

Влияние начальных условий и длительности моделирования на характеристики условно-нестационарных процессов.**77-30569/359132**

04, апрель 2012

Строганов Д.В., Солнцев А.А., Якунин П.С., Батов Р.В., Карасев А.А.

УДК 519.24

МГТУ им. Н.Э. Баумана
Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет
(МАДИ)

dstr.bmstu@mail.ru
kafedra@asu.madi.ru
solntsev@mail.ru

ВВЕДЕНИЕ

Для анализа влияния начальных условий на выходной имитационный процесс [2] и разработки стратегии моделирования необходима аналитически разрешимая модель. В качестве основы такой модели в статье предлагается использовать гауссовские процессы. Пусть $\xi(t)$ - гауссовский стационарный процесс (процесс называется гауссовским, если все его конечномерные распределения гауссовские). Если зафиксировать начальные значения процесса, то получим условно нестационарный процесс. Автоковариационную функцию будем аппроксимировать зависимостью

$$r(t) = \sigma^2 (\alpha_1 e^{-c_1 t} + \alpha_2 e^{-c_2 t}), \quad (1)$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ параметры автоковариации, а α_1 и α_2 - некоторые функции параметров c_1 и c_2 . Для параметров автоковариации будем использовать обозначение $Cv = (c_1, c_2)$. При этом процесс будет сильнокоррелированным, если $\min(c_1, c_2)$ - мал (< 0.2) и слабокоррелированным, если $\min(c_1, c_2)$ - велик (> 0.5).

ХАРАКТЕРИСТИКИ УСЛОВНО НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

Пусть вектор-столбец $S = (S_0, S_{-1}, \dots, S_{-m})^T$ определяет значения основного процесса $\xi(t)$ в моменты $S_t = \langle t_0, t_{-1}, \dots, t_{-m} \rangle$, ($t_0 > t_{-1} > \dots > t_{-m}$). Обозначим фрагмент случайного процесса, определенный в моменты S_t через θ . Этот

вектор является числовой выборкой из пространства состояний, и при анализе основного процесса представляет выборку из $(m+1)$ -мерной случайной величины, определяющей глубину предыстории. Будем считать, что процесс начинается с момента времени t_1 .

На основании теоремы о нормальной корреляции [1] получим выражение для математического ожидания условно нестационарного процесса с заданной предысторией

$$M\{\xi | S\}(t) = M\xi + D_{\xi\theta}(t) \cdot D_{\theta\theta}^{-1} \cdot (S - MS) = y + D_{\xi\theta}(t) D_{\theta\theta}^{-1} \cdot (S - yE), \quad (2)$$

где y - математическое ожидание стационарного процесса;

E - вектор-столбец единиц размерностью $(m+1)$.

Ковариационная функция процесса определяется следующим выражением

$$R(t, u) = r(|t - u|) - D_{\xi\theta}(t) \cdot D_{\theta\theta}^{-1} \cdot D_{\xi\theta}^T(u), \quad (t \geq t_1, u \geq t_1), \quad (3)$$

где $D_{\xi\theta}(t) = (r(t-t_0), r(t-t_1), \dots, r(t-t_m))$, вектор- строка ковариаций;

$D_{\theta\theta} = \|\text{cov}(\xi(t_i), \xi(t_j))\| = \|r(t_i - t_j)\|$, $i, j = 0, -1, \dots, -m$, матрица ковариаций предыстории процесса в моменты t_i, t_j ;

$r(t)$ - автокорреляционная функция стационарного процесса.

На рис. 1 и 2 приведены графики дисперсии и математического ожидания для введенной автокорреляционной функции $r(t)$ в зависимости от начальных условий моделирования S_t и коррелированности стационарного процесса Cv .

