехоустойчивости систем синхронизации посвящен ряд работ. [1-5]

В данной статье впервые проведен сравнительный анализ плотностей распределения вероятностей сигнала рассогласования, среднего времени до срыва слежения и среднего значения частотного рассогласования для фазовой автоподстройки (ФАП) второго порядка при использовании двух методик [4] и [5].

# 1. Плотность распределения вероятностей, среднее время до срыва слежения и среднее значение частотного рассогласования по методу [4]

В работе [4] при учете кроме шумовой еще и гармонической помехи показано, что уравнение ФПК относительно ПРВ W(x,t) сигнала рассогласования *x* имеет вид

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ W(x,t) \left[ J_0(x_1) \sin x - \overline{\beta} \right] \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2}.$$
 (1)

http://technomag.edu.ru/doc/359541.html

Здесь  $x_1$  определяется выражением

$$x_1^2 = \frac{\varepsilon^2 J_0^2(x_1)}{d^2 \left\{ \left[ \frac{\cos x_0}{d} \left( \frac{2}{x_1} \right) J_1(x_1) + \frac{\sin P}{M} \right]^2 + \left( \frac{\cos P}{M} \right)^2 \right\}}$$

 $\overline{\beta} = \beta - \cos P \varepsilon J_1(x_1); x_1 - амплитуда первой гармоники предполагаемого решения исходного дифференциального уравнения ФАП при отсутствии шума;$ *r* $– отношение сигнал/шум (ОСШ); <math>J_0(x_1)$  и  $J_1(x_1)$  – функции Бесселя, соответственно, нулевого и первого порядка;  $\beta$  – нормированная начальная частотная расстройка между частотой управляемого генератора и частотой входного сигнала;  $\varepsilon$  – отношение помеха/сигнал; *P* и M – фазо-частотная и амплитудно-частотная характеристики фильтра.

График функции  $x_1(d)$  приведен на рис. 1 при  $\varepsilon$ =0,9; a=0,8;  $\alpha_0^{-2} = 6,25$  где кривые 1, 3, 5 получены при невырожденном фильтре и кривые 2, 4, 6 – при вырожденном фильтре. Кривые 1, 2 получены при  $\beta$ =0,3; кривые 3, 4 – при  $\beta$ =0,6; кривые 5, 6 – при  $\beta$ =0,9.

Штриховой линией на рис. 1-3 обозначено значение *d* использованное при расчетах ПРВ, среднего времени до срыва слежения и среднего значения частотного рассогласования.

Предположим, что имеет место стационарный режим работы ФАП. Тогда  $W(x,t) = W(x), \ \partial W/\partial t = 0$  и из (1) следует дифференциальное уравнение



$$\frac{dW}{dx} + \rho h(x)W(x) = G_0;$$

Рисунок 1 – Зависимость амплитуды x<sub>1</sub> первой гармоники от нормированной разности

частот d

$$h(x) = J_0(x_1) \sin x - \overline{\beta}; \quad G_0 - const; \quad \rho = r J_0(x_1).$$
<sup>(2)</sup>

Решением дифференциального уравнения (1) является [4]

$$W(x) = \frac{e^{\rho \cos x}}{2\pi R_{\Sigma}} \left[ I_0(\rho) + 2\overline{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \overline{\nu}^2} (\overline{\nu} \cos nx - n \sin nx) I_n(\rho) \right], \quad (3)$$

где  $R_{\Sigma}$  определяется соотношением

$$R_{\Sigma} = \frac{\pi \overline{\nu}}{sh\pi \overline{\nu}} |I_{i\overline{\nu}}(\rho)|, \qquad (4)$$

$$|I_{i\overline{\nu}}(\rho)|^{2} = \frac{sh\pi \overline{\nu}}{\pi \overline{\nu}} \left[ I_{0}^{2}(\rho) + 2\overline{\nu}^{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} I_{n}(\rho)}{n^{2} + \overline{\nu}^{2}} \right],$$

где  $\overline{v} = \overline{\beta}r$ ;  $I_{iv}(\rho)$  – модифицированная функция Бесселя мнимого порядка.

