

Методы решения задачи идентификации моделей движения центра масс ракет космического назначения

77-30569/345425

03, март 2012

Пролетарский А. В.

УДК 681.5

МГТУ им. Н.Э. Баумана

pav@bmstu.ru

Одной из задач, решаемых интеллектуализированной системой управления [1-3], является идентификация модели движения центра масс. Для сокращения объема необходимой памяти бортовой вычислительной машины и сокращения затрат машинного времени необходима унификация методов решения различных задач.

Под идентификацией модели движения центра масс ракет космического назначения (РКН) понимается оценка ее параметров по информации о характере полета РКН и некоторых ее характеристиках, получаемых с помощью бортовых измерительных средств.

Представим систему уравнений движения центра масс РКН в следующем виде:

$$\dot{x} = f(t, x, p), \quad (1)$$

где x - вектор фазовых координат,

t - время,

$$x = (V, r)^T; \quad p = (c, d)^T, \quad (2)$$

V - вектор скорости,

r - радиус-вектор,

c - вектор параметров, характеризующих РКН и условия ее полета;

$$f = Y + \eta(t, x, d); \quad Y = (y, 0)^T; \quad \eta = (\text{grad} U, V)^T, \quad (3)$$

d - вектор параметров потенциала поля земного тяготения U ;

y - вектор кажущихся ускорений центра масс РКН,

$$y = \phi(t, x, c). \quad (4)$$

Модель движения центра масс РКН будет полностью определена, если задан составной вектор β ее параметров c, d и начальных x_0 , либо конечных x_k значений фазовых координат. Задача определения вектора β параметров модели движения центра масс РКН относится к разряду задач параметрической идентификации систем.

Задача идентификации модели движения РКН сводится к задаче оценки вектора параметров p модели и вектора x фазового состояния РКН в начальный или конечный момент времени по результатам измерений z - выхода системы (1)-(4), искаженного шумами и различного рода возмущающими факторами, действующими на исходную систему. Оценка p и x_0 (либо x_k) заключается в отыскании таких значений этих параметров, при которых выход U модели (1)-(4) наилучшим в некотором смысле образом приближался бы к выходу Z реальной системы.

В качестве выхода U рассматриваемой системы (1)-(4) может использоваться либо вектор y кажущихся ускорений, либо вектор x фазовых координат, либо оба этих вектора. В случае $U = y$ идентификация системы (1)-(4) осуществляется по измерениям вектора кажущихся ускорений, в случае $U = x$ - по результатам решения навигационной задачи. При этом задача навигации может рассматриваться как частный случай идентификации системы (1) при $U = y$ и заданном значении параметров системы.

Для оценки массово-энергетических характеристик РКН наряду с информацией о векторе кажущихся ускорений, получаемой с соответствующих измерителей (в частности, с акселерометров), может также использоваться информация о количестве топлива, получаемая с датчиков системы управления расходом топлива, и информация о давлении в камерах сгорания. В этом случае уравнение (1) дополнится соответствующими уравнениями связи

$$g = g(t, c), \quad p_{kc} = p_{kc}(t, c), \quad (5)$$

где g - измеренное количество топлива в баках;

p_{kc} - измеренное значение давления в камере сгорания.

С помощью датчиков системы управления расходом топлива могут измеряться либо расходы топлива из баков, либо объемы компонентов топлива в баках. Информация о давлении в камере сгорания может быть связана с расходом топлива с помощью дроссельной характеристики двигательной установки.

Пусть критерий ошибки приближения выхода модели к выходу реальной системы характеризуется функционалом

$$I = \int_{t_0}^t H(v, z) dt, \quad (6)$$

где H - скалярная положительно определенная мера ошибки.

Задача идентификации модели движения центра масс РКН заключается в определении таких векторов c, d и x_0 , либо x_k , которые минимизируют функционал (6) при условиях (1)–(4), т.е. в решении системы дифференциальных и функциональных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, p), \quad (7)$$

$$J = \min_{p, x_0} I(p, x_0). \quad (8)$$

Если в уравнении (7) не учитываются аэродинамические члены, то уравнение (4) принимает вид

$$y = \phi(t, c), \quad (9)$$

в этом случае при $v = y$ для определения вектора c достаточно рассматривать уравнение (9), т.е. вектор c будет определяться уравнениями:

$$y = \phi(t, c); \quad J = \min_c I(c). \quad (10)$$

Если вектор c характеристик РКН известен или определен в результате решения задачи (7), (8), то при $v = x$ для определения вектора d параметров потенциала поля тяготения и вектора x_0 фазового положения РКН может быть использована система уравнений