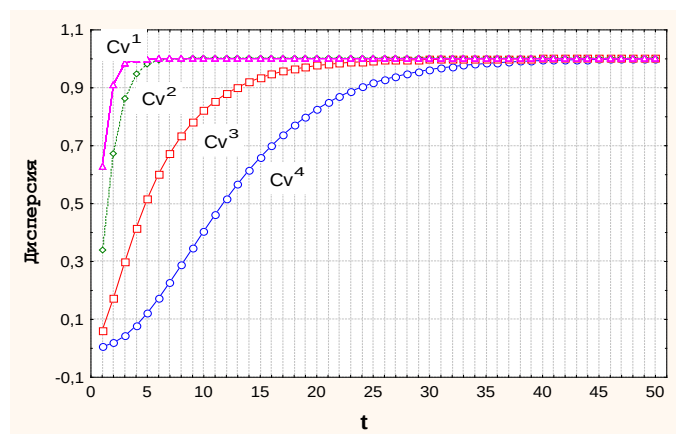
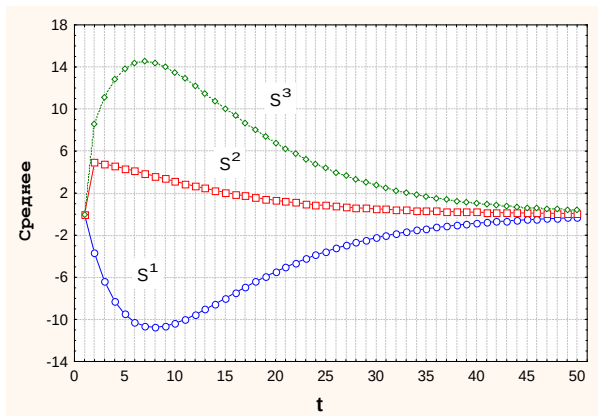


Рис. 1. Дисперсия условно нестационарного процесса

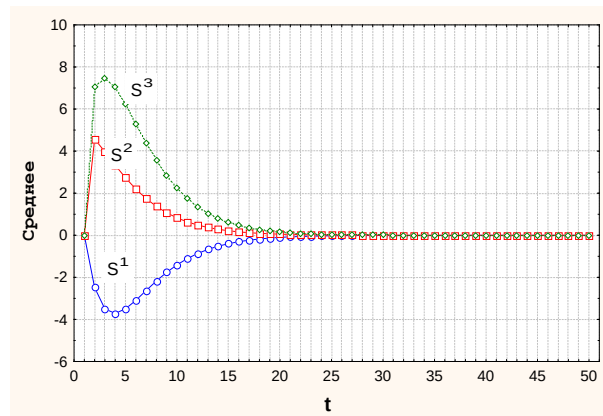
Здесь: $Cv^1=(1, 2)$, $Cv^2=(0.3, 1)$, $Cv^3=(0.2, 0.3)$, $Cv^4=(0.1, 0.2)$; $\sigma=1$.

Дисперсия условно нестационарного процесса не зависит от начального состояния и определяется только коррелированностью. Из графиков видно, что для коррелированных процессов дисперсия существенно медленнее сходится к стационарному значению.

На рис. 2 приведены тренды математического ожидания условно нестационарных процессов.



а) Cv1



б) Cv2

Рис. 2. Тренды МО условно нестационарных процессов

Здесь: $Cv^1=(0.2, 0.1)$, $Cv^2=(0.4, 0.3)$; начальные условия $St=(0, -1)$, $S^1=(5,0)$, $S^2=(5,5)$, $S^3=(0,5)$.

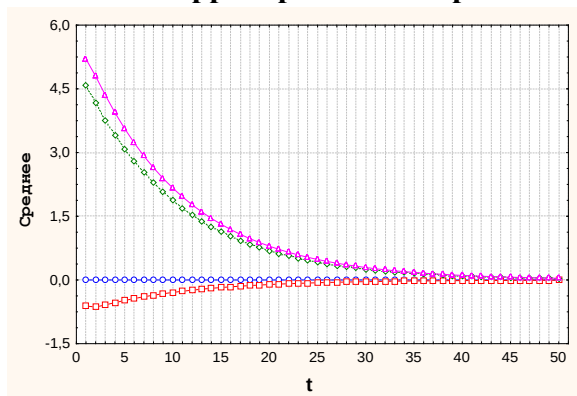
Как видно из графиков, начальное состояние существенно сказывается на поведении тренда. Чем дальше начальное состояние от стационарного, тем более длительно восстановление.

