электронное научно-техническое издание
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС 77 - 30569. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

Методы представления и преобразования сигналов в базисе обобщенных функций Крестенсона

77-30569/372760

03, март 2012

Сюзев В. В., Савельев А. Я., Гудзенко Д. Ю.

УДК 519.216.1/2

МГТУ им. Н.Э. Баумана
v.suzev@bmstu.ru

Вычислительная и функциональная эффективность решения многих задач цифровой обработки сигналов спектральными методами существенно зависит от используемых систем базисных функций [1]. Поскольку ортогональных систем базисных функций существует неограниченное множество, то выбор рационального базиса является сложной теоретической и прикладной проблемой. В этих условиях особенно полезными могут оказаться параметрические базисные функции, содержащие в своей структуре один или несколько изменяемых параметров, влияющих на их свойства. Известным и важным примером таких базисов служит класс комплексных экспоненциальных функций Виленкина-Крестенсона [2], управление свойствами которых осуществляется с помощью вариации основания используемой системы счисления. Обобщение этих функций на многоосновную систему счисления (систему счисления с переменным основанием) и применение дополнительных способов их переупорядочения значительно расширяет ассортимент возможных базисных систем, среди которых можно искать базис, в наибольшей степени удовлетворяющий условию решаемой задачи обработки. В данной статье рассмотрены известные и новые методы формирования таких базисных систем и их основные свойства, а также оригинальные скалярные алгоритмы быстрого преобразования Фурье на их основе.

Пусть $p_1, p_2, ..., p_n$ есть целые положительные числа, принятые в качестве оснований системы счисления, и целые числа k и i, задающие номер и аргумент обобщенной функции Крестенсона (ОФК) $W(k, i)$, на интервале $N = p_1 p_2 ... p_n$ записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} i &= \sum_{m=1}^{n} i_m p_0 p_1 \ldots p_{m-1} = p_{n-1} p_{n-2} \ldots p_1 i_n + \ldots + p_2 p_1 i_3 + p_1 i_2 + i_1, \\ k &= \sum_{m=1}^{n} k_m p_0 p_1 \ldots p_{m-1} = p_{n-1} p_{n-2} \ldots p_1 k_n + \ldots + p_2 p_1 k_3 + p_1 k_2 + k_1, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где $p_0 = 1$, а i_m и k_m являются m-ми разрядами позиционного представления чисел i и k (i_1 и k_1 - младшие разряды) и лежат в диапазоне $[0,\ p_m - 1]$.

Тогда ОФК можно представить следующим выражением [3]:

$$W(k,i) = \exp(j 2\pi \sum_{m=1}^{n} \frac{k_m i_m}{p_m}),\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1. \quad (2)$$

где $j = \sqrt{-1}$. Эти функции можно выразить и через произведение дискретных комплексных экспоненциальных функций (ДЭФ) $\exp(j \frac{2\pi k_m i_m}{p_m})$:

$$W(k,i) = \prod_{m=1}^{n} \exp(\frac{j 2\pi k_m i_m}{p_m}) = \prod_{m=1}^{n} W_{p_m}^{k_m i_m},\quad i_m,\ k_m = 0,\ 1,\ \ldots,\ p_m - 1, \quad (3)$$

где принято $W_{p_m} = \exp(j \frac{2\pi}{p_m})$.

Записанные таким образом ОФК обладают рядом интересных свойств. Приведем основные из них.

1. ОФК являются комплексными функциями с единичным модулем и фазой $\theta(k,i) = 2\pi \sum_{m=1}^{n} \frac{k_m i_m}{p_m}$. Вычитая из фазы целое число 2π, можно получить ОФК с минимальными фазами.

2. В ОФК переменные k и i равноправны, поэтому, если поменять их местами, функция не изменится, т.е.

$$W(k,i) = W(i,k). \quad (4)$$

В этом проявляется свойство двойственности ОФК относительно своих аргументов, которое приводит к симметричности матрицы значений ОФК.

3. Среднее значение любой ОФК, кроме нулевой, равно нулю, т.е.

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} W(k,i) = 0,\quad k \neq 0. \quad (5)$$

Действительно,

$$\sum_{i=0}^{N-1} W(k,i) = \sum_{i=0}^{N-1} \prod_{m=1}^{n} W_{p_m}^{k_m i_m} = \prod_{m=1}^{n} \sum_{i=0}^{N-1} W_{p_m}^{k_m i_m} = \prod_{m=1}^{n} \sum_{i_1=0}^{p_1-1} \sum_{i_2=0}^{p_2-1} \ldots \sum_{i_n=0}^{p_n-1} W_{p_m}^{k_m i_m}. \quad (6)$$

Но при $k_m \neq 0$

$$\sum_{i_m=0}^{p_m-1} W_{p_m}^{k_m i_m} = 0,$$

поэтому при $k \neq 0$, когда хотя бы один разряд $k_m \neq 0$, все произведение (6) будет равно нулю. Следовательно, выражение (5) справедливо.

Среднее значение нулевой ОФК равно единице, т.к. $W(0,i)=1$ и

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} 1 = 1.$$

4. Произведение двух любых ОФК дает другую ОФК:

$$W(k,i)W(\lambda,i) = W(\alpha,i), \tag{7}$$

где

$$\alpha = k(+)_{\{p\}}\lambda, \tag{8}$$

а произведение двух любых ОФК, одна из которых является комплексно-сопряженной, так же принадлежит ОФК:

$$W(k,i)W^*(\lambda,i) = W(\alpha,i), \tag{9}$$

где

$$\alpha = k(-)_{\{p\}}\lambda. \tag{10}$$

В выражениях (8) и (10) $(+)_{\{p\}}$ и $(-)_{\{p\}}$ означают операции поразрядного модулярного сложения и вычитания, выполняемые по правилам:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = (k_1 \pm \lambda_1) \pmod{p_1}, \\ \alpha_2 = (k_2 \pm \lambda_2) \pmod{p_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_n = (k_n \pm \lambda_n) \pmod{p_n}. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Доказательство первого утверждения вытекает из следующих соотношений:

$$W(k,i)\cdot W(\lambda,i) = \prod_{m=1}^{n} W_{p_m}^{k_m i_m} \cdot \prod_{\gamma=1}^{n} W_{p_\gamma}^{\lambda_\gamma i_\gamma} = \prod_{\beta=1}^{n} W_{p_\beta}^{k_\beta i_\beta} \cdot W_{p_\beta}^{\lambda_\beta i_\beta} =$$

$$= \prod_{\beta=1}^{n} W_{p_\beta}^{(k_\beta+\lambda_\beta) i_\beta} = \prod_{\beta=1}^{n} W_{p_\beta}^{\alpha_\beta i_\beta} = W(\alpha,i).$$

