НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

Стабилизация неминимально фазовых аффинных систем с векторным управлением

08, август 2012

DOI: 10.7463/0812.0450613

Ткачев С.Б.

УДК 517.977

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

mathmod@bmstu.ru

Введение

В теории нелинейных динамических систем с управлением известен ряд важных теоретических результатов, позволяющих для достаточно широкого класса систем решать задачи стабилизации положений равновесия с использованием преобразования таких систем к специальным видам. Так, для аффинных систем (нелинейных систем, линейным по управлению) с использованием дифференциально-геометрического подхода получены условия эквивалентности этих систем и систем квазиканонического видов [1, 2].

Функцию, определяющую преобразование аффинной системы к квазиканоническому виду, часто удобно рассматривать как выход системы и использовать для исследования свойств системы и построения стабилизирующих обратных связей теорию нормальной формы [3].

Для решения задачи стабилизации положения равновесия стационарной аффинной системы, преобразованной к квазиканоническому виду или нормальной форме, существенным является наличие свойства минимальной фазовости и для минимально фазовых систем решение задачи стабилизации положения равновесия известно.

В случае, если аффинная система не является минимально фазовой, проблема стабилизации ее положения равновесия оказалась достаточно сложной. Одним из методов, позволяющих найти стабилизирующую обратную связь для неминимально фазовой системы, является метод виртуальных выходов [4–6]. Применение этого метода связано с анализом нелинейной подсистемы, выделяющейся после преобразования исходной системы к регулярному квазиканоническому виду, и линеаризации системы квазиканонического вида обратной связью по части переменных, то есть подсистемы, определяющей нулевую динамику.

Для аффинных систем с векторным управлением нормальная форма и нулевая динамика введены в работе [7], где указан ряд присущих этому случаю особенностей. В векторном случае нахождение таких векторных виртуальных выходов, при которых в положении равновесия определена векторная относительная степень и при которых аффинная система является минимально фазовой, также имеет ряд особенностей.

Обобщим на векторный случай часть результатов метода виртуальных выходов, полученных в [4] для скалярного случая, и укажем условия, при которых существует виртуальный выход с однородной отностительной степенью $\rho = (2, \ldots, 2)$, которому соответствует асимптотически устойчивая нулевая динамика, а также обоснуем метод нахождения таких выходов.

1. Преобразования и нормальная форма аффинных систем с векторными входом и выходом

Рассмотрим стационарную аффинную систему с векторным управлением

$$\dot{x} = A(x) + \sum_{i=1}^{m} B_i(x) u_i, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$, $A(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))^{\mathrm{T}}$, $A(0) = 0$, $B(x) = (B_1(x), \ldots, B_m(x))$, $B_j(x) = (b_j^1(x), \ldots, b_j^n(x))^{\mathrm{T}}$, $j = \overline{1, m}$, $\mathrm{rang} B(0) = m$, $m \geq 2$, $a_i(x)$, $b_j^i(x) \in C^\infty(\Omega)$, Ω — открытое множество, содержащее положение равновесия $x = 0$.

Аффинной системе (1) на $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ взаимно однозначно соответствуют векторные поля

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ и } B_j = \sum_{i=1}^{n} b_j^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{2}$$

Рассмотрим векторную функцию $\phi(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_m(x))^T$, где $\phi_i(x) \in C^\infty(\Omega)$, $\phi_i(0) = 0$, $i = \overline{1, m}$ в качестве m-мерного виртуального выхода аффинной системы (1).

Предположим, что существуют такие числа $\rho_i \geq 1$, $i = \overline{1, m}$, что выполнены следующие два условия:

1) при $k < \rho_i - 1$ функции $L_{B_j} L_A^k \phi_i(x), \quad 1 \leq j \leq m$, равны нулю в некоторой окрестности точки $x = 0$;

2) матрица

$$A_\rho(x) = \begin{pmatrix} L_{B_1} L_A^{\rho_1 - 1} \phi_1(x) & \ldots & L_{B_m} L_A^{\rho_1 - 1} \phi_1(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{B_1} L_A^{\rho_m - 1} \phi_m(x) & \ldots & L_{B_m} L_A^{\rho_m - 1} \phi_m(x) \end{pmatrix} \tag{3}$$

невырождена в точке $x = 0$. В этом случае кортеж $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_m)$ называют [3] векторной относительной степенью аффинной системы (1) с векторным виртуальным выходом $y = \phi(x)$ в точке $x = 0$.