$$\dot{x} = Y + \eta(t, x, d); \quad J = \min_{d, x_0} I(d, x_0), \quad (11)$$

где вектор Y считается известным либо на основании измерений, либо на основании вычислений по формуле (4). В случае заданного значения вектора параметров d приходим к задаче оценки x_0 фазового состояния РКН в момент времени t_0 :

$$\dot{x} = Y + \eta(t, x); \quad J = \min_{x_0} I(x_0). \quad (12)$$

Если вектор Y считается известным в результате измерений, то при $v = y$ задача определения вектора фазового положения центра масс РКН сводится к задаче интегрирования уравнения

$$\dot{x} = Y + \eta(t, x), \quad (13)$$

которая представляет собой задачу навигации РКН. Интегрирование уравнения (13) на упрежденном отрезке времени при известном законе изменения вектора Y представляет собой задачу прогнозирования фазового положения центра масс РКН.

Таким образом, могут быть сформулированы следующие типы задач по определению параметров моделей движения центра масс РКН:

1. Идентификация динамической системы

$$\dot{x} = Y + \eta(t, x, d), \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}; \quad y = \phi(t, x, c) \quad (14)$$

по информации о векторе x , либо о векторе y или о векторах x и y . При этом информация о векторе x может быть получена в результате решения задачи навигации, а о векторе y - в результате измерения вектора кажущегося ускорения. В случае использования лишь информации о векторе x уравнение (14) эквивалентно системе уравнений

$$\dot{V} = \phi(t, V, r, c) + g(t, r, d); \quad \dot{r} = V. \quad (15)$$

Если используется информация о векторах x и y , то можно ввести в рассмотрение расширенный вектор ξ и соответствующее векторное уравнение

$$\dot{\xi} = F(t, \xi, c, d), \quad (16)$$

где

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} Y + \eta(t, x, d) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} [Y + \eta(t, x, d)] \end{pmatrix}. \quad (17)$$

В этом случае задача формально сведена к типу задачи идентификации системы (15) по информации о векторе x .

2. Идентификация динамической системы

$$\dot{x} = Y + \eta(x); \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}; \quad y = \phi(t, x, c) \quad (18)$$

по информации о векторе x , либо о векторе y , или о векторах x и y .

При использовании информации лишь о векторе x уравнение (18) эквивалентно системе уравнений

$$\dot{V} = \phi(t, V, r, c) + g(r); \quad \dot{r} = V. \quad (19)$$

По аналогии с предыдущим случаем задача идентификации модели (18) по информации о векторах x и y может быть сведена к типу задачи идентификации системы (19) по информации о векторе x .

3. Идентификация статической модели

$$y = \phi(t, c) \quad (20)$$

по информации о векторе y .

Идентификация динамической системы

$$\dot{x} = Y + \eta(t, x, d); \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

по информации о векторе x , где y - заданная вектор-функция.

При этом вектор y определяется либо в результате измерений кажущихся ускорений, либо с помощью функции (20) при известном векторе параметров c .

5. Определение значения вектора x в результате интегрирования уравнения

$$\dot{x} = Y + \eta(x); \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где y - заданная вектор-функция, определяемая либо в результате измерения вектора кажущихся ускорений (при решении задачи навигации РКН), либо с помощью заданных аналитических зависимостей (при решении задачи прогноза фазового состояния РКН).

В условиях высокой точности измерения параметров движения РКН и влияния стабильных по характеру изменения возмущений и погрешностей измерения от алгоритма идентификации требуется лишь выполнение роли алгоритма аппроксимации реального движения центра масс РКН некоторой его моделью и не требуется одновременного выполнения роли фильтра. В связи с этим ограничимся рассмотрением лишь детерминированных моделей движения центра масс РКН.

Основными составляющими правых частей уравнений движения центра масс на участке выведения КА являются тяга двигателей и гравитационное ускорение. При этом потери скорости на преодоление сопротивления воздуха и за счет донного сопротивления двигателей составляют порядка 10-15 % от скорости на выходе из плотных слоев атмосферы (примерно на высоте 100 км). В связи с этим аппроксимирующая модель реального движения РКН может не учитывать влияние атмосферы на движение его центра масс и для идентификации параметров модели достаточно использовать системы (20) и (21).