Вывод второго утверждения можно получить аналогичным образом, если учесть, что

$$W^*(\lambda,i) = \prod_{\gamma=1}^{n} W_{p_\gamma}^{-\lambda_\gamma i_\gamma}.$$

Данное свойство отражает мультипликативность ОФК. В силу своей двойственности ОФК обладают мультипликативностью как по индексу *k*, так и по индексу *i*, т.е. являются дважды мультипликативными функциями.

5. Мощность любой ОФК равна 1:

$$P_k = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} W(k,i)W^*(k,i) = 1. \tag{12}$$

Действительно, $W(k,i)W^*(k,i)=|W(k,i)|^2=1$ и поэтому формула (12) справедлива.

6. ОФК являются ортогональными функциями, т.к.

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}W(k,i)W^*(\lambda,i)=0,\quad k\neq\lambda. \tag{13}$$

Для доказательства этого свойства сначала воспользуемся свойством мультипликативности в виде (9) и запишем сумму в (13) так:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}W(k,i)W^*(\lambda,i)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}W(\alpha,i).$$

Из этого выражения следует, что взаимная мощность двух ОФК с номерами k и λ равна среднему значению ОФК с номером α, определяемым соотношением (10). Но при $k\neq\lambda$ номер $\alpha=k(-)_{\{p\}}\lambda$ не равен нулю и среднее значение такой ОФК будет равно нулю (см. (5)).

7. Система из N ОФК будет полной системой на интервале *[0, N)*. Это следует из того, что в этом случае к системе нельзя будет добавить ни одной новой функции, которая была бы ортогональной одновременно ко всем остальным функциям системы.

Таким образом, N ОФК образуют полную ортонормированную мультипликативную комплексную дискретную базисную систему $\{W(k,i)\}$, пригодную для спектрального представления любых решетчатых сигналов ограниченной мощности. Пара ДПФ в базисе ОФК

$$\left.\begin{aligned} X(k)&=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}x(i)W^*(k,i),\\ x(i)&=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W(k,i),\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

а равенство Парсеваля

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}x^2(i)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)X^*(k), \tag{15}$$

где $X^*(k)$ - комплексно-сопряженная к $X(k)$ величина.

Так как ОФК являются дважды мультипликативными функциями, то для их спектров справедливы все общие свойства, приведенные в работе [2]. В частности, выполняются теоремы о модуляции, сдвиге, свертке, корреляции и умножении сигналов. При этом, поскольку операция мультипликативности совпадает с операцией поразрядного сложения или вычитания по переменным модулям, то и операция обобщенного сдвига в этом базисе понимается в этом же смысле. Такие же операции должны быть использованы здесь и при записи обобщенных сверток и корреляций. Энергетические спектры в базисе ОФК инвариантны к такому обобщенному сдвигу.

ДПФ в базисе ОФК можно записать и в матричной форме.

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{W}^{*} \boldsymbol{x},$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{X},$$

где матрицы прямых ($\boldsymbol{W}$) и комплексно спряженных ($\boldsymbol{W}^{*}$) значений ОФК имеют вид:

$$\boldsymbol{W} = [\prod_{m=1}^{n} W_{p_m}^{k_m i_m}], \ \boldsymbol{W}^{*} = [\prod_{m=1}^{n} W_{p_m}^{-k_m i_m}].$$

Эти матрицы значений ОФК являются матрицами с полными фазами. Вычитая в них из степеней W числа, кратные $\boldsymbol{N}$, получим матрицы значений с минимальными фазами. Матрицы значений ОФК $\boldsymbol{W}$ и $\boldsymbol{W}^{*}$ будут симметрическими и унитарными. Они содержат действительные и комплексные элементы, причем комплексные попарно сопряжены. Нулевая строка и нулевой столбец этих матриц состоят только из единичных элементов.

Для ОФК по аналогии с функциями Виленкина-Крестенсона (ВКФ) и функциями Уолша [2] можно вести понятие ранга R, равного числу ненулевых разрядов кода номера функции k. Номер k функции или спектра ранга r можно тогда обозначить в виде $k(R=r)$. При r =1 в разложении k будет только один значащий разряд. Совокупность таких номеров можно записать так:

$$k(R=1) = k_m p_0 p_1 \ldots p_{m-1} = k_m \prod_{\lambda=1}^{m-1} p_\lambda, \quad k_m = 1,\ 2,\ \ldots,\ p_m - 1;\ m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Так как здесь используется только одна переменная с индексом, то ее можно заменить на простую переменную μ и тем самым упростить запись:

$$k(R=1) = \mu \prod_{\lambda=1}^{m-1} p_\lambda, \quad \mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ p_m - 1;\ m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Если значение μ (или k_m) равно 1, то номер $k = \prod_{\lambda=1}^{m-1} p_\lambda$ и принадлежит следующему множеству значений: $\{1,\ p_1,\ p_1\ p_2,\ \ldots,\ p_1 p_2\ \ldots\ p_{n-1}\}$. Соответствующие ему функции

$$W(\prod_{\lambda=1}^{m-1} p_\lambda, i) = \exp(j \frac{2\pi}{p_m} i_m) \tag{16}$$

и зависят только от значения своего аргумента. Таким свойством обладали обычные функции Радемахера в системах Уолша и обобщенные функции Радемахера в системах ВКФ [2]. По аналогии эти функции так же можно считать обобщенными функциями Радемахера $R(\mu, i)$ для системы счисления с переменным основанием. Тогда

$$R(n-m+1, i) = \exp(j \frac{2\pi}{p_m} i_m) = W_{p_m}^{i_m},\ m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{17}$$

При введении обозначения функции Радемахера учтено, что с увеличением ее номера число точек изменения ее значений должно возрастать. Очевидно, что в полной системе ОФК (2) содержится только n обобщенных функций Радемахера и любая ОФК (2) может быть выражена через их произведение:

$$W(k,i)=\prod_{m=1}^{n}W_{p_m}^{k_m i_m}=\prod_{m=1}^{n}[R(n-m+1,i)]^{k_m}. \qquad (18)$$

<u>Пример 1.</u> Построить систему ОФК для N=6 прямым методом и с помощью функций Радемахера.