Поскольку будут рассматриваться различные виртуальные выходы для одной и той же системы, будем говорить о векторной относительной степени виртуального выхода системы.

Если векторная относительная степень ρ равна $(1, \ldots, 1)$ в точке $x = 0$, то это означает, что матрица

$$\begin{pmatrix} L_{B_1} \phi_1(x) & \ldots & L_{B_m} \phi_1(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{B_1} \phi_m(x) & \ldots & L_{B_m} \phi_m(x) \end{pmatrix} \tag{4}$$

невырождена в точке $x = 0$.

Если $\rho_i > 1$, то первое условие означает, что функция $\phi_i(x)$ в окрестности точки $x = 0$ является решением системы уравнений в частных производных

$$L_{B_j} L_A^k \phi_i = 0, \quad k = \overline{0,\ \rho_i - 2}, j = \overline{1,\ m}, \tag{5}$$

или эквивалентной системы в частных производных первого порядка

$$\operatorname{ad}_A^k B_j \phi_i = 0, \quad k = \overline{0,\, \rho_i - 2}, j = \overline{1,\, m}.$$

При выполнении условий 1)-2) управление вида

$$u = A_\rho^{-1}(x) \begin{pmatrix} -L_A^{\rho_1}\phi_1(x) - \sum\limits_{k=0}^{\rho_1 - 1} c_{1k} L_A^k \phi_1(x) \\ \dots \\ -L_A^{\rho_m}\phi_m(x) - \sum\limits_{k=0}^{\rho_m - 1} c_{mk} L_A^k \phi_m(x) \end{pmatrix} \tag{6}$$

стабилизирует положение равновесия $x = 0$, для чего достаточно матрицу коэффициентов (c_{ij}) выбрать в (6) так, чтобы все корни уравнений

$$\lambda_i^{\rho_i} + \sum_{j=0}^{\rho_i - 1} c_{ij} \lambda_i^j = 0, \quad 1 \le i \le m$$

имели отрицательные действительные части.

Если существует виртуальный m-мерный выход $\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_m(x))^T$, при котором относительная степень в точке $x = 0$ равна $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)$, $|\rho| \le n$, и при дополнительном условии инволютивности распределения $G = \operatorname{span}\{B_1, \dots, B_m\}$, порожденного векторными полями B_j, $j = \overline{1, m}$ системы (1), в окрестности точки $x = 0$ существует такая замена переменных [3]

$$z^i = \Phi^i(x), \quad 1 \le i \le m, \quad \eta = \Psi(x), \tag{7}$$

где

$$z^i = (z_1^i, \dots, z_{\rho_i}^i)^{\text{т}}, \quad 1 \le i \le m,$$

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-|\rho|})^{\text{т}},$$

$$\Phi^i(x) = (\phi_i(x), L_A\phi_i(x), \dots, L_A^{\rho_i - 1}\phi_i(x))^{\text{т}},$$

$$\Phi^i(0) = 0, \quad \Psi(0) = 0,$$

после выполнения которой аффинная система (1) с векторным виртуальным выходом $y = \phi(x)$ будет записана в нормальной форме

$$\begin{aligned}
&\dot z_1^1 = z_2^1, \ldots, \dot z_{\rho_1-1}^i = z_{\rho_1}^1,\\
&\dot z_{\rho_1}^1 = f_1(z,\eta) + g_{11}(z,\eta)u_1 + \ldots + g_{1m}(z,\eta)u_m,\\
&\ldots,\\
&\dot z_1^m = z_2^m, \ldots, \dot z_{\rho_m-1}^m = z_{\rho_m}^m,\\
&\dot z_{\rho_m}^m = f_m(z,\eta) + g_{m1}(z,\eta)u_1 + \ldots + g_{mm}(z,\eta)u_m,\\
&\dot\eta = q(z,\eta),\\
&y = (z_1^1, z_1^2, \ldots, z_1^m)^{\text{т}},
\end{aligned} \tag{8}$$

где $f_i(0,0) = 0$, $i = \overline{1,m}$, $q(0,0) = 0$, $z = ({z^1}^{\text{т}}, {z^2}^{\text{т}}, \ldots, {z^m}^{\text{т}})^{\text{т}}$, причем матрица $(g_{ij}(0,0))_{i,j=\overline{1,m}}$ невырождена.

