НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

Формулы Фейнмана для параболического уравнения с бигармоническим дифференциальным оператором на конфигурационном пространстве

08, август 2012

DOI: 10.7463/0812.0445534

Бузинов М. С., Бутко Я. А.

УДК 517.987.4

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

Maxim.cad@gmail.com

Введение

Объектом исследования является параболическое уравнение с бигармоническим дифференциальным оператором $\Delta(\Delta\omega)$ и аддитивным возмущением (дополнительное слагаемое, или "потенциал" в некоторых разделах физики) по переменной конфигурационного пространства. Подобные уравнения находят свое применение в разных областях физики, химии, биологии и компьютерных наук. Так, например, они используются в описании диффузии на поверхности тел [1], описании процессов образования снега [2] и движения веществ в легких [3], описании процессов изменения головного мозга [4], построении поверхностей в компьютерной геометрии [5], восстановлении изображений [6].

В работе получены представления решения задачи Коши рассматриваемого уравнения. Эти представления найдены в виде формул Фейнмана, то есть в виде пределов кратных интегралов при стремлении кратности к бесконечности. При этом подынтегральные выражения в полученных формулах Фейнмана содержат только элементарные функции. Это позволяет использовать такие представления решения рассматриваемой задачи для численного моделирования динамики.

Термин "формула Фейнмана" в данном контексте был предложен в работе [7]; также в работах Смолянова и его соавторов [7, 8, 9, 10, 11] был предложен метод получения формул Фейнмана для широкого класса эволюционных уравнений. В настоящее время этот метод активно используется для описания классической, квантовой и стохастической динамики на различных геометрических объектах (см., например, [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23]). Начало данному методу положила работа Ричарда Фейнмана 1948 г. [24], в которой рассматривалось уравнение Шредингера с потенциалом и (на эвристическом уровне строгости) было получено решение задачи Коши для такого уравнения в виде предела конечнократных интегралов по декартовым степеням конфигурационного пространства соответствующей классической системы при стремлении кратности к бесконечности. Строгое математическое обоснование результатов Фейнмана было приведено Нельсоном [25] на основе формулы Троттера. Предложенный Смоляновым и его соавторами подход опирается на теорему Чернова [26], существенно обобщающую формулу Троттера.

1. Предварительные сведения

Рассмотрим задачу Коши следующего вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial t}(t, \boldsymbol{x}) = L\omega(t, \boldsymbol{x}), \\ \omega(0, \boldsymbol{x}) = \omega_0(\boldsymbol{x}). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь L — некоторый линейный оператор, действующий на функцию ω, зависящую от времени $t \geq 0$ и переменной $\boldsymbol{x} \in Q$, где Q — некоторое множество, которое будем называть конфигурационным пространством эволюционной системы соответствующей задаче Коши (1).

Пусть $\mathcal{L}(X)$ — пространство всех линейных, непрерывных операторов $T\colon X \to X$, где X — банахово пространство, а $\mathrm{Dom}(T) = X$ — область определения оператора T.

Определение 1. Семейство ограниченных линейных операторов $(T_t)_{t\geq 0}$ в X называется *сильно непрерывной операторной полугруппой*, если $T_0 = \mathrm{Id}$, $T_{t+s} = T_t T_s$ для $t, s \geq 0$, $x \in X$, а также семейство сильно непрерывно, т.е. имеет место равенство $\lim\limits_{t\to 0} \|T_t x - x\|_X = 0$.

Оператор $L := \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{T_t x - x}{t}$ с областью определения

$$\mathrm{Dom}(L) := \left\{ x \in X\colon\ \exists\, Lx := \lim_{t\to 0} \frac{T_t x - x}{t} \right\}$$

называется *генератором* или производящим оператором полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$.

Можно показать [30], что для корректно поставленной в банаховом пространстве X задачи Коши (1) с начальным условием $\omega(0, x) = \omega_0(x)$, $\omega_0 \in \mathrm{Dom}(L)$ решение представляется в виде $\omega(t, \boldsymbol{x}) = T_t \omega_0(\boldsymbol{x})$. Таким образом решение задачи Коши (1) равносильно построению сильно непрерывной полугруппы операторов $(T_t)_{t\geq 0}$ с заданным генератором L.

Явный вид полугруппы операторов $(T_t)_{t\geq 0}$, разрешающей задачу Коши (1), часто невозможно найти. В этом случае используются методы аппроксимации полугрупп. Будем использовать метод приближения, основанный на теореме Чернова.

Определение 2. *Производная в нуле* функции $F\colon [0, \varepsilon) \to \mathcal{L}(X)$, $\varepsilon > 0$, — это линейное отображение $F'(0)\colon \mathrm{Dom}(F'(0)) \to X$, определяемое следующим образом:

$$F'(0)x := \lim_{t\to 0+} \frac{F(t)\,x - F(0)\,x}{t}, \tag{2}$$

где $\mathrm{Dom}(F'(0))$ — векторное пространство элементов из X, для которых данный предел существует (как сильный предел).

Теорема 1 (Чернов [12]). Пусть X — банахово пространство, $F\colon [0;\infty) \to \mathcal{L}(X)$ — (сильно) непрерывное отображение, такое, что $F(0) = \mathrm{Id}$ и $\|F(t)\| \le e^{Mt}$ для некоторой константы $M \in \mathbb{R}$ и $t \ge 0$. Пусть C — такое линейное подпространство $\mathrm{Dom}(F'(0))$, что сужение оператора $F'(0)$ на C замыкаемо. Пусть $(L; \mathrm{Dom}(L)) = \overline{F'(0) \upharpoonright C}$ — соответствующее замыкание. Если $(L; \mathrm{Dom}(L))$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $(T_t)_{t\ge0}$, то для всех $t_0 > 0$ последовательность операторов $(F(t/n))^n\big|_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к $(T_t)_{t\ge0}$ при $n \to \infty$ в сильной операторной топологии равномерно по $t \in [0; t_0]$, т.е.

$$T_t = \lim_{n\to\infty} \Bigl(F\Bigl(\frac{t}{n}\Bigr)\Bigr)^n. \tag{3}$$

Семейство операторов $F(t)$, для которого выполнены все условия теоремы Чернова по отношению к полугруппе $(T_t)_{t\ge0}$, называется эквивалентным по Чернову полугруппе $(T_t)_{t\ge0}$. Будем обозначать это так: $F(t) \sim T_t$. Как правило, $F(t)$ представляет собой семейство интегральных операторов.

Определение 3. Равенство (3) будем называть *формулой Фейнмана*. Формула Фейнмана называется *гамильтоновой*, если для всех $t \ge 0$ оператор $F(t)$ является псевдодифференциальным оператором. Формула Фейнмана называется *лагранжевой*, если для всех $t \ge 0$ оператор $F(t)$ является интегральным оператором, ядро которого выражается через элементарные функции.

Следующая теорема позволяет получать формулы Фейнмана для суммы (в смысле обычного сложения в $\mathcal{L}(X)$) операторов, действующих на функцию.