<u>Решение.</u> В этом случае $N=2\cdot 3$. Поэтому примем $p_1=2$, а $p_2=3$. Тогда числа k и i запишутся в виде $i=i_1+2i_2=(i_2 i_1)$ и $k=k_1+2k_2=(k_2 k_1)$, где $i_1,k_1=0;1$, а $i_2,k_2=0;1;2$. Значения i и k в десятичной системе и системе с основаниями 2 и 3 сведем в табл. 1.

Таблица 1

$i;k$	0	1	2	3	4	5
$(i_2 i_1);(k_2 k_1)$	00	01	10	11	20	21

В соответствии с формулой (3) ОФК в этом случае записываются следующим образом:

$$W(k,i)=W_2^{k_1 i_1}W_3^{k_2 i_2}=(-1)^{k_1 i_1}\cdot W_3^{k_2 i_2}.$$

Подставляя сюда все значения разрядов, получим систему из шести ОФК, которую представим в виде следующей матрицы значений с минимальными фазами:

$$\boldsymbol{W}_6=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & W_3^1 & W_3^1 & W_3^2 & W_3^2\\ 1 & -1 & W_3^1 & -W_3^1 & W_3^2 & -W_3^2\\ 1 & 1 & W_3^2 & W_3^2 & W_3^1 & W_3^1\\ 1 & -1 & W_3^2 & -W_3^2 & W_3^1 & -W_3^1\end{bmatrix}. \qquad (19)$$

Элементы W_3^1 и W_3^2 имеют следующие значения:

$$W_3^1=-1/2+j\frac{\sqrt{3}}{2};\ W_3^2=-1/2-j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Теперь вычислим ОФК с помощью функций Радемахера. В соответствии с выражением (18) они будут равны:

$$R(2,i)=W_{p_1}^{i_1}=W_2^{i_1}=\{1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1\},$$

$$R(1,i)=W_{p_2}^{i_2}=W_3^{i_1}=\{1,\ 1,\ W_3^1,\ W_3^1,\ W_3^2,\ W_3^2\}.$$

После этого, пользуясь формулой (18), выразим все ОФК через эти функции:

$$W(0,i)=1;\ W(1,i)=W(01,i)=R(2,i);\ W(2,i)=W(10,i)=R(1,i);$$

$$W(3,i)=W(11,i)=R(2,i)R(1,i);\ W(4,i)=W(20,i)=R^2(1,i);\ W(5,i)=W(21,i)=R(2,i)R^2(1,i).$$

Вычисление по этим формулам приводит к той же матрице значений ОФК (19).

Возможен еще один способ вычисления приведенных ОФК. Он следует из матричной интерпретации выражения (3) в виде кронекеровского произведения соответствующих матриц ДЭФ:

$$\boldsymbol{W}_{p_1 p_2 \dots p_n} = \boldsymbol{D}_{p_1} \times \boldsymbol{D}_{p_2} \times \dots \times \boldsymbol{D}_{p_n}, \tag{20}$$

где

$$\boldsymbol{D}_{p_m} = \{W_{p_m}^{k_m i_m}\}. \tag{21}$$

Поскольку такая система ОФК может быть выражена с помощью кронекеровского произведения, то ее можно назвать системой О*ФК-Кронекера*. В частном случае, при $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$ она переходит в систему ВКФ-Адамара [2].

<u>Пример 2.</u> Вычислить матрицу ОФК кронекеровским способом для условия предыдущего примера.

<u>Решение.</u> В этом случае

$$\boldsymbol{W}_6 = \boldsymbol{W}_{2\cdot 3} = \boldsymbol{D}_2 \times \boldsymbol{D}_3,$$

где

$$\boldsymbol{D}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{D}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_3^1 & W_3^2 \\ 1 & W_3^2 & W_3^1 \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{W}_6 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{D}_2 \\ \boldsymbol{D}_2 & W_3^1 \boldsymbol{D}_2 & W_3^2 \boldsymbol{D}_2 \\ \boldsymbol{D}_2 & W_3^2 \boldsymbol{D}_2 & W^1 \boldsymbol{D}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & W_3^1 & W_3^1 & W_3^2 & W_3^2 \\ 1 & -1 & W_3^1 & -W_3^1 & W_3^2 & -W_3^2 \\ 1 & 1 & W_3^2 & W_3^2 & W_3^1 & W_3^1 \\ 1 & -1 & W_3^2 & -W_3^2 & W_3^1 & -W_3^1 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Матрицы (19) и (22) совпадают.

Кронекеровская система является только одной из возможных полных базисных систем, использующих ОФК. На основе функций $\exp(j2\pi \sum_{m=1}^{n} (k_m i_m / p_m))$ можно построить целое семейство базисов с симметрическими и унитарными матрицами, число которых зависит от конкретной величины N. Причем возможностей для организации базисных систем здесь больше, чем в ВКФ.

Можно отметить, кроме рассмотренных, по меньшей мере еще два способа построения таких базисов. Первый способ основывается на использовании формул (2), (18) или (20) для всех возможных комбинаций сомножителей в произведении $p_1 p_2 \dots p_n$

для N. Если все сомножители p_m разные, то он позволяет получить $n!$ различных базисных систем ОФК-Кронекера.