Системе (8) соответствует система

$$\dot\eta = q(0,\eta), \tag{9}$$

которую называют нулевой динамикой. Если ее положение равновесия $\eta = 0$ асимптотически устойчиво, то аффинную систему (1) с векторным выходом $y = \phi(x)$ называют минимально фазовой (в точке $x = 0$).

Если для аффинной системы (1) найден такой векторный виртуальный выход $y = \phi(x)$, $\phi(0) = 0$, при котором система имеет относительную степень $\rho_1 + \ldots + \rho_m = |\rho|$ в положении равновесия $x = 0$ и она минимально фазовая в этой точке, то управление вида (6) локально стабилизирует положение равновесия $x = 0$ этой системы [3].

2. Случай однородной векторной степени ($\rho_i = 2$)

Задача нахождения виртуальных выходов с соответствующей асимптотически устойчивой нулевой динамикой для случая однородной векторной степени $(1, \ldots, 1)$ исследована в [8]. Рассмотрим случай однородной векторной степени $(2, \ldots, 2)$.

Пусть для системы (1) задан некоторый виртуальный выход

$$\phi(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_m(x))^{\text{т}}, \tag{10}$$

где $\phi_i(x) \in C^\infty(\Omega)$, $\phi_i(0) = 0$, $i = \overline{1, m}$, при котором векторная относительная степень системы (1), (10) в точке $x = 0$ равна $\rho = (2, \ldots, 2)$, где $|\rho| = 2m$, то есть $\rho_i = 2$, $i = \overline{1, m}$.

Пусть распределение $G = \mathrm{span}\{B_1, \ldots, B_m\}$ инволютивно. Запишем систему (1), (10) в соответствующей нормальной форме

$$\begin{aligned}
&\dot z_1^1 = z_2^1, \\
&\dot z_2^1 = f_1(z, \eta) + g_{11}(z, \eta)u_1 + \ldots + g_{1m}(z, \eta)u_m, \\
&\ldots, \\
&\dot z_1^m = z_2^m, \\
&\dot z_2^m = f_m(z, \eta) + g_{m1}(z, \eta)u_1 + \ldots + g_{mm}(z, \eta)u_m, \\
&\dot\eta = q(z, \eta), \\
&y = (z_1^1, z_1^2, \ldots, z_1^m)^{\mathrm{T}},
\end{aligned} \tag{11}$$

где $f = (f_1, \ldots, f_m)^{\mathrm{T}}$, $f(0, 0) = 0$, $q(0, 0) = 0$, $z = (z_1^1, z_2^1, \ldots, z_1^m, z_2^m)^{\mathrm{T}}$.

Будем предполагать, что нормальная форма определена в точке $(z, \eta) = (0, 0)$, а матрица $(g_{ij}(0, 0))_{i,j=\overline{1,m}}$ невырождена.

Для удобства обозначим

$$z^1 = (z_1^1, \ldots, z_1^m)^{\mathrm{T}}, \quad z^2 = (z_2^1, \ldots, z_2^m)^{\mathrm{T}}, \quad u = (u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{T}}.$$

С использованием введенных обозначений нормальная форма (11) запишется в виде

$$\begin{aligned}
&\dot z^1 = z^2, \\
&\dot z^2 = f(z^1, z^2, \eta) + g(z^1, z^2, \eta)u, \\
&\dot\eta = q(z^1, z^2, \eta), \\
&y = z^1.
\end{aligned} \tag{12}$$

Как и в скалярном случае [4], для построения виртуальных выходов будем использовать виртуальные управления $v_i^1(\eta)$, $v_i^2(\eta)$, $i = \overline{1, m}$. Обозначим $v^1(\eta) = (v_1^1(\eta), \ldots, v_m^1(\eta))^{\mathrm{T}}$, $v^2(\eta) = (v_1^2(\eta), \ldots, v_m^2(\eta))^{\mathrm{T}}$.