Теорема 2 (Формула Фейнмана для аддитивных возмущений [35]). Рассмотрим банахово пространство $\langle X, \|\cdot\|_X\rangle$ с соответствующей нормой. Пусть $\{T_t^k\}_{t\ge0}$, $k = 1, \ldots, n,$ — сильно непрерывные полугруппы на X с генераторами $L_k\omega = \lim\limits_{t\to0} \dfrac{T_t^k\omega - \omega}{t}$, и своими областями определения $D(L_k) = \Bigl\{\omega \in X\colon \exists \lim\limits_{t\to0} \dfrac{T_t^k\omega - \omega}{t} \in X\Bigr\}$. Предположим, что оператор $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$ с областью определения $D = \bigcap\limits_{k=1}^{n} D(L_k)$ замыкаем, и что замыкание этого оператора является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $(T_t)_{t\ge0}$ на X. Пусть $F_k(t)$, $k = 1, \ldots, m,$ — семейство операторов в X, эквивалентных по Чернову полугруппе $(T_t^k)_{t\ge0}$, т.е. для каждого $k = 1, \ldots, m$ имеет место $F_k(0) = \mathrm{Id}$, $\|F_k(t)\| \le e^{M_k t}$ для некоторого $M_k > 0$. Пусть также $D_k = \mathrm{core}(L_k) \subset D(L_k)$, где $\mathrm{core}(L_k)$ — существенная область оператора L_k, и для всех $\varphi \in D_k$ выполнено $\lim\limits_{t\to0} \Bigl\|\dfrac{F_k(t)\varphi - \varphi}{t} - L_k\varphi\Bigr\|_X = 0$. Предположим, что существует $D = \mathrm{core}(L)$ и вместе с тем $D \subset \bigcap\limits_{k=1}^{m} D_k$. Тогда семейство $F(t) = F_1(t) \circ F_2(t) \circ \ldots \circ F_n(t)$ эквивалентно по Чернову полугруппе $(T_t)_{t\ge0}$ и для $t \ge 0$ имеет место формула Фейнмана

$$T_t = \lim_{n\to\infty} \Bigl(F\Bigl(\frac{t}{n}\Bigr)\Bigr)^n$$

в сильной операторной топологии.

2. Задача Коши для параболического дифференциального уравнения с бигармоническим оператором на конфигурационном пространстве и разрешающая ее полугруппа

Перейдем к следующей задачи Коши на конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}) = -\Delta(\Delta\omega)(t,\boldsymbol{x}); \\ \omega(o,\boldsymbol{x}) = \omega_0(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{4}$$

где Δ — оператор Лапласа,

$$-\Delta(\Delta\omega)(t,\boldsymbol{x}) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^4}{\partial x_i^2\partial x_j^2}\omega(t,\boldsymbol{x}).$$

Поставленная задача Коши (4) будет решаться в банаховом пространстве $X = L_2(\mathbb{R}^n)$ квадратично интегрируемых функций со стандартной нормой

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f|^2(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}}\,.$$

На конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим норму $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}$. Мы предполагаем, что $\omega_0,\ \omega(t;\cdot)\in X$ для всех $t>0$.

Сперва мы найдем семейство операторов, разрешающее задачу Коши (4) и обладающее свойствами сильно непрерывной полугруппы, которое действует в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, всюду плотном в $L_2(\mathbb{R}^n)$, и продолжим это семейство операторов с необходимыми свойствами на объемлющее пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Для быстро убывающих функций определены прямое преобразование Фурье

$$\mathcal{F}[\omega](y) \equiv \widehat{\omega}(y) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-i(\boldsymbol{x},y)}\omega(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$$

и обратное преобразование Фурье

$$\mathcal{F}^{-1}[\omega](y) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}\omega(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}.$$

Будем считать, что $\omega_0,\omega(t,\cdot)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Применим преобразование Фурье к уравнению задачи Коши (4). Получим

$$\frac{\partial\widehat{\omega}}{\partial t}(t,\boldsymbol{y}) = \sum_{i,j}y_i^2y_j^2\,\widehat{\omega}(\boldsymbol{y})$$

с соответствующими начальными условиями $\widehat{\omega(0,\cdot)}(\boldsymbol{y}) = \widehat{\omega_0}(\boldsymbol{y})$. Решив это ОДУ относительно t, получим его общее решение в области переменной $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$:

$$\widehat{\omega}(\boldsymbol{y}) = \exp\Big(-t\sum_{i,j}y_i^2y_j^2\Big)C = e^{-t\|\boldsymbol{y}\|^4}C.$$

Используя обратное преобразование Фурье, с учетом начальных условий, получаем явное решение задачи Коши (4):

$$\omega(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-t\|\boldsymbol{y}\|^4} e^{i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} \widehat{\omega_0}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}. \tag{5}$$

Полученное решение (**??**) задает зависящее от t семейство псевдо-дифференциальных операторов с символом $h_t(\boldsymbol{y}) = \exp\bigl(-t \sum\limits_{i,j} y_i^2 y_j^2\bigr)$, определенных для всех $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $t \geq 0$. Обозначим это семейство $\bigl(H_t\bigr)_{t\geq 0}$, таким образом:

$$H_t[\omega](\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-t\|\boldsymbol{y}\|^4} e^{i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} \widehat{\omega}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}.$$

Теорема 3. Семейство операторов $\bigl(H_t\bigr)_{t\geq 0}$ задает сильно непрерывную полугруппу операторов действующую в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$.

◀ Пусть Q и P — псевдо-дифференциальные операторы с символами $p(\boldsymbol{y})$ и $q(\boldsymbol{y})$. Тогда для любой $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$P \circ Q[\omega](\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} p(\boldsymbol{y}) q(\boldsymbol{y}) e^{i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} \widehat{\omega}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} P \circ Q[\omega](\boldsymbol{x}) &= P\bigl[Q[\omega]\bigr](\boldsymbol{x}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} p(\boldsymbol{s}) e^{i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\boldsymbol{s},\boldsymbol{y})} \Biggl[\int\limits_{\mathbb{R}^n} q(\boldsymbol{r}) e^{i(\boldsymbol{y},\boldsymbol{r})} \widehat{\omega}(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r}\Biggr] d\boldsymbol{y}\, d\boldsymbol{s} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} p(\boldsymbol{s}) q(\boldsymbol{s}) e^{i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})} \widehat{\omega}(\boldsymbol{s})\, d\boldsymbol{s}. \end{aligned}$$

Заметим также, что $h_s(\boldsymbol{y}) h_\tau(\boldsymbol{y}) = \exp\bigl(-(s+\tau) \sum\limits_{i,j} y_i^2 y_j^2\bigr) = h_{s+\tau}(\boldsymbol{y})$, $s, \tau \in \mathbb{R}$. Тем самым показано, что для всех $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $t, s \geq 0$ выполнено $H_s \circ H_\tau = H_{s+\tau}$; также очевидно, что $H_0 = \mathrm{Id}$.