Пример 3. Построить все системы ОФК-Кронекера для N=6.

Решение. В этом случае возможны два варианта разложения N=6 на множители: $N = 2 \cdot 3$ и $N = 3 \cdot 2$. Для первого варианта система ОФК-Кронекера получена и приведена в предыдущих примерах. Для второго варианта имеем

$$\boldsymbol{W}_6 = \boldsymbol{W}_{3\cdot 2} = \boldsymbol{D}_3 \times \boldsymbol{D}_2 .$$

Поэтому

$$\boldsymbol{W}_6 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_3 & \boldsymbol{D}_3 \\ \boldsymbol{D}_3 & -\boldsymbol{D}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_3^1 & W_3^2 & 1 & W_3^1 & W_3^2 \\ 1 & W_3^2 & W_3^1 & 1 & W_3^2 & W_3^1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & W_3^1 & W_3^2 & -1 & -W_3^1 & -W_3^2 \\ 1 & W_3^2 & W_3^1 & -1 & -W_3^2 & -W_3^1 \end{bmatrix}. \qquad (23)$$

Полученная матрица (23) отличается от матрицы (22).

_____ . _____

Второй способ формирования базисных ОФК-систем состоит в перестановке строк и столбцов любой матрицы ОФК-Кронекера, полученной первым способом, по закону определенной замкнутой операции над индексами k и i ОФК (напомним, что замкнутой считается такая операция над индексом, результат которой, изменяя порядок следования значений индекса, не меняет самого диапазона его изменения, т.е. результирующий индекс пробегает те же значения, что и исходный, но в другой последовательности). Такими операциями являются, например, инверсия кода индекса и кодирование Грея индекса, обобщенные на случай многоосновной системы счисления. Рассмотрим эти операции.

Если число k в многоосновной системе счисления представляется выражением (1), то инверсное ему число $\bar{k}$ в этой же системе счисления записывается следующим образом:

$$\bar{k} = \sum_{m=1}^{n} k_{n+1-m} M_0 M_1 \ldots M_{m-1} \qquad (24)$$

где

$$M_m = p_{n+1-m}, \quad M_0 = p_{n+1} = 1.$$

Обобщенная инверсия, как и двоичная, и p-ичная инверсии, сводится к записи разрядов кода числа k в обратном порядке. Однако веса разрядов в многоосновной системе, где диапазоны изменения разрядов k_m в общем случае не совпадают, должны быть изменены по закону (24). При $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$ обобщенная инверсия переходит в p-ичную инверсию и инверсное число $\bar{k}$ имеет более привычный вид записи:

$$\bar{k} = \sum_{m=1}^{n} k_{n+1-m} p^{m-1}.$$

Пример 4. Найти инверсные значения целочисленного индекса, принадлежащего диапазону *[0,6)*.

Решение. В этом случае 6=2· 3, поэтому $p_1 = 2$, а $p_2 = 3$. В системе счисления с основаниями 2 и 3 числа k и $\bar{k}$ будут иметь следующий вид: $k = (k_2 k_1) = 2k_2 + k_1$, $\bar{k} = (k_1 k_2) = 3k_1 + k_2$. Их значения в различных формах записи приведены в табл. 2.

Таблица 2

k	0	1	2	3	4	5
$(k_2 k_1)$	00	01	10	11	20	21
$(k_1 k_2)$	00	10	01	11	02	12
$\bar{k}$	0	3	1	4	2	5
$(< k_2 >< k_1 >)$	00	01	11	10	20	21
$< k >$	0	1	3	2	4	5

_____ . _____

Код Грея $< k >$ числа k в многоосновной системе счисления вычисляется по следующему алгоритму: $< k_m >= (k_m + k_{m+1}) \pmod{p_m}$, $m = 1, 2, ..., n$; $k_{n+1} = 0$, который отличается от соответствующего алгоритма в системе счисления с одним основанием только использованием различных модулей при формировании разрядов кода.

Пример 5. Найти значения кода Грея для индекса *k* предыдущего примера.

Решение. Так как в этом случае $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, то $< k_1 >= (k_1 + k_2) \pmod 2$, а $< k_2 >= k_2 \pmod 3$. Результаты расчетов по этим формулам приведены в табл. 2.

_____ . _____

Рассмотренные операции позволяют получить новые полные ортонормированные мультипликативные системы ОФК. Для этого необходимо в матрице любой известной системы ОФК осуществить сначала перестановку строк, а затем – столбцов (можно и наоборот) по закону этих операций. В результате будут получены новые симметрические и унитарные матрицы ОФК. Перестановка только строк или только столбцов исходной матрицы приводит к несимметрическим результирующим матрицам.

Продемонстрируем процесс формирования симметрических матриц на конкретных примерах.

Пример 6. Построить матрицу ОФК из матрицы ОФК-Кронекера (19) с использованием операции обобщенной инверсии индексов.

Решение. В соответствии с данными табл. 2 произведем следующее переупорядочение матрицы (19): первую строку перемещаем на место второй, а вторую – на место четвертой, третью – на место первой, четвертую – на место третьей, а нулевую и пятую строки оставляем на своих местах. В результате получается следующая промежуточная матрица:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & W_3^1 & -W_3^1 & W_3^2 & -W_3^2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & W_3^2 & W_3^2 & W_3^1 & W_3^1 \\ 1 & 1 & W_3^1 & W_3^1 & W_3^2 & W_3^2 \\ 1 & -1 & W_3^2 & -W_3^2 & W_3^1 & -W_3^1 \end{bmatrix}$$

Эта матрица несимметрическая. Для получения из нее симметрической матрицы необходимо выполнить аналогичные перестановки её столбцов. Тогда будет получена следующая итоговая матрица:

$$\boldsymbol{W}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -W_3^1 & -1 & W_3^2 & W_3^1 & -W_3^2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & W_3^2 & 1 & W_3^1 & W_3^2 & W_3^1 \\ 1 & W_3^1 & 1 & W_3^2 & W_3^1 & W_3^2 \\ 1 & -W_3^2 & -1 & W_3^1 & W_3^2 & -W_3^1 \end{bmatrix}. \qquad (25)$$

Эта матрица ОФК является симметрической и отличается от исходной.