Теорема 1. Пусть система (1) с виртуальным выходом ϕ, $\phi\Big|_{x=0} = 0$, имеет в точке $x = 0$ векторную относительную степень $\rho = (2, \ldots, 2)$, а нулевая динамика асимптотически устойчива. Если в переменных (z, η) нормальной формы (12) $\det \dfrac{\partial\phi}{\partial z^1}\Big|_{z=0,\eta=0} \neq 0$, то существуют функции $v^1(\eta)$, $v^2(\eta)$, $v^i(0)=0$, $i=1,2$, стабилизирующие положение равновесия $\eta=0$ системы

$$\dot{\eta} = q(v^1, v^2, \eta) \tag{13}$$

с управлениями v^1, v^2, причем

$$\frac{\mathrm{d}v^1(\eta)}{\mathrm{d}t}\Big|_{\dot{\eta}=q(v^1(\eta),v^2(\eta),\eta)} = v^2(\eta). \tag{14}$$

◀ Согласно (5) каждая функция ϕ_k, $k=\overline{1,m}$, в некоторой окрестности точки x является решением системы уравнений $L_{B_i}\phi_k = 0$, $i=\overline{1,m}$, которую в переменных (z,η) системы (12) можно записать так: $\dfrac{\partial\phi^k}{\partial z_i^2} = 0$, $i,k=\overline{1,m}$. Следовательно, в этих переменных $\phi=\phi(z^1,\eta)$.

Построим нормальную форму системы (1) с виртуальным выходом ϕ, используя запись этой системы в виде нормальной форме (12). Для этого в системе (12) сделаем замену переменных

$$\overline{z}^1 = \phi(z^1,\eta),\ \overline{z}^2 = \phi^1(z^1,z^2,\eta),\ \overline{\eta}=\eta, \tag{15}$$

где

$$\phi^1(z^1,z^2,\eta) = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\,\Big|_{(12)} = \frac{\partial\phi(z^1,\eta)}{\partial z^1}z_2 + \frac{\partial\phi(z^1,\eta)}{\partial\eta}q(z,\eta).$$

Соотношения (15) являются заменой переменных в окрестности точки $(z,\eta) = 0$, так как

$$\det\frac{\partial(\overline{z}^1,\overline{z}^2)}{\partial(z^1,z^2)}\Big|_{z=0,\eta=0} = \det\left(\frac{\partial\phi}{\partial z^1}\frac{\partial\phi^1}{\partial z^2}\right)\Big|_{z=0,\eta=0} \neq 0,$$

поскольку $\det\dfrac{\partial\phi}{\partial z^1}\Big|_{z=0,\eta=0} \neq 0$ по условию теоремы, а $\det\dfrac{\partial\phi^1}{\partial z_2}\Big|_{z=0,\eta=0} \neq 0$ благодаря тому, что относительная степень системы (12) с виртуальным выходом ϕ равна $(2,\ldots,2)$ в точке $(z,\eta)=0$. В переменных (15) система (12) запишется в виде

$$\dot{\overline{z}}^1 = \overline{z}^2,\ \dot{\overline{z}}^2 = \overline{f}(\overline{z},\overline{\eta}) + \overline{g}(\overline{z},\overline{\eta})u, \tag{16}$$

$$\dot{\overline{\eta}} = q(w^1(\overline{z}^1,\overline{\eta}), w_2(\overline{z}^1,\overline{z}^2,\overline{\eta}),\overline{\eta}). \tag{17}$$

Здесь $\overline{g}(\overline{z}, \overline{\eta}) = \frac{\partial \phi^1(z^1, z^2, \eta)}{\partial z^2} g(z, \eta)$, где

$$z^1 = w^1(\overline{z}^1, \overline{\eta}),\ z^2 = w^2(\overline{z}^1, \overline{z}^2, \overline{\eta}),\ \eta = \overline{\eta} \tag{18}$$

есть обратная к (15) замена переменных. Запись (16) является нормальной формой, соответствующей виртуальному выходу ϕ, поскольку

$$\det \overline{g}(0,0) = \det\left(\frac{\partial \phi^1}{\partial z_2}(0,0,0) g(0,0)\right) \neq 0.$$

Полагая в (17) $\overline{z}^1 = 0$, $\overline{z}^2 = 0$, получаем систему нулевой динамики

$$\dot{\overline{\eta}} = q(w^1(0, \overline{\eta}), w^2(0,0,\overline{\eta}), \overline{\eta}). \tag{19}$$

После замены $\overline{\eta} = \eta$ и введения обозначений

$$v^1(\eta) = w^1(0, \eta),\ v^2(\eta) = w^2(0,0,\eta), \tag{20}$$

система (19) совпадает с системой (13), замкнутой обратными связями (20). Асимптотическая устойчивость точки $\overline{\eta} = 0$ системы нулевой динамики (19) означает, что обратные связи $v^1(\eta), v^2(\eta)$ стабилизируют положение равновесия $\eta = 0$ системы (13).