Функции $\widehat{\omega}$, $\exp\bigl(-t \sum\limits_{i,j} y_i^2 y_j^2\bigr)$ принадлежат $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и их произведение тоже принадлежит этому пространству. Между тем $(H_t)_{t\geq 0}$ можно представить так:

$$(H_t)[\omega] = \mathcal{F}^{-1}[e^{-t\|\boldsymbol{y}\|^4} \widehat{\omega}(\boldsymbol{y})].$$

Прямое и обратное преобразование Фурье отображает $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, следовательно семейство операторов $(H_t)_{t\geq 0}$ тоже отображает $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Мы показали, что $\bigl(H_t\bigr)_{t\geq 0}$ задает полугруппу операторов действующую в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Покажем теперь, что $(H_t)_{t\geq 0}$ продолжается до полугруппы операторов на банаховом пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$. Для всех $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ символ $h_t(\boldsymbol{y}) = \exp\bigl(-t \sum\limits_{i,j} y_i^2 y_j^2\bigr)$ семейства операторов $(H_t)_{t\geq 0}$ принимает значения в $[0;1]$, поэтому для любой $\omega\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, согласно теореме Планшереля, имеет место следующая оценка:

$$\|H_t[\omega]\|_2=\|\mathcal{F}^{-1}[h_t\widehat{\omega}]\|_2=\|h_t\widehat{\omega}\|_2\leq\|\widehat{\omega}\|_2=\|\omega\|_2.$$

Следовательно, для любой последовательности Коши $\{\omega_n\}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, при $t\in[0;+\infty)$ и $\|\omega_n-\omega_m\|_2\leq\varepsilon$ выполнено

$$\|H_t[\omega_n]-H_t[\omega_m]\|_2=\|H_t[\omega_n-\omega_m]\|_2\leq\varepsilon.$$

Учитывая равенство $L_2(\mathbb{R}^n)=\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$, можно сказать, что семейство операторов $\big(H_t\big)_{t\geq 0}$ продолжается до ограниченного семейства операторов на $L_2(\mathbb{R}^n)$. При этом $\big(H_t\big)_{t\geq 0}$ сохраняет свойство полугруппы операторов. Действительно, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ всюду плотно в $L_2(\mathbb{R}^n)$, следовательно при фиксированных $\tau,s\geq 0$ для любых $\omega\in L_2(\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon>0$ можно указать такое $\omega_\varepsilon\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, что $\|\omega-\omega_\varepsilon\|<\dfrac{\varepsilon}{2M}$, где $M=\max(\|H_{s+\tau}\|,\|H_s\circ H_\tau\|)$. Поэтому при $\varepsilon>0$:

$$\begin{aligned}\|H_s\circ H_\tau\omega-H_{s+\tau}\omega\|&=\|H_s\circ H_\tau\omega-H_s\circ H_\tau\omega_\varepsilon+H_s\circ H_\tau\omega_\varepsilon-H_{s+\tau}\omega_\varepsilon+H_{s+\tau}\omega_\varepsilon-H_{s+\tau}\omega\|_{L_2}\leq\\&\leq\|H_s\circ H_\tau\|\cdot\|\omega-\omega_\varepsilon\|+\|H_s\circ H_\tau\omega_\varepsilon-H_{s+\tau}\omega_\varepsilon\|+\|H_{s+\tau}\|\cdot\|\omega_\varepsilon-\omega\|<\varepsilon.\end{aligned}$$

Таким образом, $\big(H_t\big)_{t\geq 0}$ задает полугруппу операторов на $L_2(\mathbb{R}^n)$, и для доказательства ее сильной непрерывности достаточно проверить это свойство в $t_0=0$. Для всех $\omega\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеем:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\Big\|H(t)[\omega]-\omega\Big\|^2&=\lim_{t\to 0}\Big\|\mathcal{F}^{-1}[(h_t\widehat{\omega})]-\mathcal{F}^{-1}[\widehat{\omega}]\Big\|^2=\lim_{t\to 0}\Big\|\mathcal{F}^{-1}[(h_t-1)\widehat{\omega}]\Big\|^2=\\&=\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}}\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}(e^{-t\|\boldsymbol{y}\|^4}-1)\widehat{\omega}(\boldsymbol{y})\Big|^2d\boldsymbol{y}=\lim_{t\to 0}t\|\mathcal{F}^{-1}[\psi\widehat{\omega}]\|^2=0.\end{aligned}$$

В самом деле, пользуясь разложением аналитической функции в ряд Тэйлора запишем:

$$\exp\Big(-t\sum_{i,j}y_i^2y_j^2\Big)-1=\Big(-\sum_{i,j}y_i^2y_j^2+\frac{t}{2}\Big(\sum_{i,j}y_i^2y_j^2\Big)^2\exp\Big(-s\sum_{i,j}y_i^2y_j^2\Big)\Big)t=\psi(\boldsymbol{y})\,t,$$

где $s\in(0,t)$. Функция ψ принадлежит $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, $\psi\widehat{\omega}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и, таким образом, $\|\mathcal{F}^{-1}[\psi\widehat{\omega}]\|_2=\mathrm{const}$.

Теперь, аналогично тому, как было доказано полугрупповое свойство, можно показать, что $\lim\limits_{t\to 0}\big\|H_t[\omega]-\omega\big\|_2=0$ при $\omega\in L_2(\mathbb{R}^n)$. ►

Предложение 1. Генератором полугруппы $\big(H_t\big)_{t\geq 0}$ служит замыкание $(L,\mathrm{Dom}(L))$ оператора $L=-\sum\limits_{i,j}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, заданного на множестве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

◄ Множество $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ инвариантно относительно действия операторов полугруппы, а значит, согласно [28, Теорема X.49], является существенной областью определения оператора L.

Поэтому достаточно показать, что равенство $\lim\limits_{t\to 0}\left\|\dfrac{H(t)[\omega]-\omega}{t}-L\omega\right\|^2=0$ выполнено при $\omega\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Воспользуемся свойствами преобразования Фурье и разложением аналитической функции в ряд Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Тогда при $\omega\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{H_t[\omega]-\omega}{t}-L\omega\right\|^2=\lim_{t\to 0}\left\|\frac{\mathcal{F}^{-1}[(h_t\widehat{\omega})]-\mathcal{F}^{-1}[\widehat{\omega}]}{t}-\mathcal{F}^{-1}\Big[\Big(-\sum_{i,j}y_i^2y_j^2\Big)\widehat{\omega}\Big]\right\|^2=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left\|\mathcal{F}^{-1}\Big[\Big(\frac{h_t-1}{t}-\Big(-\sum_{i,j}y_i^2y_j^2\Big)\widehat{\omega}\Big)\Big]\right\|^2=\lim_{t\to 0}t\left\|\mathcal{F}^{-1}[\xi\widehat{\omega}]\right\|^2=0.$$

Здесь

$$\xi(\boldsymbol{y})=\frac{1}{2}\Big(\sum_{i,j}y_i^2y_j^2\Big)^2\exp\Big(-s\sum_{i,j}y_i^2y_j^2\Big),\quad s\in(0,t).$$

Поскольку $\xi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то и $\xi\widehat{\omega}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, $\|\mathcal{F}^{-1}[\xi(\boldsymbol{y})\widehat{\omega}]\|^2<\infty$. ►

Тем самым показано, что для любой функции $\omega_0\in\mathrm{Dom}(L)$, функция

$$\omega(t,\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-t\|\boldsymbol{y}\|^4}e^{i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}\,\widehat{\omega_0}(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y},\tag{6}$$

является решением задачи Коши (4). При этом $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)=\mathrm{core}(L)$, т.е. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ является существенной областью определения оператора $(L,\mathrm{Dom}(L))$, где $(L,\mathrm{Dom}(L))$ замыкание оператора $-\sum\limits_{i,j}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}S(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, для любой функции $\omega_0\in L_2(\mathbb{R}^n)$ функция ω, определенная формулой (5), также является элементом $L_2(\mathbb{R}^n)$. Иногда ее называют решением “mild solution” [29] задачи Коши (4).

3. Гамильтонова и лагранжева Формулы Фейнмана для параболического дифференциального уравнения с бигармоническим оператором

Построим для задачи Коши (4) гамильтонову Формулу Фейнмана. Пусть $R(\lambda,L)$ — резольвента оператора L задачи Коши (4). Тогда для $R(\lambda,L)$ верно следующее утверждение.

