электронное научно-техническое издание
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС 77 - 30569. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

Нелинейная модель рыночного звена макроэкономической системы управления

77-30569/341035

02, февраль 2012

Чернышев С. Л.

УДК.00000 330.4 (078.8)

МГТУ им. Н.Э.Баумана
chernshv@bnstu.ru

В современной социально-экономической системе существует множество различных рынков: рынок товаров и услуг, рынок денег, рынок энергетических ресурсов, рынок трудовых ресурсов, и другие, в том числе рынок криминальных услуг. В связи с этим важное значение имеет моделирование рынка. Для аналитической оценки рыночной цены применяются различные модели рынка. Среди них известны динамическая паутинообразная модель и модель общего равновесия Л. Вальраса [1]. Известная динамическая модель имеет линейный характер, а модель общего равновесия, как следует из названия, в отличие от первой предполагает равновесие на рынке. Целью настоящей статьи является создание модели рынка, которая бы использовала преимущества обеих указанных моделей и учитывала нелинейность процесса формирования цены.

Свое название паутинообразные модели получили из-за «паутины», образующейся на графике в ходе изменения цены на рынке, который изображен на рис. 1.

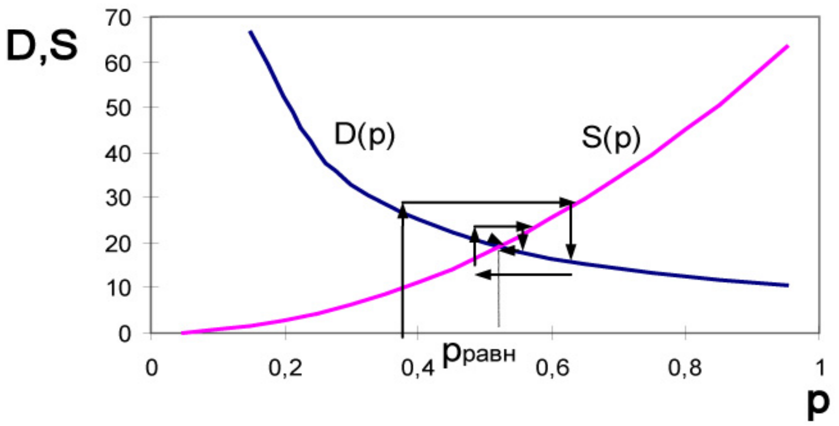

Рис. 1. Паутинообразная траектория установления рыночной цены

Рассмотрим его смысл. На первом этапе задается начальная цена, которой соответствует какое-то значение спроса; предложение, соответствующее этому уровню спроса, существует при большем значении цены, которому соответствует другой спрос (меньший), а его уровню - предложение при меньшем значении цены и т.д. В конце концов получившаяся спираль (паутина) приводит к равновесной цене, на которой приходят к согласию покупатель и продавец. Каждый этап этого приближения к равновесной цене может рассматриваться, как этап, соответствующий цене, сложившейся в некоторый момент времени. И этот процесс «торга» можно рассматривать, как процесс установления рыночной цены со временем.

В известной паутинообразной модели [1] учитывается, что на рынке равновесие имеет место только в идеале, а на практике в разные моменты времени может возникать и неудовлетворенный спрос (дефицит товара) и остатки товара, пополняющие остаток.

Механизм изменения рыночной цены зависит от того, как идет торговля: если есть дефицит товара, то продавец на свободном рынке повышает цену, а если товар плохо продается и возникают остатки товара, приводящие к росту остатка, то он вынужден снижать цену.

Пусть в *k*-ый день разница между спросом и предложением составила

$$\Delta Q(k) = S(k) - D(k).$$

Если $\Delta Q(k) > 0$, следовательно, предложение превысило спрос и в конце дня остался остаток товара, который вместе с новой поставкой должен быть продан на следующий день. Если предположить, что уровень спроса не изменится, для его продажи необходимо снизить цену. Если $\Delta Q(k) < 0$, то товара в этот день не хватило, поэтому на следующий день можно повысить цену. В целом этот механизм описывается уравнением

$$p(k) = p(k-1) - \varepsilon\, \Delta Q(k-1), \qquad (1)$$

из которого следует, что цена в k-ый день $p(k)$ будет определяться вчерашней ценой $p(k-1)$ и остатком (дефицитом) товара на вчерашний вечер $\Delta Q(k-1)$. Коэффициент ε называется эластичностью цены по остатку и определяется, как