Поскольку $\dot{z}^1 = z^2$, то из (16)–(18) следует, что

$$\left.\frac{\mathrm{d}w^1(\overline{z}^1, \overline{\eta})}{\mathrm{d}t}\right|_{(16)-(17)} = w^2(\overline{z}^1, \overline{z}^2, \overline{\eta}),$$

то есть

$$\frac{\partial w^1(\overline{z}^1, \overline{\eta})}{\partial \overline{z}^1} \overline{z}^2 + \frac{\partial w^1(\overline{z}^1, \overline{\eta})}{\partial \overline{\eta}} q(w^1(\overline{z}^1, \overline{\eta}), w^2(\overline{z}^1, \overline{z}^2, \overline{\eta}), \overline{\eta}) = w^2(\overline{z}^1, \overline{z}^2, \overline{\eta}),$$

что при $\overline{z}^1 = 0$, $\overline{z}^2 = 0$, $\overline{\eta} = \eta$ с учетом (20) совпадает с (14). ►

Теорема 2. Пусть управления $v^1 = v^1(\eta)$, $v^2 = v^2(\eta)$ стабилизируют положение равновесия $\eta = 0$ системы (13) и удовлетворяет условию (14). Если система (12) с виртуальным выходом $\phi(z, \eta) = z^1 - v^1(\eta)$ имеет векторную относительную степень $(2, \ldots, 2)$ в точке $(z, \eta) = 0$, то нулевая динамика, соответствующая виртуальному выходу ϕ, асимптотически устойчива в точке $\eta = 0$.

◄ Соотношения

$$\begin{aligned} &\overline{z}^1 = \phi(z,\eta) = z^1 - v^1(\eta), \\ &\overline{z}^2 = \frac{\mathrm{d}\phi(z,\eta)}{\mathrm{d}t}\Big|_{(12)} = z^2 - \frac{\partial v_1(\eta)}{\partial \eta} q(z^1, z^2, \eta), \\ &\overline{\eta} = \eta \end{aligned} \tag{21}$$

задают замену переменных, поскольку определитель матрицы Якоби $\dfrac{\partial(\overline{z}^1, \overline{z}^2)}{\partial(z^1, z^2)}$ в точке $(z,\eta) = 0$ равен

$$\det\left(E - \frac{\partial v^1}{\partial \eta}(\eta)\frac{\partial q}{\partial z^2}(z^1, z^2, \eta)|_{z=0,\eta=0}\right) \neq 0.$$

Последнее неравенство справедливо, поскольку матрица коэффициентов

$$\tilde{g}(z,\eta) = \left(E - \frac{\partial v^1}{\partial \eta}(\eta)\frac{\partial q}{\partial z^2}(z^1, z^2, \eta)\right) g(z,\eta)$$

при управлении в

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi(z,\eta)}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{(12)}$$

невырождена в точке $(z,\eta) = (0,0)$, так как векторная относительная степень равна $(2,\ldots,2)$.

В переменных (21) система (12) с виртуальным выходом ϕ запишется в нормальной форме

$$\dot{\overline{z}}^1 = \overline{z}^2,\ \dot{\overline{z}}^2 = \overline{f}(\overline{z},\overline{\eta}) + \overline{g}(\overline{z},\overline{\eta})u, \tag{22}$$

$$\dot{\overline{\eta}} = q(\overline{z}^1 + v^1(\overline{\eta}), w^2(\overline{z}^1, \overline{z}^2, \overline{\eta}), \overline{\eta}), \tag{23}$$

где использована обратная для (21) замена переменных

$$z^1 = \overline{z}^1 + v^1(\overline{\eta}),\ z^2 = w^2(\overline{z}^1, \overline{z}^2, \overline{\eta}),\ \eta = \overline{\eta}.$$