Теорема 4 ([30]). Для любой сильно непрерывной полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$ на банаховом пространстве X с генератором $(A,\mathrm{Dom}(A))$, имеет место равенство:

$$T_tx=\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n}{t}R\Big(\frac{n}{t},\ A\Big)\Big)^nx=\lim_{n\to\infty}\Big(\mathrm{Id}-\frac{t}{n}A\Big)^{-n}x,\quad x\in X.\tag{7}$$

Обозначим $E(t)=(\mathrm{Id}-tL)^{-1}$ и представим $E(t)$ в виде интегрального оператора. С помощью преобразования Фурье [31] получим следующий результат:

$$E(t)[\omega_0](\boldsymbol{x})=(\mathrm{Id}-tL)^{-1}[\omega_0](\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}\widehat{\omega_0}(\boldsymbol{y})}{1+t\|\boldsymbol{y}\|^4}\,d\boldsymbol{y},$$

т.е. $E(t)$ представляет собой семейство псевдо-дифференциальных операторов с символом $e_t(\boldsymbol{y})=\dfrac{1}{1+t\sum\limits_{i,j}y_i^2y_j^2}$.

Предложение 2. Семейство операторов $E(t)$ продолжается до ограниченного по норме семейства операторов из $L_2(\mathbb{R}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$.

◄ Заметим, что $\sup\limits_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n} |e_t(\boldsymbol{y})| \le 1$. Поэтому норма операторов E_t оценивается таким же образом, как и при доказательстве ограниченности семейства операторов H_t в теореме 3. ►

Теорема 5. Решение $\omega(t, \boldsymbol{x})$ задачи Коши (4) для любого $\omega_0 \in L_2(\mathbb{R}^n)$ представимо в виде гамильтоновой формулы Фейнмана:

$$\omega(t, \boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty} \Big(E\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big)^n [\omega_0](\boldsymbol{x}) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{nm}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \dots \int\limits_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 + \frac{t}{m}\|\boldsymbol{y}\|^4} e^{i\sum\limits_{k=1}^n \boldsymbol{u}_k\cdot(\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_{k-1})} \omega_0(\boldsymbol{v}_m)\, d\boldsymbol{v}_1\, d\boldsymbol{u}_1 \dots d\boldsymbol{v}_m\, d\boldsymbol{u}_m, \quad (8)$$

где $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_0 \in \mathbb{R}^n$.

◄ Утверждение непосредственно следует из предложения 2, и теоремы 4. ►

Для использования теоремы 2 в дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 3. Отображение $E(t)$: $[0; \infty) \to \mathcal{L}(X)$, для любого $\omega \in \mathrm{core}(L) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет равенству $\lim\limits_{t\to 0}\Big\|\dfrac{E(t)[\omega] - \omega}{t} - L\omega\Big\|^2 = 0$.

◄ Согласно свойствам преобразования Фурье, для всех $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имеем:

$$\lim_{t\to 0}\Big\|\frac{E(t)[\omega] - \omega}{t} - L\omega\Big\|^2 = \lim_{t\to 0}\Big\|\frac{\mathcal{F}^{-1}[(e_t\widehat{\omega})] - \mathcal{F}^{-1}[\widehat{\omega}]}{t} - \mathcal{F}^{-1}[(-\Sigma(\boldsymbol{y}))\widehat{\omega}]\Big\|^2 =$$

$$= \lim_{t\to 0}\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big[\Big(\frac{-\Sigma(\boldsymbol{y})}{1 + t\Sigma(\boldsymbol{y})} + \Sigma(\boldsymbol{y})\Big)\widehat{\omega}\Big]\Big\|^2 = \lim_{t\to 0} t\Big\|\mathcal{F}^{-1}[\xi\widehat{\omega}]\Big\|^2 = 0.$$

Здесь $\Sigma(\boldsymbol{y}) = \sum\limits_{i,j} y_i^2 y_j^2$ и на $\mathbb{R}^n$ выполнены соотношения $\xi(\boldsymbol{y}) = \dfrac{\Sigma^2(\boldsymbol{y})}{1 + t\Sigma(\boldsymbol{y})} \le \Sigma^2(\boldsymbol{y})$. Отсюда вытекает, что $\xi\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и, следовательно, $\|\mathcal{F}^{-1}[\xi(\boldsymbol{y})\widehat{\omega}]\|^2 < \infty$. ►

Теперь мы построим формулу Фейнмана второго типа — лагранжеву формулу. Мы построим ее для задачи Коши (4) на прямой $\mathbb{R}$, и аналогичным образом на пространстве $\mathbb{R}^3$.

Представим оператор $E(t) = (\mathrm{Id} - tL)^{-1}$ в виде виде оператора свертки с функцией

$$\mathcal{E}_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}}{1 + t\|\boldsymbol{y}\|^4} d\boldsymbol{y}$$

и рассмотрим задачу Коши (4) на прямой $\mathbb{R}$. Функция $\mathcal{E}_t$ будет выглядеть так:

$$\mathcal{E}_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixy}}{1 + ty^4} dy.$$

Вычислим интеграл, стоящий в представлении функции $\mathcal{E}_t(x)$. Подынтегральная функция имеет четыре полюса:

$$y_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2t^{\frac{1}{4}}}(1 \pm i), \quad y_{3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2t^{\frac{1}{4}}}(-1 \pm i).$$

По теореме Коши о вычетах и лемме Жордана [32], верны равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixy}}{1+ty^4}dy = \lim_{r\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\gamma}\frac{e^{ixz}}{1+tz^4}dz = i\sum_{y_i\in\mathcal{D}} \text{Выч}\left[\frac{e^{ixy}}{1+ty^4},\ y_i\right],$$

где γ — контур, составленный из отрезка $[-r,\,r]$ и дуги окружности $|z| = r$, в области $\operatorname{sign}(x)\arg(z) > 0$, а $\mathcal{D}$ — область ограниченная этим контуром. При $x \geq 0$ внутри контура γ находятся полюсы $y_{1,3}$, при $x < 0$ — полюсы $y_{2,4}$. Следовательно, при $x \geq 0$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ixz}}{1+tz^4}dz =$$

$$= \left.\frac{ie^{ixy}}{t\big(y-\frac{\sqrt{2}}{2t^{1/4}}(1-i)\big)\big(y-\frac{\sqrt{2}}{2t^{1/4}}(-1+i)\big)\big(y-\frac{\sqrt{2}}{2t^{1/4}}(-1-i)\big)}\right|_{y=\frac{\sqrt{2}}{2t^{1/4}}(1+i)} +$$

$$+ \left.\frac{ie^{ixy}}{t\big(y-\frac{\sqrt{2}}{2t^{1/4}}(1+i)\big)\big(y-\frac{\sqrt{2}}{2t^{1/4}}(1-i)\big)\big(y-\frac{\sqrt{2}}{2t^{1/4}}(-1-i)\big)}\right|_{y=\frac{\sqrt{2}}{2t^{1/4}}(-1+i)} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2t^{\frac14}}}}{2\sqrt{2}t^{\frac14}}\left(\cos\frac{x\sqrt{2}}{2t^{\frac14}} + \sin\frac{x\sqrt{2}}{2t^{\frac14}}\right).$$

Аналогично при $x < 0$ с учетом направления обхода контура получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ixz}}{1+tz^4}\,dz = \frac{e^{\frac{x\sqrt{2}}{2t^{\frac14}}}}{2\sqrt{2}t^{\frac14}}\left(\cos\frac{x\sqrt{2}}{2t^{\frac14}} - \sin\frac{x\sqrt{2}}{2t^{\frac14}}\right).$$