_____ . _____

Пример 7. Построить матрицу ОФК из той же матрицы ОФК-Кронекера (19) с использованием кодирования Грея.

Решение. В соответствии с данными табл. 2 в этом случае процедура перестановок существенно проще: нулевые, первые, четвертые и пятые строки и столбцы остаются на месте, а вторые и третьи меняются местами. В итоге получается следующая матрица ОФК:

$$W_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -W_3^1 & W_3^1 & W_3^2 & -W_3^2 \\ 1 & 1 & W_3^1 & W_3^1 & W_3^2 & W_3^2 \\ 1 & 1 & W_3^2 & W_3^2 & W_3^1 & W_3^1 \\ 1 & -1 & -W_3^2 & W_3^2 & W_3^1 & -W_3^1 \end{bmatrix}. \qquad (26)$$

Эта матрица так же симметрическая и по структуре не совпадает ни с матрицей (19), ни с матрицей (25).

_____ . _____

Результаты приведенных примеров показывают, что все матрицы, полученные различными способами, отличаются друг от друга по структуре, хотя и обладают одинаковыми общими свойствами. Это говорит о том, что рассмотренные способы не подменяют друг друга и являются инструментом для построения новых полных ортонормированных и мультипликативных базисных систем.

Перейдем теперь к синтезу алгоритмов быстрого преобразования в базисе обобщенных функций Крестенсона (БПК). Вариантов построения БПК существует еще больше, чем быстрых преобразований в базисе ВКФ, поскольку возможно образование значительно большего числа систем ОФК. В качестве примера приведем методы синтеза БПК только для ОФК-систем Кронекера.

Остановимся сначала на случае представления числа отсчетов сигнала в виде произведения двух сомножителей: $N = p_1 p_2$, где p_1 и p_2 являются целыми положительными числами. Преобразуем одномерный массив $x(i)$ в двумерную таблицу $x(i_1, i_2)$ с помощью подстановки $i = i_1 + p_1 i_2$ $(i_1 = 0, 1, ..., p_1 - 1;\ i_2 = 0, 1, ..., p_2 - 1)$. Эта подстановка соответствует представлению величины i в позиционной системе счисления с основаниями p_1 и p_2 при числе разрядов $n = 2$. Тогда прямые ДПФ в базисе ОФК (14) без нормирующего множителя $1/N$ можно записать так:

$$X(k) = \sum_{i_1=0}^{p_1-1} \sum_{i_2=0}^{p_2-1} x(i_1 + p_1 i_2) W^*(k, (i_1 + p_1 i_2)/N) = \sum_{i_1=0}^{p_1-1} \sum_{i_2=0}^{p_2-1} x(i_1, i_2) W^*(k, (i_1 + p_1 i_2)/N).$$

Рассмотрим спектральные составляющие с номерами, изменяющимися по такому же закону, что и номера отсчетов, т.е. с $k = k_1 + p_1 k_2$, $k_1 = 0, 1, ..., p_1 - 1;$ $k_2 = 0, 1, ..., p_2 - 1$:

$$X(k_1 + p_1 k_2) = X(k_1, k_2) = \sum_{i_1=0}^{p_1-1} \sum_{i_2=0}^{p_2-1} x(i_1, i_2) W^*(k_1 + p_1 k_2, (i_1 + p_1 i_2)/N). \qquad (27)$$

Используя свойства позиционных кодов в системе с переменным основанием, можно записать, что

$$i_1 + p_1 i_2 = i_1 (+)_{\{p\}} p_1 i_2,\ k_1 + p_1 k_2 = k_1 (+)_{\{p\}} p_1 i_2, \qquad (28)$$

где $(+)_{\{p\}}$ является, как и ранее в выражении (8), обозначением операции поразрядного суммирования по переменному модулю. Тогда в соответствии со свойствами мультипликативности и двойственности ОФК выражение (27) можно преобразовать к виду

$$X(k_1, k_2) = \sum_{i_1=0}^{p_1-1} W^*(k_1, i_1/N) W^*(p_1 k_2, i_1/N) \sum_{i_2=0}^{p_2-1} x(i_1, i_2) W^*(k_1, p_1 i_2/N) W^*(p_1 k_2, p_1 i_2/N).$$

Дальнейшее упрощение этого выражения зависит от значений приведенных в нем ОФК. Чтобы их получить, воспользуемся записью ОФК в виде формулы (2). Тогда имеем

$$W^*(k_1, i_1 / N) = \exp[-j2\pi(\frac{k_1 i_1}{p_1} + \frac{0 \cdot 0}{p_2})] = W^*(k_1, i_1 / p) = W_{p_1}^{-k_1 i_1},$$

$$W^*(p_1 k_1, i_1 / N) = \exp[-j2\pi(\frac{0 \cdot i_1}{p_1} + \frac{k_1 \cdot 0}{p_2})] = 1,$$

$$W^*(k_1, p_1 i_2 / N) = \exp[-j2\pi(\frac{k_1 \cdot 0}{p_1} + \frac{0 \cdot i_2}{p_2})] = 1,$$

$$W^*(p_1 k_2, p_1 i_2 / N) = \exp[-j2\pi(\frac{0 \cdot 0}{p_1} + \frac{k_2 i_2}{p_2})] = W^*(k_2, i_2 / p_2) = W_{p_2}^{-k_2 i_2}.$$

Учитывая эти соотношения, получим следующую запись общего спектра сигнала:

$$X(k_1 + p_1 k_2) = X(k_1, k_2) = \sum_{i_1=0}^{p_1-1} [\sum_{i_2=0}^{p_2-1} x(i_1, i_2) W_{p_2}^{-k_2 i_2}] W_{p_1}^{-k_1 i_1},\ k_1 = 0, 1, ..., p_1 - 1;\ k_2 = 0, 1, ..., p_2 - 1. \quad (29)$$

Полученное выражение представляет собой алгоритм БПК для случая разложения N на два множителя.