Уравнения соответствующей нулевой динамики находим, полагая $\overline{z}^1 = 0$, $\overline{z}^2 = 0$ в (23), что с учетом замены $\overline{\eta} = \eta$ приводит к системе

$$\dot{\eta} = q(v^1(\eta), w^2(0,0,\eta), \eta). \tag{24}$$

Поскольку $\dot{z}^1 = z^2$, то $\dot{\overline{z}}^1 + \dot{v}^1(\overline{\eta}) = w^2(\overline{z}^1, \overline{z}^2, \overline{\eta})$, что при $\overline{z}^1 = 0$, $\overline{z}^2 = 0$ после замены $\overline{\eta} = \eta$ дает соотношение

$$\frac{\partial v^1}{\partial \eta}(\eta) q(v^1(\eta), w^2(0,0,\eta), \eta) = w^2(0,0,\eta).$$

Переписав (14) в виде

$$\frac{\partial v^1(\eta)}{\eta} q(v^1(\eta), v^2(\eta), \eta) = v^2(\eta),$$

находим, что $w^2(0,0,\eta) = v^2(\eta)$ в окрестности точки $\eta = 0$, поскольку обе эти функции равны 0 при $\eta = 0$ и являются решением системы уравнений

$$s(z^2, \eta) = z^2 - \frac{\partial v^1}{\partial \eta}(\eta) q(v^1(\eta), z^2, \eta) = 0 \tag{25}$$

относительно z^2. Система уравнений (25) имеет единственное решение в окрестности точки $z^2 = 0$, $\eta = 0$, так как в этой точке определитель матрицы Якоби $\dfrac{\partial s(z^2, \eta)}{\partial z^2}$ отличен от нуля благодаря тому, что относительная степень системы (12) с виртуальным выходом $\phi = z^1 - v^1(\eta)$ в точке $(z, \eta) = 0$ равна $(2, \ldots, 2)$.

Следовательно, уравнения (24) нулевой динамики совпадают с системой (13), замкнутой управлениями $v^1(\eta)$, $v^2(\eta)$, и поэтому нулевая динамика асимптотически устойчива в точке $\eta = 0$.

В заключение отметим, что в переменных аффинной системы (1) $\phi = h(x) - v^1(\Psi(x))$. ▶

З а м е ч а н и е 1. Если в нормальной форме (12) аффинной системы (1) с фиксированным виртуальным выходом (10) $\det \dfrac{\partial q}{\partial z_2}(0,0) = 0$, то:

1) в формулировке теоремы 1 условие $\det \dfrac{\partial \phi}{\partial z^1}\Big|_{z=0,\eta=0} \neq 0$ можно опустить, так как оно следует из того, что система (1) с виртуальным выходом ϕ имеет в точке $x = 0$ векторную относительную степень $(2, \ldots, 2)$;

2) в формулировке теоремы 2 можно опустить условие того, что система (12) с виртуальным выходом $\phi(z, \eta) = z^1 - v^1(\eta)$ имеет векторную относительную

степень $(2, \ldots, 2)$ в точке $(z, \eta) = 0$, так как в данном случае оно всегда выполнено;

3) теоремы 1, 2 в этом случае утверждают, что для существования у аффинной системы (1) виртуального выхода ϕ, $\phi\Big|_{x=0} = 0$, при котором она имеет в точке $x = 0$ векторную относительную степень $(2, \ldots, 2)$ и асимптотически устойчивую нулевую динамику, необходимо и достаточно, чтобы система (13) с управлениями v^1, v^2 была стабилизируема в состоянии $\eta = 0$ обратными связями $v^1(\eta)$, $v^2(\eta)$, удовлетворяющими условию (14), причем одним из таких виртуальных выходов является $\phi = z^1 - v^1(\eta) = h(x) - v^1(\Psi(x))$.

Заключение

Метод виртуальных выходов обобщен на случай аффинных систем с векторным управлением и выходом, имеющим однородную векторную относительную степень $(2, \ldots, 2)$. Для таких систем получены необходимые и достаточные условия существования нового выхода с такой же относительной степенью, при котором соответствующая ему нормальная форма имеет асимптотически устойчивую нулевую динамику.

Полученные условия являются конструктивными, поскольку указывают метод нахождения новых выходов с требуемыми свойствами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 11-01-00733, 12-07-00329) и Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-3659.2012.1).