В результате для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{E}_t(x) = e^{-C|x|}(\cos C|x| + \sin C|x|),$$

где

$$C = \frac{\sqrt{2}}{2t^{\frac14}}.$$

Введем такое семейство интегральных операторов $G_1(t)$, что для любой $\omega_0 \in L_2(\mathbb{R})$ и $t \geq 0$

$$G_1(t)[\omega](x) = (\mathcal{E}_t * \omega_0)(x) = (\omega_0 * \mathcal{E}_t)(x) =$$

$$= \frac{C}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-C|y|}(\cos C|y| + \sin C|y|)\omega_0(x-y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|z|}(\cos|z| + \sin|z|)\,\omega_0\Big(x - \frac{z}{C}\Big)\,dz.$$

Согласно теореме 4, $G_1(t) \sim (H_t)_{t\geq 0}$; здесь $(H_t)_{t\geq 0}$ — найденная нами выше полугруппа, разрешающая исходную задачу Коши (4) на числовой прямой.

Итак, справедливо следующее утверждение.

Предложение 4. В одномерном случае решение задачи Коши (4) при $\omega_0 \in L_2(\mathbb{R})$ может быть представлено с помощью лагранжевой формулы Фейнмана:

$$\omega(t,x) = \lim_{n\to\infty}\Big(G_1\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big)^n[\omega_0](x) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\ldots\int_{\mathbb{R}}}_{n} e^{\sum\limits_{k=1}^{n}-|u_k|}\prod_{k=1}^{n}(\cos|u_k|+\sin|u_k|)\omega_0\Big(u_{n+1}-\sqrt{2}\Big(\frac{t}{n}\Big)^{1/4}\sum_{k=1}^{n}u_k\Big)du_1\ldots du_n, \quad (9)$$

где $x = u_{n+1}$.

Теперь рассмотрим задачу Коши (4) на пространстве $\mathbb{R}^3$ и получим для нее лагранжеву формулу Фейнмана. Функция $\mathcal{E}_t$ в этом случае будет такой:

$$\mathcal{E}_t(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}}{1+t\|\boldsymbol{y}\|^4}d\boldsymbol{y} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{i(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)}}{1+t(y_1^4+y_2^4+y_3^4+y_1^2y_2^2+y_2^2y_3^2+y_1^2y_3^2)}\,dy_1\,dy_2\,dy_3.$$

Воспользуемся сферическими координатами:

$$y_1 = r\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2, \quad y_2 = r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2, \quad y_3 = r\cos\vartheta_2$$

(при этом $r^2 = y_1^2+y_2^2+y_3^2$), а также четностью функции e_t и запишем интегральное выражение функции $\mathcal{E}_t(\boldsymbol{x})$ в новых координатах:

$$\mathcal{E}_t(\boldsymbol{x}) = \frac{2}{(2\pi)^3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\exp\big(ir(x_1\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2+x_2\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2+x_3\cos\vartheta_1)\big)\frac{r^2\sin\vartheta_1}{1+tr^4}\,dr\,d\vartheta_1\,d\vartheta_2.$$

Обозначим $\tau = x_1\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2+x_2\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2+x_3\cos\vartheta_1$ и найдем интеграл по переменной r. Используя свойство $\mathcal{F}^{-1}[y^{2n}f(y)](x) = (-1)^n\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\mathcal{F}^{-1}[f(y)](x)\Big)$, с учетом предыдущего результата для прямой $\mathbb{R}$ получаем:

$$J(\tau) = \int_{\mathbb{R}}\frac{r^2e^{ir\tau}}{1+tr^4}dr = -\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ir\tau}}{1+tr^4}dr =$$

$$= -\frac{C}{2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\big(e^{-C|\tau|}(\cos\,C|\tau|+\sin\,C|\tau|)\big) = C^3e^{-C|\tau|}(\cos\,C|\tau|-\sin\,C|\tau|),$$

где

$$C = \frac{\sqrt{2}}{2t^{1/4}}.$$

Вернемся к вычислению исходной функции $\mathcal{E}_t(\boldsymbol{x})$ в сферических координатах. Используя равенство [33]

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\sin\vartheta_1 d\vartheta_1 d\vartheta_2 = 2\pi\int_{-1}^{1} f(Rs)ds,$$

где $R = \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}$, получаем:

$$\mathcal{E}_t(\boldsymbol{x}) = \frac{2C^3}{(2\pi)^3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(e^{-C|\tau|}(\cos\ C|\tau| - \sin\ C|\tau|)\right)\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\vartheta_2 =$$

$$= \frac{2C^3}{(2\pi)^2}\int_{-1}^{1} e^{-C|Rs|}(\cos\ C|Rs| - \sin\ C|Rs|)\, ds =$$

$$= \frac{C^2}{R\pi^2}\int_0^{CR} e^{-s}(\cos\ s - \sin\ s)\, ds = \frac{2C^2}{R(2\pi)^2}e^{-CR}\sin(CR) =$$

$$= \frac{t^{-1/2}\exp\left(-\sqrt{\frac{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}{2t^{1/2}}}\right)\,\sin\left(\sqrt{\frac{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}{2t^{1/2}}}\right)}{\pi^2\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}}.$$

Введем такое семейство интегральных операторов $G_3(t)$, что при $\omega_0 \in L_2(\mathbb{R})$ и $t \geq 0$

$$G_3(t)[\omega](\boldsymbol{x}) = (\mathcal{E}_t * \omega_0)(\boldsymbol{x}) = (\omega_0 * \mathcal{E}_t)(\boldsymbol{x}) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{t^{-1/2}\exp\left(-\sqrt{\frac{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}{2t^{1/2}}}\right)\,\sin\left(\sqrt{\frac{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}{2t^{1/2}}}\right)}{\pi^2\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}}\,\omega_0(\boldsymbol{x}-\xi)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\exp(-\|\xi\|)\sin(\|\xi\|)}{\|\xi\|}\,\omega_0(\boldsymbol{x}-\sqrt{2}t^{1/4}\xi)\, d\xi,$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$.

Снова по теореме 4 имеем $G_3(t) \sim (H_t)_{t\geq 0}$, где $(H_t)_{t\geq 0}$ найденная выше полугруппа, разрешающая исходную задачу Коши (4) на пространстве $\mathbb{R}^3$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Предложение 5. Решение задачи Коши (4) для $\omega_0 \in L_2(\mathbb{R}^3)$ может быть получено с помощью следующей лагранжевой формулы Фейнмана:

$$\omega(t,\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty}\left(G^3\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n[\omega_0](\boldsymbol{x}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi^{2n}}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\dots\int_{\mathbb{R}^3}}_{n}\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\|\boldsymbol{u}_k\|\right)\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(\|\boldsymbol{u}_k\|)}{\|\boldsymbol{u}_k\|}\,\omega_0\left(\boldsymbol{u}_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{u}_k\right)d\boldsymbol{u}_1\dots d\boldsymbol{u}_n, \quad (10)$$

где $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_{n+1}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

4. Формулы Фейнмана для параболического дифференциального уравнения с бигармоническим оператором и аддитивным возмущением

Рассмотрим схожую с (4) задачу Коши вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}) = -\Delta(\Delta\omega)(t,\boldsymbol{x}) + V(x)\omega(t,\boldsymbol{x}), \\ \omega(o,\boldsymbol{x}) = \omega_0(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{11}$$

где $V(\boldsymbol{x})$ — ограниченная и непрерывная в $\mathbb{R}^n$ функция со значениями на сегменте $[-a,\, a]$, $a > 0$. Здесь оператор умножения на функцию V можно рассматривать как ограниченное аддитивное возмущение [27], оператора $L = -\Delta(\Delta)$. Пусть оператор $\widetilde{L} = L+V$, с областью определения $\mathrm{Dom}(\widetilde{L}) = \mathrm{Dom}(L)$. Тогда, очевидно, оператор $(\widetilde{L}, \mathrm{Dom}(\widetilde{L}))$ снова является генератором некоторой сильно непрерывной полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$ на $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 6. Если символ $s(\boldsymbol{y})$ действующего в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ псевдо-дифференциального оператора S зависит от одной переменной и $\sup\limits_{y\in\mathbb{R}^n} |s(\boldsymbol{y})| \in [0;1]$, то $\|S\| \leq 1$.

