

Оптимальная толщина экранированной стенки с термоактивной прокладкой, функционирующей по принципу обратной связи

05, май 2012

DOI: 10.7463/0512.0396333

Волков И. К., Тверская Е. С.

УДК 536.2

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
E_tverskaya@bmstu.ru

Введение

В исследованиях по математической теории теплопроводности [1, 2, 3] важное место занимают задачи оптимизации и оценивания эффективных значений теплофизических и геометрических параметров конструкции, функционирующей в условиях интенсивных внешних тепловых воздействий [4, 5, 6, 7].

Один из важных аспектов рассматриваемых задач связан с разработкой эффективных методов тепловой защиты конструкций [8]. При этом, в соответствии со сложившейся терминологией [4], под тепловой изоляцией (теплоизоляцией), будем понимать совокупность действий, направленных на снижение интенсивности кондуктивного, конвективного или радиационного теплообмена на поверхности конструкции. Материалы, применяемые для теплоизоляции, будем называть теплоизоляторами

Практический интерес представляют теплоизоляции, использующие термоэлектрические явления для регулирования температурного поля или терmostатирования конструкций [4, 9]. Одним из основных элементов подобных теплоизоляций является термоактивная прокладка, образующая промежуточный слой в системе «конструкция — теплозащитное покрытие» и представляющая собой изотропную пластину конечной толщины, на поверхности которой нанесены пленочные покрытия (например, путем вакуумного напыления или вжиганием в пластину) пренебрежимо малой толщины. При этом, как правило, удельная теплоемкость такого пленочного покрытия значительно меньше, чем удельные теплоемкости самой пластины и теплоизолируемой конструкции. В результате управляемых внешних воздействий (например, в результате регулирования силы электрического тока) в термоактивной прокладке может происходить как выделение, так и поглощение теплоты с заданной удельной мощностью [12].

Исследования процесса формирования температурного поля в системе «конструкция – термоактивная прокладка – теплозащитное покрытие» методами математического моделирования даже с использованием простейшей постановки связаны с необходимостью решения соответствующей задачи теории теплопроводности в пятислойной области при наличии идеального теплового контакта между слоями (граничное условие четвертого рода [2, 3]).

Трудности, которые приходится преодолевать при проведении параметрического анализа температурных полей в многослойных конструкциях, подверженных интенсивным внешним тепловым воздействиям, приводят к необходимости разработки упрощенных аналогов используемых «точных» моделей. Построение упрощенных математических моделей для описания процессов формирования температурных полей в многослойных областях в практике научных исследований зачастую связывают с реализацией идеи «сосредоточенная емкость» [13, 17, 18]. Суть этой идеи состоит в принятии допущения о равенстве среднеинтегральной температуры слоя температуре на его границах.

Корректность выбора параметров термоизолятора в значительной степени определяется пространственно-временной структурой действующего на него теплового потока. В теоретических исследованиях значительное внимание уделяется пространственно распределенным (с интенсивностью гауссовского типа) и концентрированным осесимметричным тепловым потокам как при стационарном, так и при нестационарном режимах воздействия [10, 14, 11, 15, 16]. В частности, использование теплового потока с интенсивностью гауссовского типа позволило решить задачи об определении оптимальной толщины охлаждаемой стенки, подверженной местному нагреву [11] и об определении достаточных условий существования оптимальной толщины охлаждаемой стенки с теплозащитным покрытием покрытием, подверженной импульсно-периодическому нагреву [14]. Для охлаждаемой стенки с теплоизоляцией, использующей термоактивную прокладку, функционирующую по принципу обратной связи аналогичные результаты не известны. Поэтому основной целью проведенных исследований является определение достаточных условий существования оптимальной толщины плоской изотропной стенки с теплозащитным покрытием, обеспечивающей минимальную установившуюся температуру ее наиболее нагретой точки, при наличии термоактивной прокладки, функционирующей по принципу обратной связи.

1. Постановка задачи

В данной работе рассматривается плоская изотропная стенка с теплозащитным покрытием и промежуточным слоем в виде термоактивной прокладки, функционирующей по принципу обратной связи. С незащищенной стороны стенка охлаждается средой с постоянными температурой T_c и коэффициентом теплоотдачи α , а со стороны теплозащитного покрытия на нее действует тепловой поток с интенсивностью гауссовского типа в импульсно-периодическом режиме. Учитывая результаты анализа процессов формирования температурного поля в системе «стенка — термоактивная прокладка — теплозащитное покрытие»

тие» [17], будем считать, что начальная температура изучаемой системы равна температуре охлаждающей среды. Поэтому, в соответствии с поставленной целью, сформулированным принципом оптимальности и используемым принципом функционирования термоактивной прокладки, приходим к следующей математической модели процесса формирования температурного поля в системе «стенка — термоактивная прокладка — теплозащитное покрытие» (рис. 1):

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \text{Fo}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Theta_1}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial x^2}, \quad \text{Fo} > 0, \quad \varepsilon < x < \varepsilon + H, \quad \rho \geq 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial \text{Fo}} = \chi_2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Theta_2}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial x^2} \right), \quad \text{Fo} > 0, \quad -l < x < 0, \quad \rho \geq 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta_3}{\partial \text{Fo}} = \chi_3 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Theta_3}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \Theta_3}{\partial x^2} \right), \quad \text{Fo} > 0, \quad 0 < x < \varepsilon, \quad \rho \geq 0; \quad (3)$$

$$\Theta_m(\rho, x, \text{Fo}) \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad m = \overline{1, 3}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Theta_1(\rho, x, \text{Fo})}{\partial x} \Big|_{x=\varepsilon+H} = -\text{Bi} \Theta_1(\rho, x, \text{Fo}) \Big|_{x=\varepsilon+H}; \quad (5)$$