При идентификации моделей движения РКН может быть использована достаточно обширная априорная информация, полученная на этапах создания и отработки РКН. В частности, известно, что пределы разброса массово-энергетических и аэродинамических характеристик РКН не превосходят соответственно 1-3 % и 10-15 % от их номинальных

значений. Поэтому для уточнения такого рода характеристик могут использоваться линейные аппроксимации рассмотренных выше динамических и статических систем.

В качестве меры ошибки аппроксимации вектор-функции $z(t)$ измерений кривой $v(t)$ может быть выбрана квадратичная форма

$$H(v, z) = \frac{1}{2} (v - z)^T R (v - z), \quad (23)$$

где R - матрица весовых коэффициентов.

В принципе мерой ошибки $(v - z)$ может служить также норма $\|v - z\|$ вектора $(v - z)$, либо скалярное произведение $(v - z, v - z)$. Если квадрат нормы и скалярное произведение определены через сумму квадратов компонент вектора, то мера ошибки эквивалентна записи (23) при $R = E$.

Для решения сформулированных задач идентификации детерминированных моделей движения центра масс РКН могут быть использованы разнообразные методы поиска минимума функции (6), как аналитические, так и численные. Аналитические методы базируются на теории оптимального управления системами, и, как правило, сводят задачу идентификации к проблеме двухточечной краевой задачи. Численные методы базируются на теории нелинейного программирования и зачастую сводятся к различного рода градиентным процедурам.

Переход к двухточечной краевой задаче.

Если правые части динамической системы

$$\dot{x} = f(t, x, c), \quad x(t_0) = x_0, \quad (24)$$

модели наблюдения

$$y = \phi(t, x, c) \quad (25)$$

и подынтегральная функция функционала

$$I = \int_{t_0}^t H(y, z) dt \quad (26)$$

являются гладкими функциями своих переменных, а система (24)-(25) являются идентифицируемой, то задача минимизации функционала (26) при условии (24) с помощью коэффициентов Лагранжа может быть сведена к задаче на безусловный экстремум функционала

$$I = \int_{t_0}^t \left\{ H(y, z) + \lambda^T \left[\dot{x} - f(t, x, c) \right] \right\} dt, \quad (27)$$

где λ -вектор множителей Лагранжа.

Интегрируя (27) по частям и приравнявая первую вариацию функционала нулю, с учетом явной зависимости вектора x от вектора c и вектора начальных состояний x_0 получим следующие соотношения для оптимальных значений искомых параметров c и x_0 :

$$\int_{t_0}^t \left(\lambda^T \frac{\partial f}{\partial c} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c} \right) dt = 0, \quad (28)$$

$$\dot{\lambda} = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \lambda - \left(\frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \right)^T; \quad \lambda(t_0) = 0; \lambda(t_k) = 0. \quad (29)$$

Таким образом, задача идентификации системы (24) адекватна двухточечной краевой задаче для системы уравнений (24) и (29) при интегральных связях (28) и нулевых значениях переменной λ на концах. Для определения векторов с размерности m , вектора x_0 размерности n и вектор-функции λ размерности n получено $2n+m$ соотношений (24), (28), (29) и $2n$ краевых условий $(\lambda_0 = 0), (\lambda_k = 0)$. Интегральные связи (28) при условиях на концах $\gamma_0 = 0$ и $\gamma_k = 0$ могут быть заменены эквивалентными дифференциальными связями

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{\partial f}{\partial c} \right)^T \lambda + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c} \right)^T. \quad (30)$$

Если не использовать множители Лагранжа, то оптимальные значения векторов c и x_0 определяются из условия равенства нулю вариации функционала (26), т.е. из соотношения

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial H}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) dt = 0 \quad (31)$$

при $\beta = \begin{pmatrix} c \\ \dots \\ x_0 \end{pmatrix}$ и условиях (24) и (25).

Производные $\frac{\partial x}{\partial \beta}$ могут быть определены с помощью уравнений чувствительности

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial \beta} \right) = \frac{\partial f}{\partial \beta} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \beta} \quad (32)$$

$$\text{при } \frac{\partial f}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial c} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и условиях } \frac{\partial x}{\partial c} \Big|_{t=t_0} = 0, \frac{\partial x}{\partial x_0} \Big|_{t=t_0} = E.$$

Интегральное уравнение (31) может быть заменено эквивалентным дифференциальным уравнением

$$\dot{\omega} = \left[\frac{\partial H}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) \right]^T \quad (33)$$

при условиях на концах $\omega(t_0) = 0, \omega(t_k) = 0$.