◄ По теореме Планшереля для пространства $L_2(\mathbb{R}^n)$

$$\|S\| = \sup_{(\|\omega_0\|_2=1)} \|\mathcal{F}^{-1}(s\omega)\|_2 = \sup_{(\|\omega_0\|_2=1)} \|s\omega\|_2 \leq \|\omega\|_2 = 1.$$

З а м е ч а н и е 1. Из предыдущего предложения сразу следует, что нормы семейств операторов $H_t, G_1(t), G_3(t), E(t)$ не превышают единицы.

Из теоремы 2 об аддитивных возмущениях вытекает следующая теорема, основная в этой работе.

Теорема 6. Семейства операторов $\big(e^{tV}\circ(H_t)_{t\geq0}\big)$, $\big(e^{tV}\circ E(t)\big)$, $\big(e^{tV}\circ G_1(t)\big)$, $\big(e^{tV}\circ G_3(t)\big)$ эквивалентны по Чернову полугруппе $\big(T_t\big)_{t\geq0}$, разрешающей задачу Коши (**??**). Здесь e^{tV} — это оператор умножения на функцию $e^{tV(\boldsymbol{x})}$.

Следовательно, теперь, мы можем записать выражения формул Фейнмана для задачи Коши (**??**).

Гамильтоновы формулы Фейнмана для $\omega_0 \in L_2(\mathbb{R}^n)$:

$$\omega(t,\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{\frac{t}{n}V}\circ\left(H_{\frac{t}{n}}\right)_{\frac{t}{n}\geq0}\right)^n[\omega_0](\boldsymbol{x}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n}\ldots\int\limits_{\mathbb{R}^n}}_{2n}\exp\Big[\frac{t}{n}\sum_{k=1}^n(-\boldsymbol{u}_k^4+V(\boldsymbol{v}_k))\Big]e^{i\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{v}_k-\boldsymbol{v}_{k-1})}\omega_0(\boldsymbol{v}_n)d\boldsymbol{u}_1d\boldsymbol{v}_1\ldots d\boldsymbol{u}_nd\boldsymbol{v}_n, \tag{12}$$

$$\omega(t,\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{\frac{t}{n}V}\circ E\Big(\frac{t}{n}\Big)\right)^n[\omega_0](\boldsymbol{x}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n}\ldots\int\limits_{\mathbb{R}^n}}_{2n}\prod_{k=1}^n\frac{1}{1+\frac{t}{n}\boldsymbol{u}_k^4}\exp\Big[\frac{t}{n}\sum_{k=1}^n V(\boldsymbol{v}_k)\Big]e^{i\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{v}_k-\boldsymbol{v}_{k-1})}\omega_0(\boldsymbol{v}_n)d\boldsymbol{u}_1d\boldsymbol{v}_1\ldots d\boldsymbol{u}_nd\boldsymbol{v}_n, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_0$.

Лагранжева формула Фейнмана задачи Коши (**??**) на числовой прямой $\mathbb{R}$ при $\omega_0 \in L_2(\mathbb{R})$:

$$\omega(t,x) = \lim_{n\to+\infty}\Big(e^{\frac{t}{n}V} \circ G_1\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big)^n[\omega_0](x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}}\ldots\int\limits_{\mathbb{R}}}_{n} e^{\sum\limits_{k=1}^{n}-|v_k|+\frac{t}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}V(v_k)}\prod_{k=1}^{n}\big(\cos|v_k|+\sin|v_k|\big)\times$$

$$\times\,\omega_0\Big(v_{n+1}-\sqrt{2}(\frac{t}{n})^{\frac{1}{4}}\sum_{k=1}^{n}v_k\Big)dv_1\ldots dv_n, \quad (14)$$

где $x = v_{n+1}$.

И, наконец, лагранжева формула Фейнмана задачи Коши (**??**) на пространстве $\mathbb{R}^3$ при $\omega_0 \in L_2(\mathbb{R}^3)$:

$$\omega(t,\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to+\infty}\Big(e^{\frac{t}{n}V} \circ G_3\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big)^n[\omega_0](\boldsymbol{x}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi^{2n}}\underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^3}\ldots\int\limits_{\mathbb{R}^3}}_{n}\exp\Big(-\sum_{k=1}^{n}\|\boldsymbol{u}_k\|+V(\boldsymbol{u}_k)\Big)\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\|\boldsymbol{u}_k\|}{\|\boldsymbol{u}_k\|}\omega_0\Big(\boldsymbol{u}_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{u}_k\Big)d\boldsymbol{u}_1\ldots d\boldsymbol{u}_n, \quad (15)$$

где $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_{n+1}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

З а м е ч а н и е 2. Равенства в полученных формулах Фейнмана следует понимать в смысле пространства $L_2(\mathbb{R}^n)$, т.е. в смысле равенства

$$\lim_{n\to\infty}\|\omega(t,x)-\Psi_n(t,x)\|_2 = 0,$$

где $\Psi_n(t,x)$ обозначает выражение под знаком предела в правой части формулы Фейнмана.

З а м е ч а н и е 3. Как следует из результатов работы [34], гамильтонову формулу Фейнмана (7) можно интерпретировать как интеграл Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве. Следовательно, справедливо следующее представление полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$ с помощью интеграла Фейнмана

$$\omega(t,x) = T_t[\omega_0](x) = \int\limits_{E_t^x} e^{-\int_0^t p^4(\tau)d\tau}e^{\int_0^t V(q(\tau))d\tau}\,\omega_0(q(t))\Phi_x^1(dqdp), \quad (16)$$

где пространство E_t^x и псевдомера Фейнмана Φ_x^1 определены в работе [34].

Интеграл Фейнмана в формуле (**??**) может быть вычислен для $\omega \in L_2(\mathbb{R})$ с помощью лагранжевой формулы Фейнмана (**??**), а для $\omega \in L_2(\mathbb{R}^3)$ — с помощью лагранжевой формулы Фейнмана (**??**).

5. Заключение

В статье рассмотрено эволюционное параболическое уравнение с бигармоническим дифференциальным оператором по переменной конфигурационного пространства и соответствующая этому уравнению задача Коши на всем конфигурационном пространстве. Доказано существование сильно непрерывной полугруппы операторов на пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$, разрешающей эту задачу Коши. Получены новые представления решения рассматриваемой задачи Коши в виде гамильтоновых и лагранжевых формул Фейнмана. Также, в работе рассмотрена аналогичная задача Коши с дополнительным слагаемым (аддитивным возмущением) в правой части, и для нее получены соответствующие гамильтоновы и лагранжевы формулы Фейнмана.