Его можно записать в более удобной для вычислений форме, если обозначить внутреннюю сумму в выражении (29) в виде двумерной величины

$$q(i_1, k_2) = \sum_{i_2=0}^{p_2-1} x(i_1, i_2) W_{p_2}^{-k_2 i_2}, \quad i_1 = 0, 1, ..., p_1 - 1;\ k_2 = 0, 1, ..., p_2 - 1. \quad (30)$$

Тогда полный спектр будет равен

$$X(k_1 + p_1 k_2) = X(k_1, k_2) = \sum_{i_1=0}^{p_1-1} q(i_1, k_2) W_{p_1}^{-k_1 i_1},\ k_1 = 0, 1, ..., p_1 - 1. \quad (31)$$

Последовательность действий в таком алгоритме такова: сначала одномерный сигнал преобразуется в двумерную таблицу $x(i_1, i_2)$ размерностью $p_1 \times p_2$, после чего с помощью p_2-точечных ДПФ по каждой из её строк вычисляется таблица промежуточных данных $\{q(i_1, k_2)\}$, из которой затем путем выполнения p_1-точечных ДПФ по всем её столбцам формируется таблица искомых спектральных коэффициентов $\{X(k_1, k_2)\}$. Переход от одномерных массивов к двумерным таблицам и обратно осуществляется по правилам взаимосвязи одномерных и многомерных индексов. Поскольку в этом алгоритме БПК отсчеты сигнала и спектра по строкам соответствующих таблиц располагаются с прореживанием, то он является *алгоритмом с прореженным порядком следования отсчетов сигнала и спектра (алгоритмом первого типа).*

Для БПК (29) число комплексных сложений $A_Б$ и умножений $M_Б$ равно:

$$A_Б = p_1 p_2 (p_1 + p_2 - 2) = N(p_1 + p_2 - 2), \quad (32)$$

$$M_Б = p_2 (p_1 - 1)^2 + p_1 (p_2 - 1)^2. \quad (33)$$

В последней оценке числа умножений учтено, что умножения на единичные значения элементов матрицы ДЭФ, расположенные в её нулевой строке и нулевом столбце, являются тривиальными. Исключение из алгоритма умножений на другие тривиальные

значения ДЭФ приводит к *оптимизированным* вариантам БПК. Для них оценка числа умножений еще более уменьшается.

Пример 8. Записать алгоритм БПК-Кронекера для $N = 6$.

Решение. Пусть $p_1 = 2$ и $p_2 = 3$. Тогда массив сигнала $x(i)$ превращается в таблицу $x(i_1, i_2) = x(i_1 + 2i_2),\ i_1 = 0,\ 1;\ i_2 = 0,\ 1,\ 2$:

$$\begin{bmatrix} x(0) & x(2) & x(4) \\ x(1) & x(3) & x(5) \end{bmatrix}.$$

Алгоритм вычисления двумерного спектра $X(k_1, k_2)$ в соответствии с общим алгоритмом (29) будет выглядеть так:

$$X(k_1, k_2) = \sum_{i_1=0}^{1} [\sum_{i_2=0}^{2} x(i_1, i_2) W_3^{-k_2 i_2}](-1)^{k_1 i_1},\ k_1 = 0,\ 1;\ k_2 = 0,\ 1,\ 2,$$

где учтено, что $W_2^{-k_1 i_1} = (-1)^{-k_1 i_1} = (-1)^{k_1 i_1}$. Промежуточные величины

$$q(i_1, k_2) = \sum_{i_2=0}^{2} x(i_1, i_2) W_3^{-k_2 i_2}$$

и алгоритм БПК:

$$X(k_1, k_2) = \sum_{i_1=0}^{1} q(i_1, k_2)(-1)^{k_1 i_1} = q(0, k_2) + q(1,\ k_2)(-1)^{k_1}$$

Дальнейшую последовательность действий можно представить в виде следующих двух этапов.

Этап 1. Расчет промежуточных величин:

$$q(0, k_2) = x(0,0) + x(0,1)W_3^{-k_2} + x(0,2)W_3^{-2k_2} = x(0) + x(2)W_3^{-k_2} + x(4)W_3^{-2k_2},$$

$$q(1, k_2) = x(1,0) + x(1,1)W_3^{-k_2} + x(1,2)W_3^{-2k_2} = x(1) + x(3)W_3^{-k_2} + x(4)W_3^{-2k_2}.$$

Принимая $k_2 = 0,\ 1\ ,2,$ получим

$$q(0,0) = x(0) + x(2) + x(4), \qquad q(0,1) = x(0) + x(2)W_3^{-1} + x(4)W_3^{-2},$$

$$q(0,2) = x(0) + x(2)W_3^{-2} + x(4)W_3^{-1}, \qquad q(1,0) = x(1) + x(3) + x(5),$$

$$q(1,1) = x(1) + x(3)W_3^{-1} + x(5)W_3^{-2}, \qquad q(1,2) = x(1) + x(3)W_3^{-2} + x(5)W_3^{-1}.$$

Таблица этих промежуточных величин будет иметь следующий вид:

$$\begin{bmatrix} q(0,0) & q(0,1) & q(0,2) \\ q(1,0) & q(1,1) & q(1,2) \end{bmatrix}.$$

Этап 2. Расчет искомого спектра:

$$X(0, k_2) = q(0, k_2) + q(1, k_2),$$

$$X(1, k_2) = q(0, k_2) - q(1, k_2),$$

поэтому при $k_2 = 0,1,2$

$$X(0,0) = q(0,0) + q(1,0), \qquad X(1,0) = q(0,0) - q(1,0),$$

$$X(0,1)=q(0,1)+q(1,1), \qquad X(1,1)=q(0,1)-q(1,1),$$

$$X(0,2)=q(0,2)+q(1,2), \qquad X(1,2)=q(0,2)-q(1,2).$$

Этим значениям соответствуют итоговые таблицы

$$\begin{bmatrix} X(0,0) & X(0,1) & X(0,2) \\ X(1,0) & X(1,1) & X(1,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(0) & X(2) & X(4) \\ X(1) & X(3) & X(5) \end{bmatrix}.$$

В алгоритме выполняются 18 сложений и 8 умножений. Расчет по формулам (32), (33) дает 18 сложений и 11 умножений. Меньшее число реальных умножений связано с тем, что используемое в данном примере 2-точечное ДПФ выполняется без умножений. Сигнальный граф этого алгоритма приведен на рис. 1а.