$$\varepsilon = -\frac{dp}{dQ}.$$

Отметим, что (1) может определять изменение цены не только с периодичностью в один день (что было принято нами для наглядности), но и при других периодах дискретизации времени - длительных или коротких. Если же общая продолжительность рассматриваемого периода времени намного больше периода дискретизации времени $\Delta t = t(k) - t(k-1)$, то приближенно можно считать, что цена меняется непрерывно и $\Delta t \to dt$. В этом случае уравнение (1) можно записать в непрерывном виде:

$$\frac{dp}{dt} = -\varepsilon \frac{dQ}{dt}.$$

Решая это уравнение относительно $p(t)$, получаем:

$$p(t) = p(0) - \varepsilon\, Q(t). \tag{2}$$

Здесь $Q(t)$ - накопленный за все рассматриваемое время от 0 до t остаток, равный площади (с учетом знака), расположенной между кривыми $S(t)$ и $D(t)$. Константа $p(0)$ определяется при равенстве нулю этого остатка ($Q(t) = 0$), следовательно, равна равновесной цене $p(0) = p_{\text{равн}}$. На рис. 2 приведены графики, иллюстрирующие изменение цены во времени при изменении спроса и предложения.

Из (2) видно, что цена зависит от остатка линейно, что в реальности имеет место лишь при малых отклонениях от точки равновесия $Q = 0$.

При большом остатке или дефиците эта зависимость отличается от линейной, что видно из рис. 3. Поэтому ее можно аппроксимировать какой-либо математической функцией. Наилучшим образом в качестве аппроксимирующей подходит экспоненциальная функция. В этом случае

$$p(t) = p_{\text{равн}} \exp[-\varepsilon\, Q(t) / p_{\text{равн}}]. \tag{3}$$

Эластичность ε определяет наклон графика.

Найдем с помощью (3) дискретную модель. Из (3) сначала получаем

$$\ln \frac{p(t)}{p_{\text{равн}}} = -\varepsilon \frac{Q(t)}{p_{\text{равн}}},$$

а потом рассмотрим приращения левой и правой частей при приращении времени на Δt:

$$\ln \frac{p(k)}{p_{\text{равн}}} - \ln \frac{p(k-1)}{p_{\text{равн}}} = -\varepsilon \frac{\Delta Q(k-1)}{p_{\text{равн}}},$$