Надо отметить, что полученные лагранжевы формулы Фейнмана благодаря своему элементарному виду позволяют проводить численное моделирование динамики эволюционной системы, и, тем самым, являются новым инструментом численного моделирования эволюционных уравнений. Новизна такого метода располагает к разработке оптимальных вычислительных алгоритмов, реализующих формулы Фейнмана на ЭВМ, в том числе для параллельных вычислений. В то же время гамильтоновы Формулы Фейнмана связаны с интегралами Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве квантовой системы. Такие интегралы являются важными объектами квантовой механики.

Исследования второго автора поддержаны федеральной целевой программой ”Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (соглашение № 14.B37.21.0370), а также грантом Президента Российской Федерации МК-4255.2012.1.

Список литературы

1. Tritscher P. An integrable fourth-order nonlinear evolution equation applied to surface redistribution due to capillarity // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. 1997. V. 38, No 4. P. 518–541.
2. Myers T.G., Charpin J.P.F. A mathematical model for atmospheric ice accretion and water flow on a cold surface // Int. J. Heat Mass Transf. 2004. V. 47. № 25.
3. Halpern D., Jensen O.E., Grotberg J.B. A theoretical study of surfactant and liquid delivery into the lung // J. Appl. Physiol. 1998. V 85. P. 333–352.
4. Toga A. Brain Warping. N.-Y.: Academic Press, 1998.
5. Monterde J., Ugail H. A general 4th-order PDE method to generate Bezier surfaces from the boundary // Comp. Aid. Geom. Des. 2006. V. 23. P. 208–225.
6. Kim S., Lim H. Fourth-order partial differential equations for effective image denoising // El. J. of Differential Equations. V. 17. P. 107–121. URL: http://ejde.math.txstate.edu (30.07.2012).
7. Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula // J. Math. Phys. 2002. V. 43, № 10. P. 5161–5171.
8. Smolyanov O.G., Weizsacker H.v., Wittich O. Brownian Motion on a Manifold as Limit of Stepwise Conditioned Standard Brownian Motions // Stochastic Proceses, Physics and Geometry: New Interplays. II: A Volume in Honor of Sergio Albeverio. Ser. Conference Proceedings. Canadian Math. Society. Providence: AMS, 2000. V. 29. P. 589–602.

9. Smolyanov O.G., Weizsacker H.v., Wittich O. Chernoff's theorem and the construction of semigroups // Evolution Equations: Applications to Physics, Industry, Life Sciences and Economics. Proc. 7th Intnl. Conf. Evolution Eqs and Appl., Levico Terme, Italy, Oct./Nov, 2000. Birkhauser, Prog. Nonlinear Differ. Eq. Appl, 2003. V. 55. P. 349–358.

10. Smolyanov O.G., Weizsacker H.v., Wittich O. Diffusion on compact Riemannian manifolds, and surface measures // Doklady Math. 2000. V. 61. P. 230–234.

11. Smolyanov O.G., Weizsacker H.v., Wittich O. Surface Measures and Initial Boundary Value Problems Generated by Diffusions with Drift // Doklady Math. 2007. V. 76, № 1. P. 606–610.

12. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ. Университетский курс. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. 724 с.

13. Бутко Я.А. Формулы Фейнмана и функциональные интегралы для диффузии со сносом в области многообразия // Мат. Заметки. 2008. Т. 83, № 3. С. 333–349.

14. Бутко Я.А., Гротхаус М., Смолянов О.Г. Формула Фейнмана для класса параболических уравнений второго порядка в ограниченной области // Докл. РАН. 2008. Т. 421, № 6. С. 727–732.

15. Butko Ya.A. Function integrals corresponding to a solution of the Cauchy — Dirichlet problem for the heat equation in a domain of a Riemannian manifold // J. of Math. Sci. 2008. V. 151, № 1. P. 2629–2638.

16. Butko Ya.A., Grothaus M., Smolyanov O.G. Lagrangian Feynman Formulae for Second Order Parabolic Equations in Bounded and Unbounded Domains // IDAQP. 2010. V. 13, № 3. P. 377–392.

17. Gadella M., Smolyanov O.G. Feynman Formulas for Particles with Position-Dependent Mass // Doklady Math. 2007. V. 77, № 1. P. 120–123.

18. Obrezkov O., Smolyanov O.G., Truman A. The Generalized Chernoff Theorem and Randomized Feynman Formula // Doklady Math. 2005. V. 71, № 1. P. 105–110.

19. Sakbaev V.G., Smolyanov O.G. Dynamics of a Quantum Particle with Discontinuous Position-Dependent Mass // Doklady Math. 2010. V. 82, № 1. P. 630–634.

20. Smolyanov O.G. Feynman type formulae for quantum evolution and diffusion on manifolds and graphs // Quant. Bio-Informatics, World Sc. 2010. V. 3. P. 337–347.

21. Smolyanov O.G., Shamarov N.N. Feynman and Feynman-Kac formulae for evolution equations with Vladimirov operator // Doklady Math. 2008. V. 77. P. 345–349.

22. Smolyanov O.G., Shamarov N.N. Hamiltonian Feynman Integrals for Equations with the Vladimirov Operator // Doklady Math. 2010. V. 81, № 2. P. 209–214.

23. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Hamiltonian Feynman — Kac and Feynman formulae for dynamics of particles with position-dependent mass // Int. J. Theor. Phys. 2011.

V. 50. P. 2009–2018.

24. Feynman R.P. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics // Rev. Mod. Phys. 1948. V. 20. P. 367–387.
25. Nelson E. Feynman integrals and the Schrödinger equation // J. Math. Phys. 1964. V. 3. P. 332–343.
26. Chernoff P. Product formulas, nonlinear semigroups and addition of unbounded operators // Mem. Am. Math. Soc. 1974. V. 140.
27. Бутко Я.А., Смолянов О.Г., Шиллинг Р.Л. Формулы Фейнмана для феллеровских полугрупп // Докл. РАН. 2010. Т. 434, № 1. С. 7–11.
28. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1977. 393 с.
29. Pazy A. Semigroups of linear operators and Applications to partial differential equation. Springer-Verlag, 1983. 279 p.
30. Engel K.-J., Nagel R. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. Springer, 2000. 609 p.
31. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. II. М.: МЦНМО. 2002. 789 с.
32. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 335 с.
33. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1963. 1097 с.
34. Boettcher B., Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Feynman formulae and path integrals for some evolution semigroups related to tau-quantization // Rus. J. Math. Phys. 2011. V. 18, № 4. P. 381–399.
35. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Lagrangian and Hamiltonian Feynman formulae for some Feller semigroups and their perturbations // IDAQP. 2012. P. 1–19.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

Feynman formulae for a parabolic equation with biharmonic differential operator on a configuration space

08, August 2012

DOI: 10.7463/0812.0445534

Buzinov M. S., Butko Ya. A.

Russia, Bauman Moscow State Technical University

Maxim.cad@gmail.com

The Cauchy problem for a parabolic partial differential equation with biharmonic operator and additive perturbation is considered in this note. Such equations are used in different domains of physics, chemistry, biology, and computer sciences. The solution of the considered problem is represented by Feynman formulae, i.e. by limits of iterated integrals of elementary functions when multiplicity if integrals tends to infinity. The main part of these formulae is proved with the help of Chernoff's theorem; some formulae are obtained on the base of the Yosida approximations. Different types of Feynman formulae are presented in this work: Lagrangin and Hamiltonian. Lagrangian Feynman formulae are suitable for computer modeling of the considered dynamics. Hamiltonian Feynman formulae are related to some phase space Feynman path integrals; such integrals are important objects in quantum physics.