Список литературы

1. Крищенко А.П. Преобразование нелинейных систем и стабилизация программных движений // Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана. 1988. № 512. С. 69 – 87.
2. Крищенко А.П., Клинковский М. Г. Преобразование аффинных систем с управлением и задача стабилизации // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 11. С. 1945 – 1952.

3. Isidori A. Nonlinear control systems. London: Springer-Verlag, 1995. 587 p.
4. Крищенко А.П., Панфилов Д.Ю., Ткачев С.Б. Построение минимально фазовых аффинных систем // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 11. С. 1483 – 1489.
5. Output maps with associated asymptotically stable zero dynamics / A.P. Krishchenko, D.U. Panfilov, K.E. Starkov, S.B. Tkachev // Nonlinear Control Systems'04: Proc. of VI IFAC Symp. Stuttgart, 2004. V. 1. P. 329 – 334.
6. Ткачев С.Б. Стабилизация неминимально фазовых аффинных систем с использованием линеаризации по части переменных // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журнал. 2011. № 11 Режим доступа: http://technomag.edu.ru/doc/255087.html (дата обращения: 10.04.2012)
7. Isidori A., Moog C. On the nonlinear equivalent of the notion of transmission zeros // Modeling and Adaptive Control. New York, 1988. P. 203-208.
8. Панфилов Д.Ю. Построение минимально фазовых систем и задача стабилизации. // Автоматика и телемеханика. 2004. № 10. С. 25 – 39.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

Stabilization of nonminimum-phase multi-input affine systems

08, August 2012

DOI: 10.7463/0812.0450613

S. B. Tkachev

Russia, Bauman Moscow State Technical University

mathmod@bmstu.ru

For multi-input nonlinear dynamic systems the problem of state feedback design stabilizing position of equilibrium is solved using the method of virtual outputs. Affine systems are considered for which smooth function (a system output) defining transformation of the system to a normal form with a vectorial relative level of an output (2, , 2) is known. If zero dynamics of the system isn't asymptotically stable, that is the nonlinear system isn't minimum-phase, for the specified class of systems necessary and sufficient conditions of existence of such new outputs having the relative level (2, , 2) for which the corresponding normal form has asymptotically stable zero dynamics are proved. The received results generalize the results received earlier for affine systems with scalar input.

References

1. Krishchenko A.P. Preobrazovanie nelineinykh sistem i stabilizatsiia programmnykh dvizhenii [Transformation of nonlinear systems and stabilization of programmed motions]. *Trudy MVTU im. N.E. Baumana* [Proc. of the Bauman MSTU], 1988, no. 512, pp. 69 – 87.
2. Krishchenko A.P., Klinkovskii M.G. Preobrazovanie affinnykh sistem s upravleniem i zadacha stabilizatsii [The transformation of affine systems with control and stabilization problem]. *Differentsial'nye uravneniia*. 1992, vol. 28, no. 11, pp. 1945 – 1952.

3. Isidori A. *Nonlinear control systems*. London: Springer-Verlag, 1995. 587 p.
4. Krishchenko A.P., Panfilov D.Iu., Tkachev S.B. Postroenie minimal'no fazovykh affinnykh sistem [Construction of minimum phase affine systems]. *Differentsial'nye uravneniia*, 2002, vol. 38, no. 11, pp. 1483 – 1489.
5. Krishchenko A.P., Panfilov D.U., Starkov K.E., Tkachev S.B. Output maps with associated asymptotically stable zero dynamics *Proc. of 6th IFAC Symp. "Nonlinear Control Systems'04"*. Stuttgart, 2004, vol. 1, pp. 329 – 334.
6. Tkachev S.B. Stabilizatsiia neminimal'no fazovykh affinnykh sistem s ispol'zovaniem linearizatsii po chasti peremennykh [Stabilization of non-minimal phase affine systems with linearization of the part of varibles]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2011, no. 11. Available at: http://technomag.edu.ru/doc/255087.html, accessed 10.04.2012.
7. Isidori A., Moog C. On the nonlinear equivalent of the notion of transmission zeros // *Modeling and Adaptive Control*. New York, 1988. P. 203 – 208.
8. Panfilov D.Iu. Postroenie minimal'no fazovykh sistem i zadacha stabilizatsii [Construction of minimum phase systems, and the problem of stabilization]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2004, no. 10, pp. 25 – 39.