В результате вид трендов МО определяют следующие факторы:

- коррелированность;
- задержка автоковариации;
- близость начальных условий.

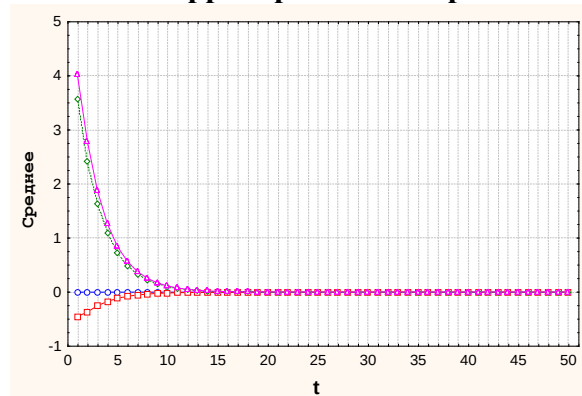
Их влияние схематично отражено на графиках рис. 3.

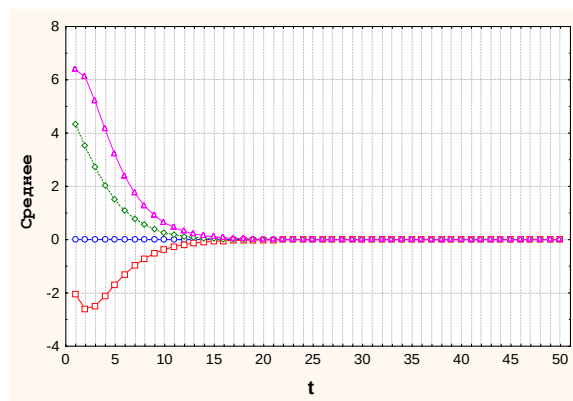
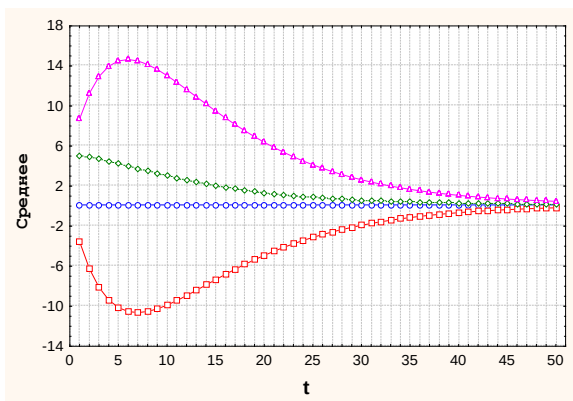
Сильнокоррелированный процесс



а) близкие начальные условия

Слабокоррелированный процесс





б) далекие начальные условия

Рис. 3. Тренды условно нестационарных гауссовских процессов

На рисунке верхние графики соответствуют трендам без задержки, а нижние с задержкой. В таблице 1 приведена классификация видов трендов в зависимости от исследуемых факторов.

Таблица № 1

Классификация трендов

Ковариация	Коррелированность	Начальное состояние	Процесс
Без задержки	слабая	близкое	безинерционный
Без задержки	слабая	далекое	монотонный
с задержкой	слабая	близкое	монотонный
с задержкой	слабая	далекое	монотонный с запаздыванием
без задержки	сильная	близкое	монотонный с запаздыванием
без задержки	сильная	далекое	монотонный с запаздыванием
с задержкой	сильная	близкое	монотонный
с задержкой	сильная	далекое	немонотонный

ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕДНЕИНТЕГРАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ

Среднеинтегральная оценка математического ожидания основного процесса [3] является стохастическим интегралом

$$\zeta(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt \quad (4)$$

и имеет математическое ожидание

$$M\zeta(T) = M \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T M\xi(t) dt. \quad (5)$$

Введенные выше обозначения позволяют представить математическое ожидание среднеинтегральной оценки условно нестационарного процесса в виде

$$M\zeta(T) = y + \left(\frac{1}{T} \int_0^T D_{\xi\theta}(t) \cdot dt \right) \cdot D_{\theta\theta}^{-1} \cdot (S - y \cdot E). \quad (6)$$