Для определения вектора β размерностью $n + m$ имеется всего $2n + m + n(n + m)$ соотношений. При этом на каждом шаге итерации приходится интегрировать на $n(n + m)$ уравнений больше, чем в методе, использующем множители Лагранжа.

Условия стационарности (24), (29) и (30) можно также получить, если ввести в рассмотрение векторное уравнение

$$\dot{c} = p \equiv 0 \quad (34)$$

и использовать методы теории оптимального управления систем [4].

Если начальные условия $x(t_0) = x_0$ заданы, то для уравнения (29) левый конец является свободным и двухточечная краевая задача для системы (24), (29) и (30) решается при условиях $x(t_0) = x_0, \lambda(t_k) = 0, \gamma(t_0) = 0, \gamma(t_k) = 0$.

Рассмотрим возможности решения краевой задачи для уравнений (24), (29) и (30), которые могут быть записаны в следующем каноническом виде:

$$\dot{\chi} = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad (35)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial \chi}, \psi(t_0) = 0, \psi(t_k) = 0, \quad (36)$$

где H - гамильтониан, $\chi = \begin{pmatrix} x \\ c \end{pmatrix}; \psi = \begin{pmatrix} \lambda \\ \gamma \end{pmatrix}$,

$$H = H(y, z) + \lambda^T f(t, x, c) + \gamma^T p. \quad (37)$$

Для наиболее важных для практики линейных систем

$$\dot{x} = Ax + Bc; \quad (38)$$

$$y = ax + bc \quad (39)$$

и квадратичной меры ошибки приближения

$$H(y, z) = \frac{1}{2} (y - z)^T R (y - z) \quad (40)$$

уравнения (29) и (30) принимают вид

$$\dot{\lambda} = -A^T \lambda + a^T R (y - z), \lambda(t_0) = 0, \lambda(t_k) = 0; \quad (41)$$

$$\dot{\gamma} = -B^T \lambda, \gamma(t_0) = 0, \gamma(t_k) = 0, \quad (42)$$

где A, B, a, b - матрицы.

Решение краевой задачи (24), (29) и (30) либо (38)-(42) заключается в отыскании таких параметров c и x_0 , которые обращают в ноль невязки $\lambda(t, c, x_0)$ и $\gamma(t, c, x_0)$ в момент $t = t_k$.

Анализ методов решения двухточечных краевых задач достаточно подробно проведен в ряде работ. В целом, рассмотренные методы решения краевых задач являются достаточно общими и практически не учитывают специфику идентифицируемой системы. Линейные системы обладают характерными особенностями, вытекающими из существования фундаментальных решений, сопряженных переменных и свойств скалярных произведений фазовых и сопряженных переменных, которые могут быть использованы при разработке методов идентификации этих систем.

В частности, показано, что при идентификации линейных систем методом сопряженных уравнений двухточечная краевая задача для уравнений (38), (41) и (42) может быть сведена к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$(\psi_x, x)_{t_0, i} + \left\{ \int_{t_0}^t [(\psi_\lambda, a^T R b) + (\psi_x, B)] dt \right\}_i - c - \int_{t_0}^t (\psi_\lambda, a^T R z)_i dt = 0, \quad (43)$$

$$i = 1, 2, \dots, n + m,$$

где переменные $\psi_\lambda, \psi_x, \psi_\gamma$, определяются соответственно уравнениями

$$\dot{\psi}_\lambda = A \psi_\lambda + B \psi_\gamma; \quad (44)$$

$$\dot{\psi}_x = -A^T \psi_x - a^T R a \psi_\gamma; \quad (45)$$

$$\dot{\psi}_\gamma = 0. \quad (46)$$

Уравнения (44) и (45) могут быть проинтегрированы в обратном времени при начальных условиях $\psi_x(t_k) = 0$ и

$$\begin{pmatrix} \Psi_\lambda \vdots 0 \\ \dots \vdots \dots \\ 0 \vdots \Psi_\gamma \end{pmatrix}_{t=t_k} = E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad (47)$$

где Ψ - матрица фундаментальных решений, а интегралы в соотношении (43) могут определяться с помощью уравнений

$$\dot{\nu} = (\psi_\lambda, a^T R b) + (\psi_\gamma, B); \quad (48)$$

$$\dot{\beta} = (\psi_\lambda, a^T R z), \quad (49)$$

интегрируемых при нулевых начальных условиях.