откуда получаем

$$p(k) = p(k-1) \exp[-\varepsilon\, \Delta Q(k-1) / p_{\text{равн}}]. \tag{4}$$

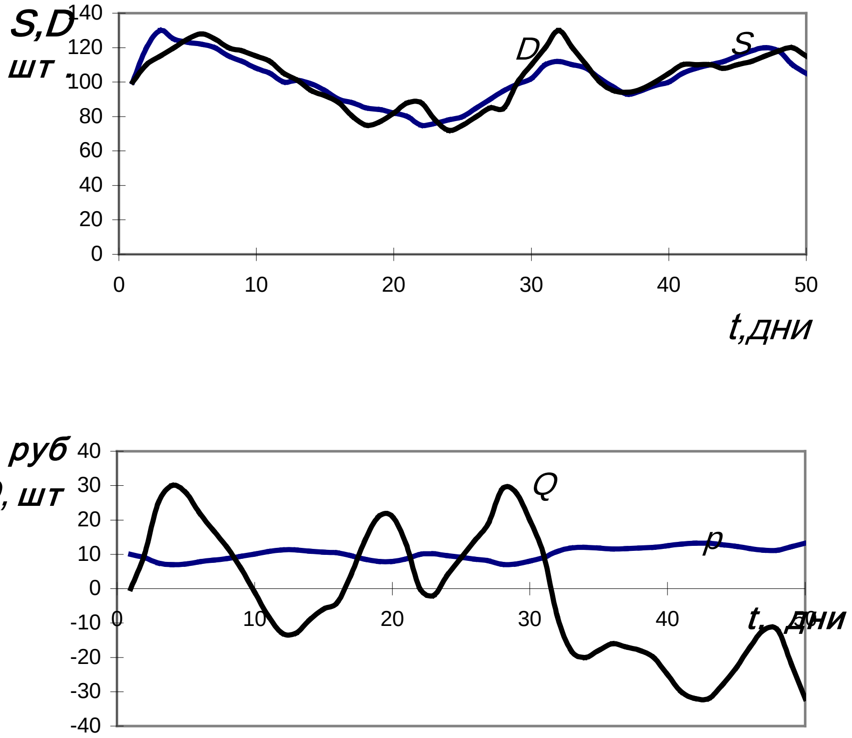

Рис. 2. Изменение спроса, предложения, остатка и цены

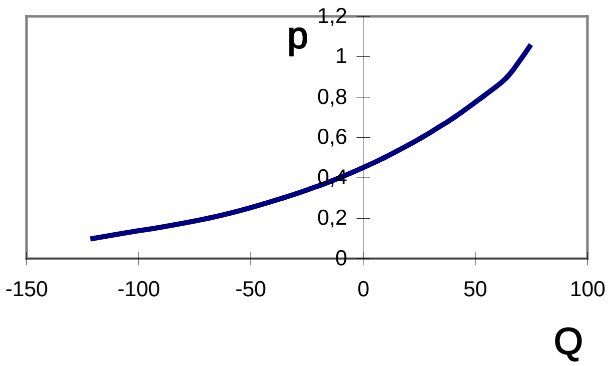

Рис. 3. Зависимость рыночной цены от разности между спросом и предложением

Это уравнение определяет динамику изменения цен от прироста остатка (дефицита) не только вблизи точки равновесия, но и при ощутимых отклонениях от нее. Отметим, что при $\Delta Q \to 0$ в (4) экспоненту можно аппроксимировать линейной зависимостью и это выражение легко преобразуется в (1) при $p(k-1) = p_{равн}$, что говорит об аналогичности моделей (4) и (1) вблизи точки равновесия. Однако для других значений ΔQ расхождения моделей увеличиваются по мере удаления от равновесия – как при большом дефиците, так и при больших запасах, так как растет погрешность линейной модели.

Рассмотрим теперь модель многопродуктового рынка с учетом производителя и потребителя. Этот учет состоит в том, что в модель введены дополнительные уравнения:

уравнение, описывающееее производственную функцию

$$S_i = S_{i0}(N_i / N_{i0})^{\alpha_{i1}}(K_i / K_{i0})^{\alpha_{i2}};$$

уравнение, описывающее прибыль производителя

$$G_i = S_i p_{yi} - p_1 N_i - p_2 K_i;$$

а также уравнение для функции полезности

$$U = \prod_{i=1}^{n} D_i^{\beta_i};$$

и уравнение бюджета потребителя

$$R = \sum_{i=1}^{n} p_{yi} D_i,$$

где p_{yi} - цена на i – й продукт, p_1 и p_2 - цены на трудовые ресурсы и основные фонды, соответственно,

$S_{i0}, N_{i0}, K_{i0}, \alpha_{1i}, \alpha_{2i}$ - коэффициенты производственной функции, β_k - коэффициенты функции полезности.

Если учесть при этом, что производитель стремится к максимизации своей прибыли, то есть

$$G_i = \max,$$

то в [2] найдено, что на многопродуктовом рынке оптимальное предложение на i – й продукт будет определяться следующим выражением

$$S_i = \frac{p_{yi}^{\frac{\alpha_{1i}+\alpha_{2i}}{1-\alpha_{1i}-\alpha_{2i}}} S_{i0}^{\frac{1}{1-\alpha_{1i}-\alpha_{2i}}}}{\left(\frac{p_1 N_{i0}}{\alpha_{1i}}\right)^{\frac{\alpha_{1i}}{1-\alpha_{1i}-\alpha_{2i}}} \left(\frac{p_2 K_{i0}}{\alpha_{2i}}\right)^{\frac{\alpha_{2i}}{1-\alpha_{1i}-\alpha_{2i}}}}., \qquad (5)$$

где p_{yi} - цена на i – й продукт, p_1 и p_2 - цены на трудовые ресурсы и основные фонды, соответственно,

$S_{i0}, N_{i0}, K_{i0}, \alpha_{1i}, \alpha_{2i}$ - коэффициенты производственной функции.

В [2] также найдено, что из условия максимизации полезности при имеющемся у потребителя бюджете R, то есть

$$U = \max \text{ при } R = fix \ ,$$

следует, что оптимальный спрос на *i* – й продукт со стороны потребителя равен величине

$$D_i = \frac{R}{p_{yi}} \frac{\beta_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k} \ ., \tag{6}$$

где β_k - коэффициенты функции полезности.