$$\Theta_1(\rho, x, \text{Fo}) \Big|_{x=\varepsilon+0} = \Theta_3(\rho, x, \text{Fo}) \Big|_{x=\varepsilon-0},$$

$$\Lambda_3 \frac{\partial \Theta_3}{\partial x} \Big|_{x=\varepsilon-0} - \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} \Big|_{x=\varepsilon+0} = -Q_1 \Theta_3(\rho, x, \text{Fo}) \Big|_{x=\varepsilon-0}; \quad (6)$$

$$\Theta_3(\rho, x, \text{Fo}) \Big|_{x=0+0} = \Theta_2(\rho, x, \text{Fo}) \Big|_{x=0-0},$$

$$\Lambda_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial x} \Big|_{x=0-0} - \Lambda_3 \frac{\partial \Theta_3}{\partial x} \Big|_{x=0+0} = -Q_2 \Theta_3(\rho, x, \text{Fo}) \Big|_{x=0+0}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Theta_2(\rho, x, \text{Fo})}{\partial x} \Big|_{x=-l} = -\frac{Q(\rho) \Phi(\text{Fo})}{\Lambda_2}, \quad (8)$$

где

$$\Phi(\text{Fo}) = \frac{\text{Fo}^*}{\text{Fo}^* + \Delta \text{Fo}^*} + \exp(-\gamma \text{Fo}) \varphi(\text{Fo});$$

$$\varphi(\text{Fo}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \eta[\text{Fo} - n(\text{Fo}^* + \Delta \text{Fo}^*)] - \eta[\text{Fo} - \text{Fo}^* - n(\text{Fo}^* + \Delta \text{Fo}^*)] \right\};$$

$$\Theta_m = \frac{T_m - T_c}{T_c}, \quad m = \overline{1, 3}; \quad x = \frac{z}{z_*}; \quad \rho = \frac{r}{z_*}; \quad \text{Fo} = \frac{a_1 t}{z_*^2};$$

$$H = \frac{l_1}{z_*}; \quad \varepsilon = \frac{l_3}{z_*}; \quad l = \frac{l_2}{z_*}; \quad \text{Bi} = \frac{\alpha z_*}{\lambda_1}; \quad \chi_j = \frac{a_j}{a_1}, \quad j = 2, 3;$$

$$\Lambda_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_1}, \quad j = 2, 3; \quad Q_i = \frac{q_i z_*}{\lambda_1}, \quad i = 1, 2; \quad Q = \frac{q z_*}{\lambda_1 T_c};$$

значения индексов 1, 2 и 3 соответствуют стенке, теплозащитному покрытию и термоактивной прокладке; a и λ — коэффициенты температуропроводности и теплопроводности соответственно; z_* — выбранная единица масштаба; q — удельная мощность (плотность)

теплового потока, имеющая осесимметричное распределение $q = q(r)$; $\eta(\cdot)$ — единичная функция Хевисайда [2]; $Fo^* + \Delta Fo^*$ — период импульсно-периодического режима воздействия теплового потока с интенсивностью гауссовского типа; Fo^* — длительность активной фазы воздействия; γ — коэффициент затухания теплового потока.

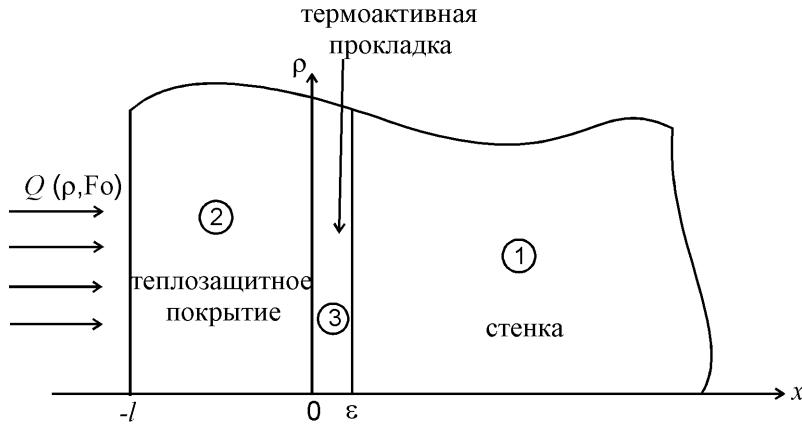


Рис. 1. Принципиальная схема анализируемой системы «стенка — термоактивная прокладка — теплозащитное покрытие»

Пусть далее

$$\langle \Theta \rangle = \langle \Theta(\rho, Fo) \rangle = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \Theta_3(\rho, x, Fo) dx \quad (9)$$

— среднеинтегральная по толщине термоактивной прокладки температура и допустима реализация идеи «сосредоточенная емкость» [13, 17, 18]:

$$\Theta_1(\rho, \varepsilon + 0, Fo) = \langle \Theta(\rho, Fo) \rangle = \Theta_2(\rho, 0 - 0, Fo), \quad Fo \geq 0. \quad (10)$$

В этом случае, согласно (3) и (9), приходим к уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \Theta(\rho, Fo) \rangle}{\partial Fo} &= \frac{\chi_3}{\varepsilon} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \langle \Theta(\rho, Fo) \rangle}{\partial \rho} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Theta_3(\rho, x, Fo)}{\partial x} \Big|_{x=\varepsilon-0} - \frac{\partial \Theta_3(\rho, x, Fo)}{\partial x} \Big|_{x=0+0} \right\}, \quad Fo \geq 0. \end{aligned}$$

Используя условия сопряжения (6) и (7), приходим к равенствам

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_3}{\partial x} \Big|_{x=\varepsilon-0} &= \frac{1}{\Lambda_3} \left\{ \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} \Big|_{x=\varepsilon+0} - Q_1 \Theta_3 \Big|_{x=\varepsilon-0} \right\}, \\ \frac{\partial \Theta_3}{\partial x} \Big|_{x=0+0} &= \frac{1}{\Lambda_3} \left\{ \Lambda_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial x} \Big|_{x=0-0} + Q_2 \Theta_3 \Big|_{x=0+0} \right\}, \end{aligned}$$