В работе [4] среднее время до срыва слежения находится, исходя из уравнения Понтрягина, имеющего вид

$$\frac{d^2\gamma_1(x)}{dx^2} - rh_1(x)\frac{d\gamma_1(x)}{dx} + r = 0,$$

где  $\gamma_{I} = \gamma_{c} = \Omega T_{c}$ ,  $T_{c}$  – среднее время до срыва слежения;

Среднее время до срыва слежения у<sub>с</sub> получаем по [1, формулы (1.89) и (1.90)] в виде

$$\gamma_{c} = \frac{2\pi t h \pi \overline{\nu}}{\overline{\beta}} R_{\Sigma} [\rho(r), \overline{\nu}, \varepsilon].$$
(5)

После нахождения среднего времени до срыва слежения, найдем среднее значение частотного рассогласования. Для этого используем формальную аналогию между ФАП, функционирующей при наличии гармонической помехи за пределами синхронизации, и ФАП без помехи с синусоидальной нелинейностью. Для обычной ФАП имеет место простая связь [4, формула (12.17)] между средним временем до срыва слежения и средним значением частотного рассогласования, справедливая для системы второго порядка

$$\beta_c = \left(2\pi/\gamma_c\right) th\pi\overline{\nu}.$$
(6)

В результате после подстановки переменных в уравнение (6) можно получить

$$\beta_{c} = \overline{\beta} / R_{\Sigma} [\rho(r), \overline{\nu}, \varepsilon].$$
<sup>(7)</sup>

Соотношение (7) и было использовано при расчетах среднего значения частотного рассогласования.

# 2. Плотность распределения вероятностей, среднее время до срыва слежения и среднее значение частотного рассогласования по методу [5]

По методу [5] для стационарной ПРВ W(x) взятой по модулю  $2\pi$  процесса z(t) ФАП второго порядка равна

$$W(x) = \frac{1}{4\pi^2 e^{-\beta_l \pi} |I_{j\beta_l(\alpha_l)}|^2} e^{\beta_l z + \alpha_l \cos(x+P_0)} \int_{x}^{x+2\pi} e^{-[\beta_l u + \alpha_l \cos(u+P_0)]} du,$$
(8)

где

$$\begin{split} \beta_{I} = & \left(\frac{r_{I}M_{o}+I}{r_{I}M_{o}}\right) \frac{\rho'M_{o}^{2}}{F_{o}} \left[\frac{\beta}{M_{o}} - (I-F_{o})\overline{sin(z(t)+P_{o})}\right] \left[I + \frac{F_{o}}{\rho'M_{o}^{2}(rM_{o}+I)\sigma_{G}^{2}}\right]; \\ & \alpha_{I} = \left(\frac{r_{I}M_{o}+I}{r_{I}M_{o}}\right) \rho'M_{o}^{2} - \frac{1}{r_{I}M_{o}\sigma_{G}^{2}}; \\ F_{o} = \frac{T_{2}}{T_{I}}; \quad r_{I} = F_{0}T_{2}; \quad B'_{L} = \frac{r_{I}M_{o}+I}{4T_{2}}; \quad \rho' = \frac{r}{B_{L}'}; \\ & \sigma_{G}^{2} = \overline{sin^{2}(z(t)+P_{o})} - \overline{sin(z(t)+P_{o})^{2}}; \\ M_{o} = \sqrt{A_{I}^{2}+A_{2}^{2}}; \quad P_{o} = \arctan(A_{2}/A_{I}); \\ A_{I} = (J_{o}(x_{I}) + \varepsilon J_{I}(x_{I})sin\psi); \quad A_{2} = \varepsilon J_{I}(x_{I})cos\psi; \\ sin\psi = \gamma F_{s}; \quad \gamma = \frac{x_{I}}{\varepsilon J_{o}(x_{I})}; \quad F_{s} = d\sin x_{o} + \frac{2}{x_{I}}J_{I}(x_{I})cos^{2}x_{o}; \\ sin x_{o} = \frac{\beta}{J_{o}(x_{I})} - \frac{dx_{I}J_{I}(x_{I})}{MJ_{o}^{2}(x_{I})}cosP. \end{split}$$

77-30569/359541, №05 май 2012 г. <u>http://technomag.edu.ru</u>

Здесь z(t) – описывает изменение во времени усредненной фазовой ошибки,  $B_L$  – шумовая полоса.

График функции  $x_0(d)$  приведен на рис. 2 для  $\varepsilon$ =0,9; a=0,8;  $\alpha_0^{-2} = 6,25$ . Кривые 1, 3, 5 получены при невырожденном фильтре и кривые 2, 4, 6 – при вырожденном фильтре. Кривые 1, 2 получены при  $\beta$ =0,3, кривые 3, 4 – при  $\beta$ =0,6, кривые 5, 6 – при  $\beta$ =0,9.