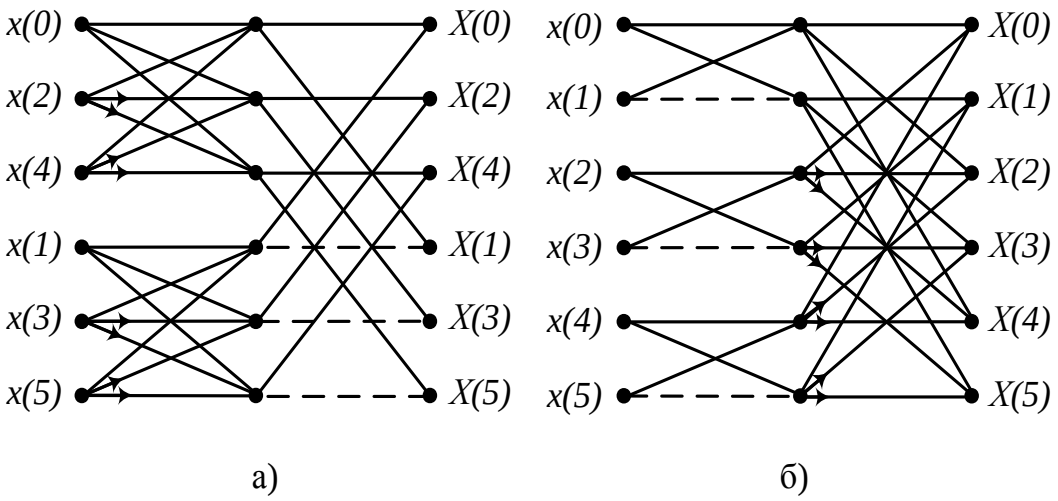

Рис. 1. Сигнальный граф полного БПК-Кронекера первого (а) и второго (б) типа для N=9

Если в свою очередь один из сомножителей p_1 или p_2 также раскладывается на два множителя, то приведенный алгоритм рекурсивно можно применить и для быстрого вычисления p_1-точечных или p_2-точечных ДПФ. Это повлечет за собой дополнительное прореживание сигнала и спектра и, в конечном итоге, к дополнительному сокращению объема вычислений. В общем случае при

$$N=\prod_{m=1}^{n} p_m ,$$

одномерные массивы $x(i)$ и $X(k)$ с помощью подстановок

$$\left.\begin{aligned} i &= i_1 + p_1 i_2 + \cdots + p_1 p_2 \cdots p_{n-1} i_n = i_1 (+)_{\{p\}} p_1 i_2 (+)_{\{p\}} \cdots (+)_{\{p\}} p_1 p_1 \cdots p_{n-1} i_n, \\ k &= k_1 + p_1 k_2 + \cdots + p_1 p_2 \cdots p_{n-1} k_n = k_1 (+)_{\{p\}} p_1 k_2 (+)_{\{p\}} \cdots (+)_{\{p\}} p_1 p_1 \cdots p_{n-1} k_n, \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

где $i_m,\ k_m = 0, 1, ..., p_m - 1$, преобразуются в многомерные таблицы $x(i_1, i_2, ..., i_n)$ и $X(k_1, k_2, ..., k_n)$, связь между которыми устанавливает следующее аналитическое выражение:

$$X(k_1, k_2, ..., k_n) = \sum_{i_1=0}^{p_1-1} W_{p_1}^{-i_1 k_1} \sum_{i_2=0}^{p_2-1} W_{p_2}^{-i_2 k_2} \cdots \sum_{i_n=0}^{p_n-1} x(i_1, i_2 ..., i_n) W_{p_n}^{-i_n k_n},\ k_m = 0,1,..., p_m - 1; m = 1, 2, ..., n. \quad (35)$$

Это и есть полный алгоритм БПК-Кронекера с прореженным порядком следования отсчетов сигнала и спектра, содержащий $(n-1)$ уровней прореживания.

Реализация полного алгоритма БПК потребует выполнения

$$A_Б = N(\sum_{m=1}^{n} p_m - n), \quad M_Б = N\sum_{m=1}^{n} (p_m - 1)^2 / p_m \quad (36)$$

сложений и умножений. Некоторые из этих умножений могут оказаться тривиальными. Их исключение из алгоритма позволяет еще больше оптимизировать его.

В алгоритмах БПК-Кронекера (29) и (35) можно поменять последовательность суммирования и порядок следования индексов, в результате чего будут получены другие модификации БПК, обладающие такими же реализационными характеристиками. В частности, если порядок следования индексов и сумм изменить на обратный, что приведет к обработке транспонированных таблиц сигнала и спектра, то можно получить второй тип алгоритма БПК-Кронекера *с естественным порядком следования отсчетов сигнала и спектра*. Для $N = p_1 p_2$ такой алгоритм имеет следующий вид:

$$X(k_2, k_1) = \sum_{i_2=0}^{p_2-1} [\sum_{i_1=0}^{p_1-1} x(i_2, i_1) W_{p_1}^{-i_1 k_1}] W_{p_2}^{-i_2 k_2},\ k_2 = 0, 1, ..., p_2 - 1;\ \ k_1 = 0,1, ..., p_1 - 1, \quad (37)$$

а для $N = p_1 p_2 ... p_n$ он представляется следующим образом:

$$X(k_n, k_{n-1} ..., k_1) = \sum_{i_n=0}^{p_n-1} W_{p_n}^{-i_n k_n} \sum_{i_{n-1}=0}^{p_{n-1}-1} W_{p_{n-1}}^{-i_{n-1} k_{n-1}} \cdots \sum_{i_1=0}^{p_1-1} x(i_n, i_{n-1}, \cdots, i_1) W_{p_1}^{-i_1 k_1},$$

$$k_{n-m+1} = 0, 1, ..., p_{n-m+1} - 1;\ \ m = 1, 2, ..., n. \quad (38)$$

<u>Пример 9</u>. Записать алгоритм БПК-Кронекера второго типа для N=6.