с учетом которых полученное уравнение может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial Fo} = \chi_3 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial \rho} \right) + \frac{\chi_3}{\varepsilon \Lambda_3} \left\{ \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} \Big|_{x=\varepsilon+0} - \Lambda_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial x} \Big|_{x=0-0} - \langle \Theta \rangle (Q_1 + Q_2) \right\}. \quad (11)$$

Поэтому, если считать, что

$$\varepsilon_* = \frac{\varepsilon \Lambda_3}{\chi_3}, \quad Q_* = Q_1 + Q_2, \quad (12)$$

то, согласно (1), (2), (4), (5) и (9)–(12), приходим к искомой математической модели:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \text{Fo}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Theta_1}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial x^2}, \quad \text{Fo} > 0, \quad \varepsilon < x < \varepsilon + H, \quad \rho \geq 0; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_* \left\{ \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial \text{Fo}} - \chi_3 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial \rho} \right) \right\} &= \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} \Big|_{x=\varepsilon+0} - \\ &- \Lambda_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial x} \Big|_{x=0-0} - \langle \Theta \rangle Q_*, \quad \text{Fo} > 0, \quad \rho \geq 0, \quad 0 < x < \varepsilon; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial \text{Fo}} = \chi_2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Theta_2}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial x^2} \right), \quad \text{Fo} > 0, \quad -l < x < 0, \quad \rho \geq 0; \quad (15)$$

$$\Theta_1(\rho, x, \text{Fo}) \Big|_{\text{Fo}=0} = \langle \Theta(\rho, \text{Fo}) \rangle \Big|_{\text{Fo}=0} = \Theta_2(\rho, x, \text{Fo}) \Big|_{\text{Fo}=0} = 0; \quad (16)$$

$$\frac{\partial \Theta_1(\rho, x, \text{Fo})}{\partial x} \Big|_{x=\varepsilon+H} + \text{Bi} \Theta_1(\rho, x, \text{Fo}) \Big|_{x=\varepsilon+H} = 0; \quad (17)$$

$$\Theta_1(\rho, x, \text{Fo}) \Big|_{x=\varepsilon+0} = \langle \Theta(\rho, \text{Fo}) \rangle = \Theta_2(\rho, x, \text{Fo}) \Big|_{x=0-0}; \quad (18)$$

$$\frac{\partial \Theta_2(\rho, x, \text{Fo})}{\partial x} \Big|_{x=-l} = - \frac{Q(\rho) \Phi(\text{Fo})}{\Lambda_2}, \quad (19)$$

где при любых фиксированных значениях $\text{Fo} > 0$ и $x \in (-l, \varepsilon + H)$ функции $\Theta_m(\rho, x, \text{Fo})$, $m \in 1, 2$, $\langle \Theta(\rho, \text{Fo}) \rangle$ и $Q(\rho)$, как функции переменного ρ , являются оригиналами интегрального преобразования Ханкеля нулевого порядка [2, 20], а их изображения, как функции Fo , являются оригиналами интегрального преобразования Лапласа [2, 20];

$$Q(\rho) = Q_0 \exp(-k^2 \rho^2), \quad (20)$$

где $Q_0 = q_0 z_* / \lambda_1 T_c$.

2. Установившаяся температура наиболее нагретой точки стенки

Применим последовательно к (13)–(20) оператор H_0 прямого интегрального преобразования Ханкеля нулевого порядка по ρ [2, 20]:

$$\begin{aligned} U_m(p, x, \text{Fo}) &= H_0[\Theta_m(\rho, x, \text{Fo})] \equiv \int_0^\infty \Theta_m(\rho, x, \text{Fo}) J_0(p\rho) \rho d\rho; \\ U(p, \text{Fo}) &= H_0[\langle \Theta(\rho, \text{Fo}) \rangle] \equiv \int_0^\infty \langle \Theta(\rho, \text{Fo}) \rangle \rho J_0(p\rho) d\rho; \\ G(p) &= H_0[Q(\rho)] \equiv \int_0^\infty Q(\rho) \rho J_0(p\rho) d\rho = \frac{Q_0}{2k^2} \exp\left(-\frac{p^2}{4k^2}\right), \end{aligned} \quad (21)$$

а затем оператор L прямого интегрального преобразования Лапласа по Fo [2]:

$$\begin{aligned} V_m(p, x, s) &= L[U_m(p, x, Fo)] \equiv \int_0^\infty \exp(-sFo) U_m(p, x, Fo) dFo; \\ V(p, s) &= L[U(p, Fo)] \equiv \int_0^\infty \exp(-sFo) U(p, Fo) dFo; \\ \Psi(s) = L[\Phi(Fo)] &= \frac{1}{s} \frac{Fo^*}{Fo^* + \Delta Fo^*} + \frac{1}{s + \gamma} \frac{1 - \exp[-(s + \gamma)Fo^*]}{1 - \exp[-(s + \gamma)(Fo^* + \Delta Fo^*)]}. \end{aligned} \quad (22)$$

В итоге, с использованием известных результатов теории интегральных преобразований [2], приходим к следующей задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2V_1}{dx^2} = (s + p^2)V_1, \quad \varepsilon < x < \varepsilon + H; \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_*\{s + \chi_3 p^2\} V(p, s) &= \left. \frac{dV_1(p, x, s)}{dx} \right|_{x=\varepsilon+0} - \\ &\quad - \Lambda_2 \left. \frac{dV_2(p, x, s)}{dx} \right|_{x=0-0} - Q_* V(p, s), \quad 0 < x < \varepsilon; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\frac{d^2V_2}{dx^2} = \left(\frac{s}{\chi_2} + p^2 \right) V_2, \quad -l < x < 0; \quad (25)$$

$$\left. \frac{dV_1(p, x, s)}{dx} \right|_{x=\varepsilon+H} + Bi V_1(p, x, s) \Big|_{x=\varepsilon+H} = 0; \quad (26)$$

$$V_1(p, x, s) \Big|_{x=\varepsilon+0} = V(p, s) = V_2(p, x, s) \Big|_{x=0-0}; \quad (27)$$

$$\left. \frac{dV_2(p, x, s)}{dx} \right|_{x=-l} = - \frac{G(p)\Psi(s)}{\Lambda_2}. \quad (28)$$