Рисунок 2 – Зависимость постоянной составляющей x<sub>0</sub> от нормированной разности частот *d* 

График функции  $\psi(d)$  приведен на рис. 3 для  $\varepsilon$ =0,9; a=0,8;  $\alpha_0^{-2} = 6,25$ . Кривые 1, 3, 5 получены при невырожденном фильтре и кривые 2, 4, 6 – при вырожденном фильтре. Кривые 1, 2 получены при  $\beta$ =0,3, кривые 3, 4 – при  $\beta$ =0,6, кривые 5, 6 – при  $\beta$ =0,9.



Рисунок 3 - Зависимость фазового угла  $\psi$  от нормированной разности частот d

После преобразования уравнения (8) получим

$$W(x) = \frac{\beta_1}{4\pi e^{-\beta_1 \pi} sh\pi \beta_1 R_{\Sigma}'} e^{\beta_1 z + \alpha_1 cos(x+P_0)} \int_{x}^{x+2\pi} e^{-[\beta_1 u + \alpha_1 cos(u+P_0)]} du,$$

где  $R_{\Sigma}^{'}$  находится из уравнения (4) путем замены  $\overline{V}$  на  $\beta_1$  и  $\rho$  на  $\alpha_1$ .

В работе [5] среднее время до срыва слежения представлено уравнением

$$\gamma_{c} = \frac{2\pi t h \pi \beta_{I}}{\beta} R_{\Sigma} [\alpha_{I}(r), \beta_{I}, \varepsilon].$$

Среднее значение частотного рассогласования может быть найдено с помощью уравнения [5]

$$\beta_c = \beta/R_{\Sigma}[\alpha_1(r),\beta_1,\varepsilon]$$

На рис. 4 приведены кривые ПРВ рассчитанные по методу [4] и [5]. Кривые на рис. 4а получены для  $\varepsilon$ =0,9; d=4;  $\beta$ =0,3; a=0,8;  $\alpha_0^{-2} = 6,25$ . Кривые 1, 4, 7 получены при вырожденном фильтре, кривые 2, 5, 8 при невырожденном фильтре по методу [5] и кривые 3, 6, 9 по методу [4]. Кривые 1, 2, 3 получены при r=1, кривые 4, 5, 6 – при r=2, кривые 7, 8, 9 – при r=4. Кривые на рис. 46 получены для  $\varepsilon$ =0,9; d=4; r=1; a=0,8;  $\alpha_0^{-2} = 6,25$ . Здесь кривые 7, 8, 9 получены при вырожденном фильтре, кривые 4, 5, 6 при невырожденном фильтре по методу [5] и кривые 1, 2, 3 по методу [4]. Кривые 1, 4, 7 получены при  $\beta$ =0, кривые 2, 5, 8 – при  $\beta$ =0,3, кривые 3, 6, 9 – при  $\beta$ =0,6. Кривые, полученные для вырожденного и невырожденного фильтра по методу [4] накладываются друг на друга, за счет большого значения d.



Рисунок 4 – Сравнение ПРВ рассчитанных по методу [4] и [5]

На рис. 5 приведены кривые среднего времени до срыва слежения при  $\varepsilon$ =0,9; d=4; a=0,025;  $\alpha_0^{-2} = 1600$ . Кривые 1, 3, 5 – рассчитаны по методу [4] и кривые 2, 4, 6 – по методу [5]. Кривые 1, 2 получены при  $\beta$ =0,3, кривые 3, 4 – при  $\beta$ =0,6, кривые 5, 6 – при  $\beta$ =0,9. Вследствие большого значения d, кривые на рис. 5 для вырожденного и невырожденного фильтра накладываются друг на друга.



Рисунок 5 – Зависимость среднего времени до срыва синхронизации от отношения сигнал/шум

На рис. 6 приведены кривые среднего значения частотного рассогласования при  $\varepsilon$ =0,9; d=4; a=0.025;  $\alpha_0^{-2} = 1600$ . Кривые 1, 3, 5 – рассчитаны по методу [4] и кривые 2, 4, 6 по методу [5]. Кривые 1, 2 получены при  $\beta$ =0,3, кривые 3, 4 – при  $\beta$ =0,6, кривые 5, 6 – при  $\beta$ =0,9. Наложение, как и в предыдущем случае, вызвано высоким значением d.