Дисперсия оценки вычисляется путем интегрирования ковариационной функции основного процесса по всей области определения

$$D\zeta(T) = \frac{1}{T^2} \cdot \int_0^T \int_0^T R(t, u) \cdot dt du. \quad (7)$$

Подставляя в этот интеграл выражение для ковариации и используя правила интегрирования векторных функций получим

$$D\zeta(T) = \frac{1}{T^2} \cdot \int_0^T \int_0^T (r(|t-u|) - D_{\xi\theta}(t) \cdot D_{\theta\theta}^{-1} \cdot D_{\xi\theta}^T(u)) \cdot dt du. \quad (8)$$

Введем следующие обозначения для составляющих интеграла: стационарная составляющая:

$$D\zeta_s(T) = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T r(|t-u|) dt du. \quad (9)$$

нестационарная составляющая:

$$D\zeta_N(T) = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T D_{\xi\theta}(t) \cdot D_{\theta\theta}^{-1} \cdot D_{\xi\theta}^T(u) dt du. \quad (10)$$

При этих обозначениях общая дисперсия будет равна

$$D\xi(T) = D\zeta_s(T) + D\zeta_N(T). \quad (11)$$

Двойной интеграл в последнем выражении допускает разделение переменных, поэтому после соответствующих преобразований и перехода к векторной форме, получим

$$\begin{aligned} D\zeta_N(T) &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \sum_{i,j=1}^m [D_{\xi\theta}(t)]_i \cdot [D_{\theta\theta}^{-1}]_{i,j} \cdot [D_{\xi\theta}^T(u)]_j dt du = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T D_{\xi\theta}(u) du \cdot D_{\theta\theta}^{-1} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T D_{\xi\theta}^T(u) du \end{aligned} \quad (12)$$

Используя обозначение $W(T) = \frac{1}{T} \int_0^T D_{\xi\theta}(t) \cdot dt$, выражение для нестационарной составляющей может быть представлено как

$$D\zeta_N = W(T) \cdot D_{\theta\theta}^{-1} \cdot W^T(T). \quad (13)$$

В результате выражения для математического ожидания и дисперсии среднеинтегральной оценки можно представить в виде

$$\begin{aligned} M\zeta(T) &= y + W(T) \cdot D_{\theta\theta}^{-1} \cdot (S - y \cdot E), \\ D\zeta(T) &= D\zeta_S(T) - D\zeta_N(T). \end{aligned} \quad (14)$$

Проведем анализ полученных соотношений для автокорреляционной функции.

Компонента функционала W примет вид

$$\begin{aligned} W_i(T) &= \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2 (\alpha_1 e^{c_1 u_i} e^{-c_1 t} + \alpha_2 e^{c_2 u_i} e^{-c_2 t}) dt = \\ &= \frac{\sigma^2}{T} \left[-\frac{\alpha_1}{c_1} e^{c_1 u_i} e^{-c_1 t} - \frac{\alpha_2}{c_2} e^{c_2 u_i} e^{-c_2 t} \right]_0^T = \\ &= \frac{\sigma^2}{T} \left[\frac{\alpha_1}{c_1} e^{c_1 u_i} (1 - e^{-c_1 T}) + \frac{\alpha_2}{c_2} e^{c_2 u_i} (1 - e^{-c_2 T}) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Используя обозначения

$$r_1(t) = \sigma^2 \left(\frac{\alpha_1}{c_1} e^{-c_1 t} - \frac{\alpha_2}{c_2} e^{-c_2 t} \right), \quad r_2(t) = \sigma^2 \left(\frac{\alpha_1}{c_1^2} e^{-c_1 t} - \frac{\alpha_2}{c_2^2} e^{-c_2 t} \right), \quad (16)$$