Решения уравнений (23) и (25) могут быть найдены стандартными методами и представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} V_1(p, x, s) &= c_{11}(p, s) \exp[-(x - \varepsilon)\sqrt{s + p^2}] + \\ &\quad + c_{12}(p, s) \exp[(x - \varepsilon)\sqrt{s + p^2}], \quad \varepsilon < x < \varepsilon + H; \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} V_2(p, x, s) &= c_{21}(p, s) \exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{\chi_2}} + p^2\right) + \\ &\quad + c_{22}(p, s) \exp\left(x\sqrt{\frac{s}{\chi_2}} + p^2\right), \quad -l < x < 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Из (29), (30) следует, что уравнение (23), граничные условия (26), (28) и равенство (27) эквивалентны соответствующей им системе линейных алгебраических уравнений относительно

функционалов $\{c_{ij}(p, s)\}_{i,j=1}^2$:

$$[\varepsilon_* s + \varepsilon_* \chi_3 p^2 + Q_*] V(p, s) = \sqrt{s + p^2} [c_{12}(p, s) - c_{11}(p, s)] - \Lambda_2 \sqrt{\frac{s}{\chi_2} + p^2} [c_{22}(p, s) - c_{21}(p, s)];$$

$$\begin{aligned} \sqrt{s + p^2} \left\{ c_{12}(p, s) \exp(H \sqrt{s + p^2}) - c_{11}(p, s) \exp(-H \sqrt{s + p^2}) \right\} = \\ = -\text{Bi} \left\{ c_{11}(p, s) \exp(-H \sqrt{s + p^2}) + c_{12}(p, s) \exp(H \sqrt{s + p^2}) \right\}; \end{aligned}$$

$$c_{11}(p, s) + c_{12}(p, s) = c_{21}(p, s) + c_{22}(p, s) = V(p, s);$$

$$\Lambda_2 \sqrt{\frac{s}{\chi_2} + p^2} \left\{ c_{22}(p, s) \exp \left(-l \sqrt{\frac{s}{\chi_2} + p^2} \right) - c_{21}(p, s) \exp \left(l \sqrt{\frac{s}{\chi_2} + p^2} \right) \right\} = -G(p) \Psi(s).$$

Определением функционалов $c_{ij}(p, s)$, $i, j \in \{1, 2\}$ и завершается решение задачи о нахождении температурного поля рассматриваемой стенки с теплозащитным покрытием и промежуточным слоем в виде термоактивной прокладки, функционирующей по принципу обратной связи, в изображениях использованных интегральных преобразований Лапласа (22) и Ханкеля (21). Но для достижения поставленной цели достаточно знать лишь установившуюся температуру наиболее нагретой точки стенки. При этом, физически совершенно очевидно, что в обозначениях математической модели (13)–(19) наиболее нагретой поверхностью стенки является поверхность $x = \varepsilon$. Учитывая, что $J_0(y)$ имеет максимум при $y = 0$ [19], приходим к выводу, что наиболее нагретой точкой является точка с координатами $\rho = 0$ и $x = \varepsilon$.

Обратив интегральное преобразование Ханкеля нулевого порядка [2] и воспользовавшись предельной теоремой операционного исчисления [2], находим установившуюся температуру наиболее нагретой точки стенки:

$$\begin{aligned} \Theta(H, l) = \Theta_1(0, \varepsilon + 0, \infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \int_0^\infty V_1(p, \varepsilon + 0, s) p dp = \\ &= \frac{Q_0 \text{Fo}^*}{k^2(\text{Fo}^* + \Delta \text{Fo}^*)} \int_0^\infty p \exp \left(-\frac{p^2}{4k^2} - pl \right) [(p + \text{Bi}) + (p - \text{Bi}) \exp(-2Hp)] \psi^{-1}(p) dp, \quad (31) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \psi(p) = (Q_* + \varepsilon_* \chi_3 p^2) [1 + \exp(-2lp)] [(p + \text{Bi}) + (p - \text{Bi}) \exp(-2Hp)] + \\ + \Lambda_2 p [1 - \exp(-2lp)] [(p + \text{Bi}) + (p - \text{Bi}) \exp(-2Hp)] + \\ + p [1 + \exp(-2lp)] [(p + \text{Bi}) - (p - \text{Bi}) \exp(-2Hp)]. \quad (32) \end{aligned}$$

3. Параметрический анализ установившейся температуры наиболее нагретой точки экранированной стенки

Воспользовавшись равенствами (31) и (32), находим частную производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta(H, l)}{\partial l} = & -\frac{Q_0 \text{Fo}^*}{k^2(\text{Fo}^* + \Delta \text{Fo}^*)} \times \\ & \times \int_0^\infty p^2 \exp\left(-\frac{p^2}{4k^2} - pl\right) \psi^{-2}(p) \mu(p) [(p + \text{Bi}) + (p - \text{Bi}) \exp(-2Hp)] dp, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mu(p) = & [1 - \exp(-2lp)] [\varepsilon_* \chi_3 p^2 + Q_*] [(p + \text{Bi}) + \exp(-2Hp)(p - \text{Bi})] + \\ & + \Lambda_2 p [1 + \exp(-2lp)] [(p + \text{Bi}) + \exp(-2Hp)(p - \text{Bi})] + \\ & + p[1 - \exp(-2lp)] [(p + \text{Bi}) - \exp(-2Hp)(p - \text{Bi})]. \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что

$$\frac{\partial \Theta(H, l)}{\partial l} \Big|_{l>0} < 0; \quad \exists \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{\partial \Theta(H, l)}{\partial l} = -0,$$

т.е. при любой фиксированной толщине стенки увеличение толщины теплозащитного покрытия приводит к монотонному снижению искомой температуры $\Theta(H, l)$. Таким образом, имеет смысл искать условия существования оптимальной толщины стенки при фиксированной толщине теплозащитного покрытия.