Подставляя (5) и (6) в (4), получаем

$$p_{yi}(k) = p_{yi}(k-1)\exp\{-[\varepsilon \frac{p_{yi}(k-1)^{\frac{\alpha_{1i}+\alpha_{2i}}{1-\alpha_{1i}-\alpha_{2i}}} S_{i0}^{\frac{1}{1-\alpha_{1i}-\alpha_{2i}}}}{\left(\frac{p_1 N_{i0}}{\alpha_{1i}}\right)^{\frac{\alpha_{1i}}{1-\alpha_{1i}-\alpha_{2i}}} \left(\frac{p_2 K_{i0}}{\alpha_{2i}}\right)^{\frac{\alpha_{2i}}{1-\alpha_{1i}-\alpha_{2i}}}} -$$

$$- \frac{R}{p_{yi}(k-1)} \frac{\beta_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k}] / p_{равн}\}. \tag{7}$$

Полученное выражение, несмотря на свой довольно громоздкий вид, является окончательным уравнением модели. Оно определяет динамику изменения рыночных цен на многопродуктовом рынке с учетом затрат и производственной функции производителя и его стремления к максимизации прибыли, а также бюджета и функции полезности потребителя и его стремления максимизировать полезность при покупке.

В случае изменения цен на производственные факторы (трудовые ресурсы и основные фонды) меняются, как видно из (5), и выпуски. При этом меняются и цены на товары (см.(7)).. При изменении бюджета потребителя изменяется спрос (6), и рыночные цены также изменяются, что также следует из (7).

Так, в случае, если имеет место выполнение закона убывающей отдачи производства и эластичность производства $\varepsilon_i = \alpha_{1i} + \alpha_{2i} < 1$, при повышении покупательной способности конечного потребителя, т.е. с ростом бюджета R, как видно из (7), возрастают цены на товары, и, как следует из (5),возрастает и предложение. Так, например, при возрастании R в два раза, и при $\alpha_{1i} + \alpha_{2i} = 0.9$, цены на товары возрастают на 7.2%, а выпуски - на 86.6%. В случае, когда $\alpha_{1i} + \alpha_{2i} = 1$ и отдача от расширения производства постоянна, из (5) видно, что цены на товар оказываются независимыми от предложения, соответственно и прибыли производителей в этом случае при выполнении максимальны при любых выпусках. Если же в модели применяется эластичность $\varepsilon_i = \alpha_{1i} + \alpha_{2i} > 1$, то в соответствии с (5) предложение падает с ростом рыночной цены, что противоречит рыночным законам, говорит о неправильности модели и еще раз подтверждает справедливость закона невозрастающей отдачи производства.

В заключение отметим, что данная модель рыночного звена может быть применена, как часть общей макроэкономической модели, представляющей собой замкнутую систему управления с многочисленными обратными связями. Входными переменными такого звена являются предложение, формирующееся в производственном секторе, и спрос, формирующийся в потребительском секторе, а выходной переменной является рыночная цена. Динамика ее изменения в макроэкономической модели и будет описывать инфляционный процесс.

Литература

1. Гусейнов Р.М., Семенихина В.А. Экономическая теория. Изд-во Омега-Л, 2011.
2. Чернышев С.Л. Моделирование экономических систем и прогнозирования их развития. - М: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002.

electronic scientific and technical periodical
SCIENCE and EDUCATION
EL № FS 77 - 30569. №0421100025. ISSN 1994-0408

Nonlinear model of market sector of macroeconomic control system

77-30569/341035

 # 02, February 2012

Chernyshev S.L.

Bauman Moscow State Technical University

chernshv@bnstu.ru

The model includes the production function modeling supply and the utility function modeling consumption. This resulted in the nonlinear dynamic equation of market price subject to the factors affecting the price.

Publications with keywords: model, demand, control system, market price, supply, macroeconomics

Publications with words: model, demand, control system, market price, supply, macroeconomics

References

1. Guseinov R.M., Semenikhina V.A. *Ekonomicheskaia teoriia* [Economic theory]. Moscow, Omega-L Publ., 2011. 440 p.

2. Chernyshev S.L. *Modelirovanie ekonomicheskikh sistem i prognozirovaniie ikh razvitiia* [Modeling of economic systems and prediction of their development]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2002. 232 p.