References

1. Tritscher P. An integrable fourth-order nonlinear evolution equation applied to surface redistribution due to capillarity. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, 1997, vol. 38, No 4. P. 518–541.
2. Myers T.G., Charpin J.P.F. A mathematical model for atmospheric ice accretion and water flow on a cold surface. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2004, vol. 47. no. 25, pp. 5483–5503.
3. Halpern D., Jensen O.E., Grotberg J.B. A theoretical study of surfactant and liquid delivery into the lung. *J. Appl. Physio.,* 1998, vol. 85, pp. 333–352.
4. Toga A. Brain Warping. N.-Y., Academic Press, 1998.
5. Monterde J., Ugail H. A general 4th-order PDE method to generate Bezier surfaces from the boundary. *Comp. Aid. Geom. Des.*, 2006. vol. 23, pp. 208–225.

6. Kim S., Lim H. Fourth-order partial differential equations for effective image denoising. *El. J. of Differential Equations*. 2009, conf. 17, pp. 107–121. Avaliable at: http://ejde.math.txstate.edu, accesed 18.08.2012.
7. Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula, *J. Math. Phys.* 2002. vol. 43, no. 10, pp. 5161–5171.
8. Smolyanov O.G., Weizsacker H.v., Wittich O. Brownian Motion on a Manifold as Limit of Stepwise Conditioned Standard Brownian Motions // *Stochastic Proceses, Physics and Geometry: New Interplays. Vol/ 2. A Volume in Honor of Sergio Albeverio*. Canadian Math. Society. Providence, AMS, 2000, pp. 589–602. (CMS Conference Proceedings, vol. 29).
9. Smolyanov O.G., Weizsacker H.v., Wittich O. Chernoff's theorem and the construction of semigroups. *Proc. of Evolution Equations: Applications to Physics, Industry, Life Sciences and Economics: EVEQ2000 Conference*, Levico Terme, Italy, Oct./Nov. 2000. Birkhauser Verlag, 2003. P. 349–358. (*Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applicftions*, vol. 55).
10. Smolyanov O.G., Weizsacker H.v., Wittich O. Diffusion on compact Riemannian manifolds, and surface measures. *Doklady Math.*, 2000, vol. 61, pp. 230–234.
11. Smolyanov O.G., Weizsacker H.v., Wittich O. Surface Measures and Initial Boundary Value Problems Generated by Diffusions with Drift. *Doklady Math.*, 2007, vol. 76, no. 1, pp. 606–610.
12. Bogachev V.I., Smoljanov O.G. *Dejstvitel'nyj i funkcional'nyj analiz: universitetskij kurs*. Moscow, Izhevsk, NIC "Reguljarnaya i haoticheskaya dinamika" [Scientific Research Center "Regular and Chaotic Dynamics"], Institut komp'juternyh issledovanij [Institute of Computer Science], 2009. 724 p.
13. Butko Ya.A. Feynman formulas and functional integrals for diffusion with drift in a domain of a Riemannian manifold. *Math. Notes*, 2008, vol. 83, no. 3, pp. 333-349.
14. Butko Ya.A., Grothaus M., Smolyanov O.G. Lagrangian Feynman formulae for second order parabolic equations in bounded and unbounded domains. *The Reports of RAS*, 2008. vol. 421. no. 6. pp. 727–732.
15. Butko Ya.A. Function integrals corresponding to a solution of the Cauchy — Dirichlet problem for the heat equation in a domain of a Riemannian manifold. *J. of Math. Sci.*, 2008, vol. 151, no. 1, pp. 2629–2638.
16. Butko Ya.A., Grothaus M., Smolyanov O.G. Lagrangian Feynman Formulae for Second Order Parabolic Equations in Bounded and Unbounded Domains. *IDAQP*, 2010, vol. 13, no. 3, pp. 377–392.
17. Gadella M., Smolyanov O.G. Feynman Formulas for Particles with Position-Dependent Mass. *Doklady Math.*, 2007, vol. 77, no. 1, pp. 120–123.

18. Obrezkov O., Smolyanov O.G., Truman A. The Generalized Chernoff Theorem and Randomized Feynman Formula. *Doklady Math.*, 2005, vol. 71, no. 1, pp. 105–110.

19. Sakbaev V.G., Smolyanov O.G. Dynamics of a Quantum Particle with Discontinuous Position-Dependent Mass. *Doklady Math.*, 2010, vol. 82, no. 1, pp. 630–634.

20. Smolyanov O.G. Feynman type formulae for quantum evolution and diffusion on manifolds and graphs. *Quant. Bio-Informatics, World Sc.*, 2010, vol. 3, pp. 337–347.

21. Smolyanov O.G., Shamarov N.N. Feynman and Feynman-Kac formulae for evolution equations with Vladimirov operator. *Doklady Math.*, 2008, vol. 77, pp. 345–349.

22. Smolyanov O.G., Shamarov N.N. Hamiltonian Feynman Integrals for Equations with the Vladimirov Operator. *Doklady Math.*, 2010, vol. 81, no. 2, pp. 209–214.

23. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Hamiltonian Feynman — Kac and Feynman formulae for dynamics of particles with position-dependent mass. *Int. J. Theor. Phys.*, 2011, vol. 50, pp. 2009–2018.

24. Feynman R.P. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 1948, vol. 20, pp. 367–387.

25. Nelson E. Feynman integrals and the Schrödinger equation. *J. Math. Phys.*, 1964, vol. 3, pp. 332–343.

26. Chernoff P. Product formulas, nonlinear semigroups and addition of unbounded operators. *Mem. Am. Math. Soc.*, 1974, vol. 140.

27. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Lagrangian and Hamiltonian Feynman formulae for some Feller semigroups and their perturbations. *IDAQP*, 2012, pp. 1–19.

28. Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical phisycs. Vol. 2. Fourier Analysis, Self-Adjointness.* Academic Press, 1975. 361 p. (Russ. ed.: Rid M., Saimon B. *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. T. 2. Garmonicheskii analiz. Samosopriazhennost'*. Moscow, Mir, 1977. 393 p.).

29. Pazy A. *Semigroups of linear operators and Applications to partial differential equation.* Springer-Verlag, 1983. 279 p.

30. Engel K.-J., Nagel R. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.* Springer, 2000. 609 p.

31. Zorich V.A. *Matematichesky analiz. Ch. 2* [Mathematical analysis. Pt. 2]. Moscow, MCCME, 2002. 789 p.

32. Sveshikov A.G., Tikhonov A.N. *Teoriya funkcy compleksnogo peremennogo* [Theory of functions of a complex variable]. Moscow, PHYSMATHLIT, 2005. 335 p.

33. Gradshtein I.S., Ruezhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, riadov i proizvedenii* [Integrals, series and sums tables]. Moscow, PHYSMATHLIT, 1963. 1097 p.

34. Butko Ya.A., Smolyanov O.G., Schilling R.L. Feynman formulae for Feller semigroups. *Doklady Math.*, 2010, vol. 434, no. 1, pp. 7–11.

35. Boettcher B., Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Feynman formulae and path integrals for some evolution semigroups related to tau-quantization. *Rus. J. Math. Phys.*, 2011, vol. 18, no. 4, pp. 381–399.