<u>Решение</u>.Примем $p_1 = 2,\ \ p_2 = 3$.Таблица сигнала $x(i_2, i_1) = x(2i_2 + i_1),\ i_2 = 0, 1, 2;$ $i_1 = 0, 1$ имеет следующий вид

$$\begin{bmatrix} x(0) & x(1) \\ x(2) & x(3) \\ x(4) & x(5) \end{bmatrix},$$

а алгоритм БПК выглядит так:

$$X(2k_2 + k_1) = X(k_2, k_1) = \sum_{i_2=0}^{2} [\sum_{i_1=0}^{1} x(i_2, i_1)(-1)^{i_1 k_1}] W_3^{-i_2 k_2} = \sum_{i_2=0}^{2} q(i_2, k_1) W_3^{-i_2 k_2}\ \ , k_2 = 0, 1, 2;\ k_1 = 0, 1,$$

где

$$q(i_2,k_1)=x(i_2,0)+x(i_2,1)(-1)^{-k_1}.$$

<u>Этап 1. Расчет промежуточных величин</u> $q(i_2,k_1)$:

$$q(0,0)=x(0,0)+x(0,1)=x(0)+x(1);$$

$$q(1,0)=x(1,0)+x(1,1)=x(2)+x(3);$$

$$q(2,0)=x(2,0)+x(2,1)=x(4)+x(5);$$

$$q(0,1)=x(0,0)-x(0,1)=x(0)-x(1);$$

$$q(1,1)=x(1,0)-x(1,1)=x(2)-x(3);$$

$$q(2,1)=x(2,0)-x(2,1)=x(4)-x(5).$$

Они образуют таблицу

$$\begin{bmatrix} q(0,0) & q(0,1) \\ q(1,0) & q(1,1) \\ q(2,0) & q(2,1) \end{bmatrix}.$$

<u>Этап 2 . Расчет спектра</u> $X(k)$:

$$X(0,0)=q(0,0)+q(1,0)+q(2,0), \qquad X(0,1)=q(0,1)+q(1,1)+q(2,1),$$

$$X(1,0)=q(0,0)+q(1,0)W_3^{-1}+q(2,0)W_3^{-2}, \qquad X(1,1)=q(0,1)+q(1,1)W_3^{-1}+q(2,1)W_3^{-2},$$

$$X(2,0)=q(0,0)+q(1,0)W_3^{-2}+q(2,0)W_3^{-1}, \qquad X(2,1)=q(0,1)+q(1,1)W_3^{-2}+q(2,1)W_3^{-1}.$$

Результирующие таблицы имеют вид:

$$\begin{bmatrix} X(0,0) & X(0,1) \\ X(1,0) & X(1,1) \\ X(2,0) & X(2,1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X(0) & X(1) \\ X(2) & X(3) \\ X(4) & X(5) \end{bmatrix}.$$

Сигнальный граф этого алгоритма приведен на рис. 1б. По сложности он совпадает с алгоритмом первого типа.

_____ . _____

В выражении для N порядок сомножителей можно изменить. Это приводит к БПК для других систем ОФК, отличных от систем Кронекера.

Таким образом, полученные результаты, включая методы формирования различных базисных систем на основе обобщенных функций Крестенсона в системах счисления с переменными основаниями, их свойства и быстрые алгоритмы вычисления спектра, составляют теоретическую основу для решения проблемы выбора оптимального базиса для широкого круга задач обработки сигналов (фильтрации, распознавания, сжатия, кодирования и т.п.) в условиях действия жестких ограничений на вычислительную сложность алгоритмов обработки. Особенно перспективным может оказаться применение этих базисов для исследования $\{p\}$-линейных систем и $\{p\}$-стационарных случайных

процессов, использующих обобщенный временной сдвиг в виде поразрядного модулярного сложения с различными модулями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
2. Трахтман А.М., Трахтман В.А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. – М.: Сов. радио, 1975.- 208 с.
3. Власенко В.А., Лаппа Ю.М., Ярославский Л.П. Методы синтеза быстрых алгоритмов свертки и спектрального анализа сигналов. - М.: Наука, 1990. – 180 с.

electronic scientific and technical periodical
SCIENCE and EDUCATION
EL № FS 77 - 30569. №0421100025. ISSN 1994-0408

Methods of presentation and basis signal transformation in generalized Christenson functions

77-30569/372760

03, March 2012

Syuzev V.V., Savel'ev A.Ya., Gudzenko D.Yu.

Bauman Moscow State Technical University
v.suzev@bmstu.ru

The authors consider methods of synthesis and basic properties of various discrete basis systems of generalized Christenson functions in polybasic number systems, as well as the original scalar method of constructing fast algorithms for analyzing the spectrum in these bases. Theoretical results are illustrated with concrete examples.

Publications with keywords: signal, spectrum, multi-number system, the fast Fourier transform
Publications with words: signal, spectrum, multi-number system, the fast Fourier transform

References

1. Zalmanzon L.A. *Preobrazovaniia Fur'e, Uolsha, Khaara i ikh primenenie v upravlenii, sviazi i drugikh oblastiakh* [Fourier, Walsh, Haar's transforms and their application in management, communications and other areas]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 496 p.

2. Trakhtman A.M., Trakhtman V.A. *Osnovy teorii diskretnykh signalov na konechnykh intervalakh* [Fundamentals of the theory of discrete signals on finite intervals]. Moscow, Sov. radio Publ., 1975. 208 p.

3. Vlasenko V.A., Lappa Iu.M., Iaroslavskii L.P. *Metody sinteza bystrykh algoritmov svertki i spektral'nogo analiza signalov* [Methods of synthesis of fast algorithms for convolution and spectral analysis of signals]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 180 p.