Далее единицу масштаба z_* полагаем равной фиксированной толщине покрытия l_2 . Таким образом, при дальнейших рассуждениях $l = 1$. Дифференцируя левую и правую части равенства (31) по параметру H при $l = 1$, с учетом равенства (32) находим необходимое условие существования локального экстремума:

$$\begin{aligned} \frac{k^2(\text{Fo}^* + \Delta \text{Fo}^*)}{Q_0 \text{Fo}^*} \frac{\partial \Theta(H, l)}{\partial H} \Big|_{l=1} = & \\ = & 4 \int_0^\infty p^3 \exp\left(-\frac{p^2}{4k^2} - p - 2Hp\right) [1 + \exp(-2p)] (\text{Bi}^2 - p^2) \psi^{-2}(p) dp = 0. \end{aligned}$$

Поскольку из физических соображений следует, что

$$\exists \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{\partial \Theta(H, l)}{\partial H} \Big|_{l=1} = +0,$$

то для существования минимума функции $\Theta(H, 1)$ должно выполняться следующее условие:

$$\lim_{H \rightarrow +0} \frac{\partial \Theta(H, l)}{\partial H} \Big|_{l=1} < 0$$

или, что то же самое:

$$J = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{p^2}{4k^2} - p\right) [1 + \exp(-2p)] (\text{Bi}^2 - p^2) \nu^{-2}(p) p dp < 0, \quad (33)$$

где

$$\nu(p) = (Q_* + \varepsilon_* \chi_3 p^2)[1 + \exp(-2p)] + p \Lambda_2[1 - \exp(-2p)] + \text{Bi}[1 + \exp(-2p)]. \quad (34)$$

Пусть далее

$$J_1 = \text{Bi}^2 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{p^2}{4k^2} - p\right) [1 + \exp(-2p)] \nu^{-2}(p) p dp > 0, \quad (35)$$

$$J_2 = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{p^2}{4k^2} - p\right) [1 + \exp(-2p)] \nu^{-2}(p) p^3 dp > 0. \quad (36)$$

В этом случае, согласно (35) и (36), имеют место неравенства $J_1 > 0$, $J_2 > 0$, а условие (33) может быть представлено в следующем виде: $J_1 < J_2$. Таким образом, если J_1^* — верхняя оценка для J_1 , т.е. $J_1^* > J_1$ и J_2^* — нижняя оценка для J_2 , т.е. $J_2^* < J_2$, то неравенство

$$J_1^* < J_2^* \quad (37)$$

задает достаточное условие существования оптимальной толщины рассматриваемой стенки.

Для нахождения оценки J_1^* воспользуемся цепочкой очевидных неравенств:

$$\begin{aligned} J_1 &< \text{Bi}^2 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{p^2}{4k^2} - p\right) \frac{p dp}{(Q_* + \varepsilon_* \chi_3 p^2 + \text{Bi})^2 [1 + \exp(-2p)]} < \\ &< \text{Bi}^2 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{p^2}{4k^2} - p\right) \frac{p dp}{(Q_* + \varepsilon_* \chi_3 p^2 + \text{Bi})^2} < \frac{\text{Bi}^2}{(Q_* + \text{Bi})^2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{p^2}{4k^2} - p\right) p dp. \end{aligned}$$

Воспользовавшись известным результатом [21], полагаем

$$J_1^* = \frac{\text{Bi}^2}{(Q_* + \text{Bi})^2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{p^2}{4k^2} - p\right) p dp = 2k^2 \frac{\text{Bi}^2}{(Q_* + \text{Bi})^2} [1 - k\sqrt{\pi} \exp(k^2) \operatorname{erfc}(k)] > J_1. \quad (38)$$

Совершенно аналогично

$$\begin{aligned} J_2 &> \int_0^\infty \exp\left(-\frac{p^2}{4k^2} - p\right) \frac{p^2 dp}{(Q_* + \varepsilon_* \chi_3 p^2 + \Lambda_2 p + \text{Bi})^2 [1 + \exp(-2p)]} > \\ &> \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{p^2}{4k^2} - p\right) \frac{p^2 dp}{(Q_* + \varepsilon_* \chi_3 p^2 + \Lambda_2 p + \text{Bi})^2}. \end{aligned}$$

Для получения нижней оценки J_2^* для J_2 рассмотрим функционал

$$\varphi(p) = (Q_* + \varepsilon_* \chi_3 p^2 + \Lambda_2 p + \text{Bi})^2 \exp(-\omega p),$$

где ω — некоторый положительный параметр. Так как

$$\begin{aligned} Q_* + \varepsilon_* \chi_3 p^2 + \Lambda_2 p + \text{Bi} &> 0, \quad \forall p \geq 0; \\ \varphi(p) &> 0, \quad \forall p \in (0, \infty); \\ \varphi(0) &= (\text{Bi} + Q_*)^2 > 0; \text{ и } \varphi(+\infty) = +0, \end{aligned}$$

то существует $A = \max_{p \geq 0} \varphi(p)$.