получим

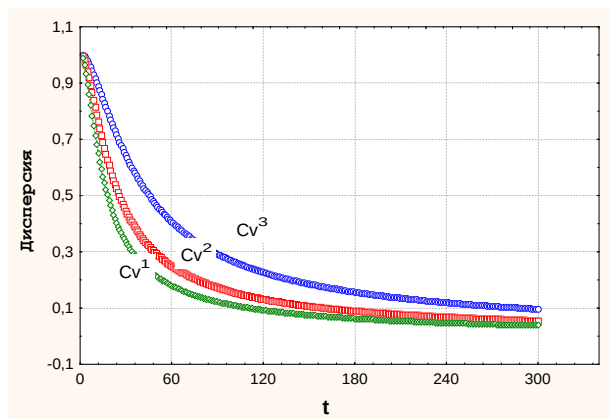
$$W_i(T) = \frac{1}{T} [r_1(-u_i) - r_1(T - u_i)]. \quad (17)$$

Исследуемыми зависимостями являются математическое ожидание и дисперсия среднеинтегральной оценки как функции от начальных условий и коррелированности процесса:

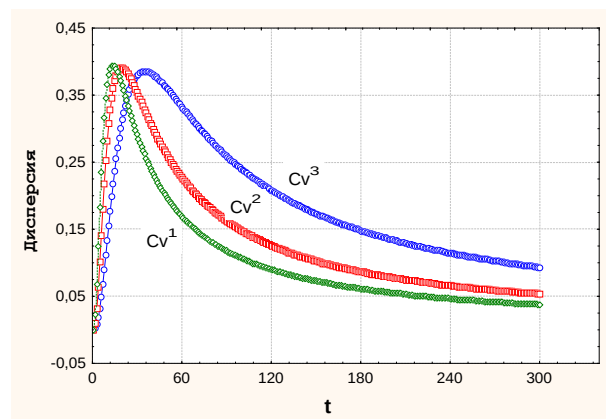
$$\begin{aligned} M\xi(T) &= M_\xi(T | S_t, S, C_v), \\ D\xi(T) &= D_\xi(T | S_t, C_v). \end{aligned} \quad (18)$$

На рис. 4 приведены графики дисперсии среднеинтегральной оценки стационарного (DY_S) и условно нестационарного процесса DY для параметров автокорреляционной функции, равных: $Cv^1 = (0.2, 0.1)$, $Cv^2 = (0.3, 0.2)$, $Cv^3 = (0.4, 0.3)$. Дисперсия среднеинтегральной оценки процесса определяется только коррелированностью и не зависит от начальных условий моделирования.

Таким образом, для дисперсии условно нестационарного процесса характерно немонотонное поведение. На начальном этапе дисперсия мала, что объясняется небольшими изменениями значений процесса на коротком периоде времени. Затем дисперсия растет, но наступает момент времени, когда эргодические свойства процесса начинают преобладать и дисперсия стремится к нулю.