Рисунок 6 – Зависимость среднего значения частотного рассогласования от отношения сигнал/шум

#### Заключение

Таким образом, сравнивая два подхода к вычислению статистических характеристик фазовой автоподстройки при комбинированном воздействии, находим их несущественные отличия, особенно при значительных расстройках  $\beta$  (Рис. 5, 6) и малых значениях отношения сигнал/шум г (Рис. 4). Следует так же отметить что метод [4] более прост в вычислениях по сравнению с методом [5].

#### Литература

- Шахтарин Б.И. Анализ систем синхронизации при наличии помех. М.: ИПРЖР, 1996. – 252 с.
- 2. Meyr H., Ascheid G. Synchronization in digital communications. N.Y. Wiley, 1990. 510 pp.
- Stephens D.R. Phase locked loops -for Wireless communications. Digital, analog and implementations. 2nd ed. N.Y. – Kluwer. – 2002. – 421 pp.
- Шахтарин Б.И. Статистическая динамика систем синхронизации. М.: Радио и связь, 1998. – 488 с.
- Karsi M.F. Lindsey W.C. Effects of CW interference on phase-locked loop performance // IEEE Ttransactions on Communications. 2000, v48, №5, pp. 886-896.
- 6. Шахтарин Б.И., Сизых В.В., Сидоркина Ю.А. Синхронизация в радиосвязи и радионавигации. М.: Горячая линия Телеком, 2011. 278 с.
- Шахтарин Б.И., Асланов Т.Г. Сравнительный анализ характеристик воздействия помех на системы синхронизации // Телекоммуникационные системы и технологии: 4ый Межд. радиоэлек. форум. Украина, Харьков, 2011. С. 187-190.

### electronic scientific and technical periodical SCIENCE and EDUCATION EL Nº F5 77 - 48211. Nº0421200025. ISSN 1994-0408

# Statistical dynamics of second-order phase-locked loop under the influence of combined noise.

### 77-30569/359541

# 05, May 2012 Shahtarin B.I, Aslanov T.G.

> Russia, Bauman Moscow State Technical University shakhtarin@mail.ru tabasik@gmail.com

A comparative analysis of statistical characteristics of phase locked loop was carried out, when harmonic interference along with noise influences on its entrance. As the result of solving of Fokker-Planck-Kolmogorov equation (FPK), the probability density function (PDF) of the error signal, the average time until loss of synchronization and the probability of skipped cycle were obtained. The comparison of two approaches of obtaining of statistical characteristic was carried out.

**Publications with keywords:** <u>average time</u>, <u>the frequency mismatch</u>, <u>tracking failure</u>, <u>self-tuning</u>

Publications with words: average time, the frequency mismatch, tracking failure, self-tuning

### References

1. Shakhtarin B.I. *Analiz sistem sinkhronizatsii pri nalichii pomekh* [Analysis of the systems of synchronization at presence of noise]. Moscow, IPRZhR Publ., 1996. 252 p.

2. Meyr H., Ascheid G. Synchronization in digital communications. N.Y., Wiley, 1990. 510 p.

3. Stephens D.R. *Phase – locked loops -for Wireless communications. Digital, analog and implementations.* 2nd ed. N.Y., Kluwer, 2002. 421p.

4. Shakhtarin B.I. *Statisticheskaia dinamika system sinkhronizatsii* [Statistical dynamics of the systems of synchronization]. Moscow, Radioisviaz', 1998. 488 p.

5. Karsi M.F. Lindsey W.C. Effects of CW interference on phase-locked loop performance. *IEEE Ttransactions on Communications*, 2000, vol. 48, no. 5, pp. 886-896.

6. Shakhtarin B.I., Sizykh V.V., Sidorkina Iu.A. *Sinkhronizatsiia v radiosviazi i radionavigatsii* [Synchronization in radiocommunication and radionavigation]. Moscow, Goriachaia liniia – Telekom, 2011. 278 p.

7. Shakhtarin B.I., Aslanov T.G. Sravnitel'nyi analiz kharakteristik vozdeistviia pomekh na sistemy sinkhronizatsii [Comparative analysis of the characteristics of the impact of noise on the

synchronization system]. *Telekommunikatsionnye sistemy i tekhnologii: 4-yi Mezhd. radioelek. Forum* [Telecommunication systems and technologies: 4th Int. radio-electronic forum]. Ukraina, Khar'kov, 2011, pp. 187-190.