Таким образом,

$$(Q_* + \varepsilon_* \chi_3 p^2 + \Lambda_2 p + \text{Bi})^{-2} \geq \frac{\exp(-\omega p)}{A}. \quad (39)$$

В неравенстве (39) нужно идентифицировать параметры A и ω . Вычислим производную функции $\varphi(p)$:

$$\varphi'(p) = \exp(-\omega p) [\varepsilon_* \chi_3 p^2 + \Lambda_2 p + Q_* + \text{Bi}] [2(2\varepsilon_* \chi_3 p + \Lambda_2) - \omega(\varepsilon_* \chi_3 p^2 + \Lambda_2 p + Q_* + \text{Bi})].$$

Выберем

$$\omega = \frac{2\Lambda_2}{(\text{Bi} + Q_*)},$$

тогда необходимое условие существования экстремума функции $\varphi(p)$ представляет собой квадратное уравнение

$$p \{ \omega \varepsilon_* \chi_3 p - (4\varepsilon_* \chi_3 - \omega \Lambda_2) \} = 0,$$

которое имеет два различных корня:

$$p_1 = 0; \quad p_2 = \frac{2\varepsilon_* \chi_3 (\text{Bi} + Q_*) - \Lambda_2^2}{\Lambda_2 \varepsilon_* \chi_3}.$$

Если $p_2 \leq 0$, то $A = \varphi(0) = (\text{Bi} + Q_*)^2$. При $2\varepsilon_* \chi_3 (\text{Bi} + Q_*) > \Lambda_2^2$. В общем случае имеем две точки локального экстремума при $p \geq 0$. При этом

$$\varphi(p_2) = \varphi(0) \Phi \left[\frac{2\varepsilon_* \chi_3 (\text{Bi} + Q_*)}{\Lambda_2^2} \right],$$

где

$$\Phi \equiv \Phi \left[\frac{2\varepsilon_* \chi_3 (\text{Bi} + Q_*)}{\Lambda_2^2} \right] = \left\{ \frac{4\varepsilon_* \chi_3 (\text{Bi} + Q_*)}{\Lambda_2^2} - 1 \right\}^2 \exp \left\{ -4 \left(1 - \frac{\Lambda_2^2}{2\varepsilon_* \chi_3 (\text{Bi} + Q_*)} \right) \right\}.$$

Таким образом, если $2\varepsilon_* \chi_3 (\text{Bi} + Q_*) > \Lambda_2^2$, то $A = (\text{Bi} + Q_*)^2 \max\{1; \Phi\}$. С учетом полученных выше результатов, нижняя оценка J_2^* для J_2 определяется неравенством:

$$J_2 > \frac{1}{2A} \int_0^\infty \exp \left(-\frac{p^2}{4k^2} - p - \omega p \right) p^3 dp.$$

Если воспользоваться известным результатом [21] и считать, что

$$\begin{aligned} J_2^* &= \frac{1}{2A} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{p^2}{4k^2} - p - \omega p\right) p^3 dp = \\ &= \frac{2k^4}{A} \left[2 + 2k^2(\omega + 1)^2 - k\sqrt{\pi}(\omega + 1) \operatorname{erfc}[k(\omega + 1)] \times \right. \\ &\quad \left. \times \{3 + 2k^2(\omega + 1)^2\} \exp[k^2(\omega + 1)^2] \right], \quad (40) \end{aligned}$$

то достаточное условие (37), где J_1^* и J_2^* определяются соотношениями (38), (40), определено полностью и может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ll} \text{Bi}^2, & 2\varepsilon_*\chi_3(\text{Bi} + Q_*) \leq \Lambda_2^2 \\ \text{Bi}^2 \max\{1; \Phi\}, & 2\varepsilon_*\chi_3(\text{Bi} + Q_*) > \Lambda_2^2 \end{array} \right] < \\ < k^2 \left[1 - k\sqrt{\pi} \exp(k^2) \operatorname{erfc}(k) \right]^{-1} \left[2 + 2k^2(\omega + 1)^2 - k\sqrt{\pi}(\omega + 1) \operatorname{erfc}[k(\omega + 1)] \times \right. \\ \left. \times \{3 + 2k^2(\omega + 1)^2\} \exp[k^2(\omega + 1)^2] \right]. \quad (41) \end{aligned}$$

Следует заметить, что для больших значений параметра k при вычислении оценок J_1^* и J_2^* целесообразно использовать асимптотическое представление дополнительной функции ошибок Гаусса [21]:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{\exp(-x^2)}{x\sqrt{\pi}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2x^2)^n} \right\}, \quad N = 2, 3, \dots$$

В этом случае с точностью до второго слагаемого в асимптотическом представлении дополнительной функции ошибок Гаусса имеем

$$\left[\begin{array}{ll} \text{Bi}^2, & 2\varepsilon_*\chi_3(\text{Bi} + Q_*) \leq \Lambda_2^2 \\ \text{Bi}^2 \max\{1; \Phi\}, & 2\varepsilon_*\chi_3(\text{Bi} + Q_*) > \Lambda_2^2 \end{array} \right] < \frac{3k^2(\text{Bi} + Q_*)^2}{(\text{Bi} + Q_* + 2\Lambda_2)^2}.$$

Для иллюстрации полученных теоретических результатов предположим, что материал стенки — титан ($\lambda_1 = 15 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$) [10]. Тогда, принимая для теплозащитного покрытия $\lambda_2 = 0.45 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ [22], получаем $\Lambda_2 = 0.03$. Расчеты проводились при $\chi_3 = 0.001$, $Q_* = 1$ и $\varepsilon_* = 1$. Для удобства представления графической информации (рис. 2) по горизонтальной оси отложена толщина стенки H , а по вертикальной — нормированная температура $\delta(H) = k^2 \frac{\text{Fo}^* + \Delta\text{Fo}^*}{Q_0\text{Fo}^*} \Theta(H, 1)$ — величина, пропорциональная установившейся температуре наиболее нагретой точки рассматриваемой стенки.

Заключение

Реализация условия (41), полученного в результате исследований, гарантирует существование оптимальной толщины стенки.