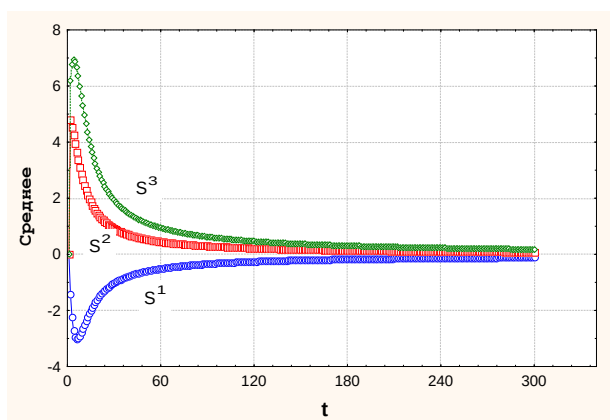
а) DY_S



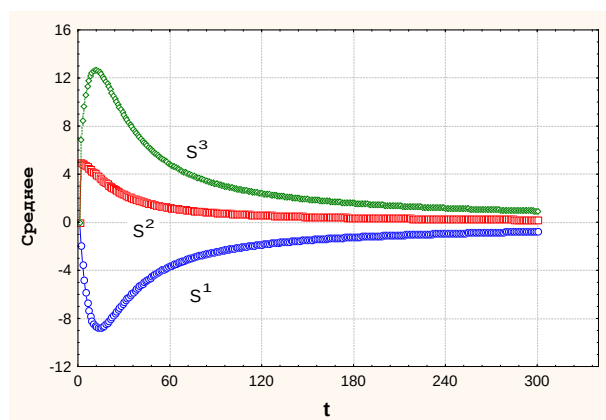
б) DY

Рис. 4. Дисперсия среднеинтегральной оценки

Тренды среднего значения, кроме коррелированности, зависят также от начальных условий процесса. На рис. 5 приведены графики математических ожиданий среднеинтегральной оценки условно нестационарных процессов. При построении трендов варьировались как параметры коррелированности, так и начальные условия S^j . В качестве начальных условий были выбраны $S^1=(0, -1)$; $S^2=(5,0)$, $S^3=(5,5)$, $S^3=(0,5)$.



а) $Cv=(0.3, 0.4)$



б) $Cv=(0.1, 0.2)$

Рис. 5. Математическое ожидание среднеинтегральной оценки

Из сравнения графиков среднеинтегральной оценки и основного процесса можно заключить, что тренды среднеинтегральной оценки существенно более затянуты. Так, если для основного процесса характеристики были близки с стационару уже при $t=20$, то для среднеинтегральной оценки период восстановления математического ожидания достигал значения 200.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для целей аналитического исследования сходимости процессов имитационного моделирования предложен условно нестационарный гауссовский процесс, который рассматривается как стационарный гауссовский процесс с заданной предысторией в моменты времени, меньшие нуля, и введенной выше автокорреляционной функцией.

Получены выражения для дисперсии и тренда условно нестационарного процесса в зависимости от параметров автокорреляционной функции, начальных условий. Показано, что возможно описание в этом классе различного вида монотонных трендов, а, при сильной автокорреляции и далеких начальных условиях, возможно описание и немонотонного тренда. Показано, что характер дисперсии соответствует экспериментальным данным и не зависит от начальных значений.

Получены аналитические выражения тренда и дисперсии среднеинтегральной оценки. Проведено исследование зависимости среднеинтегральной оценки от различных факторов. Показано, что тренд среднеинтегральной оценки имеет затянутый характер, содержит существенную систематическую погрешность на начальном этапе, зависит от коррелированности процесса, начальных значений, длительности моделирования. Показано, что дисперсия среднеинтегральной оценки имеет унимодальный характер с максимумом на начальном этапе моделирования и не зависит от начальных значений процесса.

Библиографический список

1. Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 448 с.
2. Кельтон В., Лоу А. Имитационное моделирование. – СПб.: Питер, 2004. – 847 с.
3. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.

Influence of initial conditions and time of simulation on characteristics of conditional non-stationary processes

77-30569/359132

04, April 2012

Stroganov D.V., Solncev A.A., Якунин П. С., Batov R.V., Karasev A.A.

Bauman Moscow State Technical University
State Technical University – MADI

dstr.bmstu@mail.ru

kafedra@asu.madi.ru

solntsev@mail.ru

In the article a provisionally non-stationary Gaussian process was proposed for analytical research of simulation processes convergence. This Gaussian process was considered as a stationary Gaussian process with a specified pre-history. The authors studied dependence of medium-integral estimation on different factors. It was shown that the trend of the medium-integral estimation had a lasting character, contains a significant systematic error at the initial stage and depends on the process correlation, initial values and time of simulation.

Publications with keywords: [statistical estimation](#), [simulation](#), [Gaussian processes](#), [non-stationary processes](#)

Publications with words: [statistical estimation](#), [simulation](#), [Gaussian processes](#), [non-stationary processes](#)

References

1. Volkov I.K., Zuev S.M., Tsvetkova G.M. *Sluchainye protsessy* [Random processes]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2001. 448 p.
2. Law A.M., Kelton W.D. *Simulation Modelling and Analysis*, McGraw-Hill, 2000 (Russ. ed.: Kel'ton V., Lou A. *Imitatsionnoe modelirovanie*. SPb., Piter, 2004. 847 p.).
3. Kobzar' A.I. *Prikladnaia matematicheskaia statistika* [Applied mathematical statistics]. Moscow, FIZMATLIT, 2006. 816 p.