Если известна матрица фундаментальных решений $X(t, t_0)$ уравнения (38), то с учетом того, что матрица фундаментальных решений уравнения (41) равна $\Lambda = (X^T)^{-1}$, а граничные значения переменных λ и γ равны нулю, уравнения для определения параметров x_0 и c примут вид

$$\left\{ \int_{t_0}^{t_k} (X^T)^{-1} X^T a^T R a X d\tau \right\} x_0 + \left\{ \int_{t_0}^{t_k} (X^T)^{-1} X^T a^T R a \int_{t_0}^{\tau} X X^{-1} B d\xi d\tau \right\} c - \int_{t_0}^{t_k} (X^T)^{-1} X^T a^T R z d\tau = 0, \quad (50)$$

$$\left\{ \int_{t_0}^{t_k} (t_k - \tau) (X^T)^{-1} X^T a^T R a X d\tau \right\} x_0 + \left\{ \int_{t_0}^{t_k} (t_k - \tau) (X^T)^{-1} X^T a^T R a \int_{t_0}^{\tau} X X^{-1} B d\xi d\tau \right\} c - \int_{t_0}^{t_k} (t_k - \tau) (X^T)^{-1} X^T a^T R z d\tau = 0. \quad (51)$$

Следует отметить, что общее решение уравнения (38) равно

$$x(t) = X(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^t X(t, \tau) X^{-1}(\tau, t_0) B d\tau, \quad (52)$$

для которого можно записать эквивалентное уравнение типа уравнения Вольтерра для фундаментальной матрицы, ограничившись рассмотрением лишь первого приближения

$$X(t, t_0) = \left[E - \int_{t_0}^t X_0(t, \tau) X_0^{-1}(\tau, t_0) B d\tau \right] X_0(t, t_0), \quad (53)$$

где E - единичная матрица,

$$X_0(t, t_0) = \exp \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right). \quad (54)$$

При достаточно малом интервале $[t, t_0]$

$$X_0(t, t_0) \approx E + A(t - t_0) + \frac{1}{2} A^2(t - t_0)^2 + \dots \quad (55)$$

Для случая линейной стационарной системы $y = bc$ и квадратичной меры приближения (40) может быть использовано условие $\int_{t_0}^{t_k} b^T R(y - z) dt = 0$,

откуда с учетом $y = bc$ получаем:

$$c = \left(\int_{t_0}^{t_k} b^T R b dt \right)^{-1} \int_{t_0}^{t_k} b^T R z dt. \quad (56)$$

Для решения уравнения (56) либо краевой задачи для уравнений (24), (29) и (30) могут быть использованы разнообразные численные методы.

Таким образом, задача идентификации сведена к двухточечной краевой задаче, что позволяет унифицировать программно-алгоритмическое обеспечение интеллектуализированной системы управления при формировании базы знаний.

Литература

1. Пролетарский А.В. Управление полетом ракет космического назначения. М.: Издательство МГОУ, 2006. 140с.
2. Пролетарский А.В., Неусыпин К.А., Цибизова Т.Ю. Системы управления летательными аппаратами и алгоритмы обработки информации. М.: Издательство МГОУ, 2006. 220с.
3. Пролетарский А.В. Интеллектуализированная система управления перспективными ракетами космического назначения. Автоматизация и современные технологии, 2011, №6, с. 30-33

Approaches to identification of center-of-mass motion models in space rockets

77-30569/345425

03, March 2012

Proletarskii A.V.

Bauman Moscow State Technical University

pav@bmstu.ru

The article considers methods of identification of center-of-mass motion models in space rockets. Reducing the task of identification to a two-point boundary-value problem is shown for the purpose of unification of program-algorithmic support in the control system.

Publications with keywords: [identification](#), [motion model](#), [launch vehicle](#)

Publications with words: [identification](#), [motion model](#), [launch vehicle](#)

References

1. Proletarskii A.V. *Upravlenie poletom raket kosmicheskogo naznacheniiia* [Flight control of space rockets]. Moscow, MSOU Publ., 2006. 140 p.
2. Neusypin K.A., Proletarskii A.V., Tsibizova T.Iu. *Sistemy upravleniia letatel'nyimi apparatami i algoritmy obrabotki informatsii* [Aircraft control systems and algorithms for information processing]. Moscow, MSOU Publ., 2006. 220 p.
3. Proletarskii A.V. *Intellektualizirovannaia sistema upravleniia perspektivnymi raketami kosmicheskogo naznacheniiia* [Intellectual control system of the space purpose perspective rockets]. *Avtomatizatsiia i sovremennye tekhnologii*, 2011, no. 6, pp. 30-33.