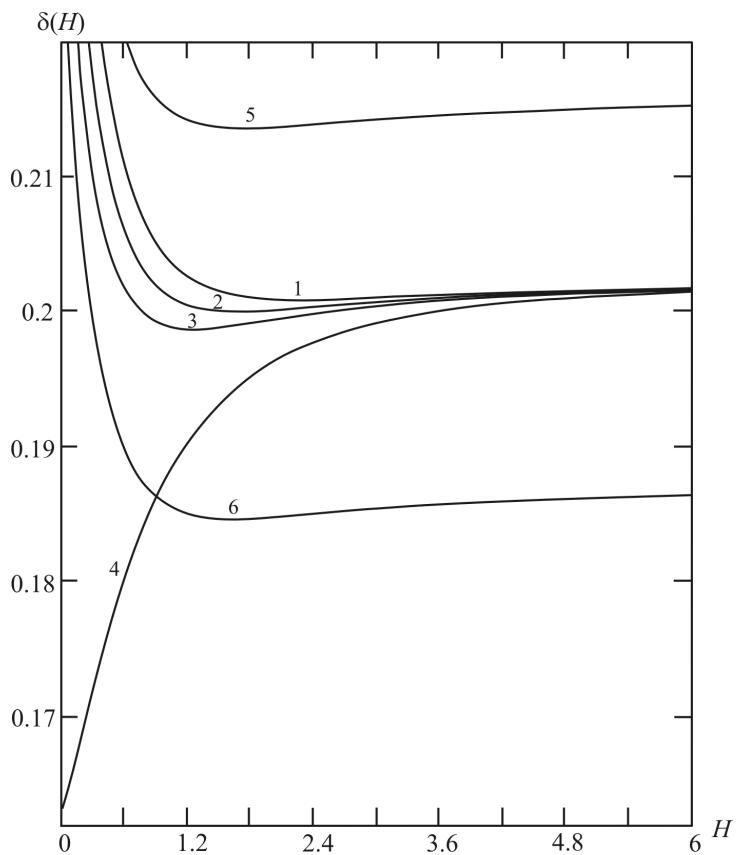


Рис. 2. Зависимость нормированной температуры $\delta(H)$ наиболее нагретой точки экранированной стенки от ее толщины H при различных значениях критерия Био и коэффициента сосредоточенности k импульсно-периодического теплового потока с интенсивностью гауссовского типа: 1 — $\text{Bi} = 0.5, k = 1$; 2 — $\text{Bi} = 0.6, k = 1$; 3 — $\text{Bi} = 0.7, k = 1$; 4 — $\text{Bi} = 1.5, k = 1$; 5 — $\text{Bi} = 0.6, k = 1.1$; 6 — $\text{Bi} = 0.6, k = 0.9$

Так как условие (41) является достаточным, то могут существовать системы «стенка — термоактивная прокладка, функционирующая по принципу обратной связи — теплозащитное покрытие», параметры которых не удовлетворяют условию (41), но обеспечивают существование оптимальной толщины стенки (см. рис. 2, кривые 3, 6) в смысле используемого принципа оптимальности.

В соответствии с результатами вычислительных экспериментов, частично представленных на рис. 2, можно утверждать, что в случае существования оптимальной толщины плоской изотропной стенки с теплозащитным покрытием и промежуточным слоем в виде термоактивной прокладки, функционирующей по принципу обратной связи возрастание значения Bi , т.е. увеличение интенсивности теплообмена с незащищенной стороны стенки, при фиксированном k сопровождается уменьшением значения $\text{opt}\{H\}$ вплоть до нуля (см. рис. 2, кривые 1, 2, 3, 4). Увеличение значения k , т.е. уменьшение дисперсии действующего теплового потока, сопровождается ростом значения $\text{opt}\{H\}$ при фиксированном Bi (см. рис. 2, кривые 6, 2, 5).

Список литературы

1. Карслou Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 488 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
3. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001. – 550 с.
4. Зарубин В.С. Расчет и оптимизация термоизоляции. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 192 с.
5. Коздоба Л.А. Вычислительная теплофизика. – Киев: Наукова думка, 1992. – 224 с.
6. Тепломассоперенос и термоупругость в многослойных конструкциях / Кудинов В.А., Калашников В.В., Карташов Э.М., Лаптев Н.И., Сергеев С.К. – М.: Энергоатомиздат, 1997. – 426 с.
7. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
8. Полежаев Ю.В., Юрьевич Ф.Б. Тепловая защита. – М.: Энергия, 1976. – 392 с.
9. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 328 с.
10. Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Кокора А.Н. Лазерная обработка материалов. – М.: Машиностроение, 1975. – 296 с.
11. Зарубин В.С. Оптимальная толщина охлаждаемой стенки, подверженной местному нагреву // Известия вузов. Машиностроение. – 1970. – №10. – С. 18–21.
12. Иорданишвили Е.К. Термоэлектрические источники питания. – М.: Советское радио, 1968. – 184 с.
13. Пудовкин М.А., Волков И.К. Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1978. – 188 с.
14. Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С. Оптимальная толщина охлаждаемой стенки с покрытием, подверженной локальному импульсно-периодическому нагреву // Инженерно-физический журнал. – 2001. – Т. 74, №6. – С. 82–87.
15. Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С. Оптимальная толщина охлаждаемой стенки при локальном импульсно-периодическом нагреве // Инженерно-физический журнал. – 2005. – Т. 78, №2. – С. 16–23.
16. Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С. Оптимальная толщина охлаждаемой стенки с покрытием при локальном импульсно-периодическом нагреве // Теплофизика высоких температур. – 2005. – Т. 43, №3. – С. 466–473.

17. Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С. Термоактивная прокладка как средство управляемого воздействия на температурное поле конструкции // Известия РАН. Энергетика. – 2002. – №4. – С. 131–141.
18. Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С. Математическое моделирование процесса теплопереноса в экранированной стенке при осесимметричном тепловом воздействии // Известия РАН. Энергетика. – 2003. – №5. – С. 75–88.
19. Бейтмен Г., Эрдэйи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1974. – 296 с. [Erdelyi A. Bateman Y. Higher Transcendental Functions. Vol. 2. McGraw-Hill Book Co., New York, 1953.].
20. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учебник для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. – 228 с.
21. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
22. Энергетические конденсированные системы: Краткий энциклопедический словарь / Под ред. Б.П. Жукова. – М.: Янус-К, 1999. – 596 с.

The optimal thickness of a shielded wall provided a thermal insulator and thermal active layer is supposed to function using the feedback principle

05, May 2012

DOI: 10.7463/0512.0396333

Volkov I. K., Tverskaya E. S.

Russia, Bauman Moscow State Technical University
E_tverskaya@bmstu.ru

In this paper the sufficient conditions for existence of the optimal thickness of a plane wall that ensures the minimum steady-state temperature of the wall's most heated point are determined, provided that a thermal insulator and a thermal active layer are available. The thermal active layer is supposed to function using the feedback principle. On the unprotected side the wall is cooled by a medium whose temperature and heat-transfer coefficient are constant, whereas on the side of a coating the wall is exposed to a heat flux in the pulse-periodic regime.

References

1. Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of Heat in Solids, Oxford University Press, 1959. (Russ. ed.: Karslou G., Eger D. Teploprovodnost' tverdykh tel. Moscow, Nauka, 1964. 488 p.)
2. Lykov A.V. Teoriia teploprovodnosti [The theory of heat conduction]. Moscow, Vysshiaia shkola, 1967. 600 p.
3. Kartashov E.M. Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel [Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids]. Moscow, Vysshiaia shkola, 2001. 550 p.
4. Zarubin V.S. Raschet i optimizatsiia termoizoliatsii [Calculation and optimization of thermal insulation]. Moscow, Energoatomizdat, 1991. 192 p.
5. Kozdoba L.A. Vychislitel'naia teplofizika [The computational thermophysics]. Kiev, Naukova dumka, 1992. 224 p.
6. Kudinov V.A., Kalashnikov V.V., Kartashov E.M., Laptev N.I., Sergeev S.K. Teplomassoperenos i termouprugost' v mnogosloinykh konstruktsiakh [Heat and mass transfer and thermoelasticity in multilayer structures]. Moscow, Energoatomizdat, 1997. 426 p.
7. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Vychislitel'naia teploperedacha [Computational heat transfer]. Moscow, Editorial URSS, 2003. 784 p.

8. Polezhaev Iu.V., Iurevich F.B. Teplovaia zashchita [Thermal protection]. Moscow, Energiia, 1976. 392 p.
9. Zarubin V.S. Inzhenernye metody reshenii zadach teploprovodnosti [Engineering methods for solving problems of thermal conductivity]. Moscow, Energoatomizdat, 1983. 328 p.
10. Rykalin N.N., Uglov A.A., Kokora A.N. Lazernaia obrabotka materialov [Laser processing of materials]. Moscow, Mashinostroenie, 1975. 296 p.
11. Zarubin V.S. Optimal'naia tolshchina okhlazhdаемой stenki, podverzhennoi mestnomu nagrevu [The optimum thickness of the cooled wall exposed to local heating]. Izvestia vuzov. Mashinostroenie, 1970, no. 10, pp. 18-21.
12. Iordanishvili E.K. Termoelektricheskie istochniki pitaniia [Thermoelectric power sources]. Moscow, Sovetskoe radio, 1968. 184 p.
13. Pudovkin M.A., Volkov I.K. Kraevye zadachi matematicheskoi teorii teploprovodnosti v prilozhenii k raschetam temperaturnykh polei v neftianykh plastakh pri zavodnenii [Boundary-value problems of mathematical theory of heat conduction in the annex to the calculation of temperature fields in oil reservoirs at flooding]. Kazan', KU Publ., 1978. 188 p.
14. Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaia E.S. Optimal'naia tolshchina okhlazhdаемой stenki s pokrytiem, podverzhennoi lokal'nomu impul'sno-periodicheskому nagrevu [The optimum thickness of a cooled wall with a coating that is subject to the local pulse-periodic heating]. Inzhenerno-fizicheskii zhurnal, 2001, vol. 74, no. 6, pp. 82-87.
15. Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaia E.S. Termoaktivnaia prokladka kak sredstvo upravliayemogo vozdeistviia na temperaturnoe pole konstruktsii [Thermosetting pad as a means of controlled influence on the temperature field construction]. Izvestia RAN. Energetika, 2002, no. 4, pp. 131-141.
16. Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaia E.S. Matematicheskoe modelirovanie protsessa teploperedena v ekranirovannoi stenke pri osesimmetrichnom teplovom vozdeistvii [Mathematical simulation of heat transfer in a shielded wall at an axisymmetric thermal exposure]. Izvestia RAN. Energetika, 2003, no. 5, pp. 75-88.
17. Erdelyi A. Bateman Y. Higher Transcendental Functions. Vol. 2. New York, McGraw-Hill Book Co., 1953. (Russ. ed.: Beitmen G., Erdeii A. Vysshie transsendentnye funktsii. T. 2. Funktsii Besselia. Funktsii parabolicheskogo tsilindra, ortogonal'nye mnogochleny. Moscow, Nauka, 1974. 296 p.).
18. Volkov I.K., Kanatnikov A.N. Integral'nye preobrazovaniia i operatsionnoe ischislenie [Integral transforms and operational calculus]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1996. 228 p.
19. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tablitsy integralov, summ, riadov i proizvedenii [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow, Nauka, 1971. 1108 p.
20. Zhukov B.P., Ed. Energeticheskie kondensirovannye sistemy: Kratkii entsiklopedicheskii slovar' [Energy condensed systems: A brief encyclopedic dictionary]. Moscow, Ianus-K, 1999. 596 p.