электронное научно-техническое издание
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС 77 - 30569. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

Теоретико-решеточная модель расчленяемости машин и механических приборов

77-30569/324631

 # 02, февраль 2012

Божко А. Н.

УДК 004.942

МГТУ им. Н.Э. Баумана
abozhko1@gmail.com

Технологическая подготовка сборочного производства машин и приборов является одним из самых сложных и трудоемких этапов жизненного цикла изделия. Она занимает пограничное положение между стадиями конструирования и проектирования технологических процессов обработки и, во многом по этой причине, аккумулирует проблемы технологов и ошибки конструкторов.

Разработка технологии сборки требует решения множества трудных и важных проблем, но ключевые задачи этой стадии – синтез схемы членения и генерация последовательности общей и узловой сборки изделия. Свойства расчленяемости и собираемости машины или прибора закладываются на стадии конструирования, выявляются на стадии технологической подготовки, а верифицируются и реализуются в производственной системе, полное описание которой может быть не известно конструкторам и технологам. Эта особенность процесса сборки вместе с конструктивной и поведенческой сложностью современных изделий служат главными причинами того, что закономерности принятия рациональных проектных решений на этапе технологической подготовки сборочного производства еще не получили точного и полного описания.

В работах автора [1, 2, 3] предложена и обоснована структурная модель конструкции, которая дает полноценное описание свойства собираемости изделия. В данной статье обсуждается подход, позволяющий получить корректную математическую модель, позволяющую позволяет синтезировать различные схемы декомпозиции изделия на независимо собираемые фрагменты.

Обозначим $X = \{x_i\}_{i=1}^{N}$ -- множество деталей изделия, а *B(X)* -- совокупность всех подмножеств множества *X*, включая и пустое множество. Множество *B(X)* иногда называют булеаном, а *X* – носителем. В алгебраической теории решеток доказывается теорема, гласящая, что для любого множества *X* его булеан *B(X)* является полной решеткой [4].

Рассмотрим отображение $\varphi : B(X) \to B(X)$, у которого $\forall Y \in B(X)$ выполняются условия:

1. $Y \le \varphi(Y)$ (экстенсивность);
2. $Y_1 \le Y_2 \Rightarrow \varphi(Y_1) \le \varphi(Y_2)$ (монотонность);
3. $\varphi(\varphi(Y)) = \varphi(Y)$ (идемпотентность).

Отображение, обладающее свойствами 1-3, называется оператором замыкания, а элементы *Y*, для которых справедливо $\varphi(Y) = Y$, именуются замкнутыми [4].

Теперь вернемся к исходной интерпретации *X* как множества деталей изделия. Будем считать, что отображение $\varphi : B(X) \to B(X)$ любому подмножеству деталей $Y \in B(X)$ ставит в соответствие $\varphi(Y) \in B(X)$, где $\varphi(Y)$ – минимальный по составу независимо собираемый фрагмент изделия, включающий в себя *Y*.

Так как $Y \subseteq \varphi(Y)$, то для отображения φ очевидным образом выполняется свойство экстенсивности (1). Обоснуем монотонность. В самом деле, если для подмножеств деталей $Y_1, Y_2 \in B(X)$ имеет место $Y_1 \subseteq Y_2$, то минимальный собираемый фрагмент $\varphi(Y_2)$, включающий Y_2, является собираемым фрагментом (возможно не минимальным), содержащим Y_1. Поэтому $\varphi(Y_1) \le \varphi(Y_2)$. Покажем идемпотентность. Для любого *Y* его образ $\varphi(Y)$ является и минимальным и собираемым по определению, поэтому $\varphi(\varphi(Y)) = \varphi(Y)$.

В такой интерпретации отображения φ φ-замкнутыми элементами в *B(X)* являются подмножества деталей, сборка которых может быть осуществлена независимо, и только они. Множество всех φ-замкнутых элементов называется частным по замыканию решетки *B(X)* и обозначается $B(X)/\varphi = \{Y \in B(X) \mid \varphi(Y) = Y\}$.

В [4] доказывается теорема, утверждающая, что частное по замыканию L/γ оператора $\gamma : L \to L$, действующего на решетке *L*, само является решеткой; причем нижние грани элементов в *L* совпадают с нижними гранями в L/γ, т.е. для любых $a, b \in L$ выполняется $a \wedge_L b = a \wedge_{L/\gamma} b$.

Булеан *B(X)* множества деталей представляет собой решетку, поэтому частное $B(X)/\varphi$ по замыканию φ также является решеткой. Причем, для любых $Y_1, Y_2 \in B(X)/\varphi$ $Y_1 \cap Y_2 = Y_1 \wedge_{B(X)/\varphi} Y_2$, т.е. пересечение любых подмножеств, собираемых независимо, обладает этим свойством.

Несколько замечаний по поводу интерпретации приведенных теоретико-решеточных понятий. Итак, для любого набора деталей *Y* его φ-замкнутый образ представляет собой минимальное по составу подмножество деталей, которое включает в себя Y и допускает независимую сборку. Эта независимость обеспечивается двумя факторами. Во-первых, любой φ-замкнутое подмножество обладает свойством взаимной скоординированности, Это значит, что множество такого типа содержит полный комплект баз, который полностью определяет положение любой своей данной детали относительно прочих. Во-вторых, мы предполагаем, что существует по крайней мере одна последовательность сборки всего изделия, которая не нарушает условия геометрического доступа. Из этого непреложно следует, что такая последовательность найдется и для любого подмножества деталей, образующих φ-замкнутый фрагмент. Совокупность всех φ-замкнутых подмножеств представляет собой алгебраическую структуру с двумя операциями, называемую решеткой. Решеточное объединение и пресечение любых двух φ-элементов не выводит за пределы решетки, поскольку продуцирует φ-элемент. Решеточное пересечение $Y_1 \wedge Y_2$ представляет собой наибольшее по количеству деталей собираемое множество, в которое входят Y_1 и Y_2. решеточное объединение $Y_1 \vee Y_2$ - это минимальное собираемое множество, содержащее Y_1 и Y_2.

На рис. 1 представлен фрагмент конструкции редуктора, а на рис. 2 показана решетка $B(X)/\varphi$ этой конструкции. Наибольшим элементом этой решетки служит само изделие, наименьшим – пустое множество. Решетка $B(X)/\varphi$ - атомарная. Это значит, что каждый ее элемент образуется объединением первичных (покрывающих наименьший) элементов, называемых атомами. Очевидно, что в принятой интерпретации атомами решетки $B(X)/\varphi$ являются детали изделия.

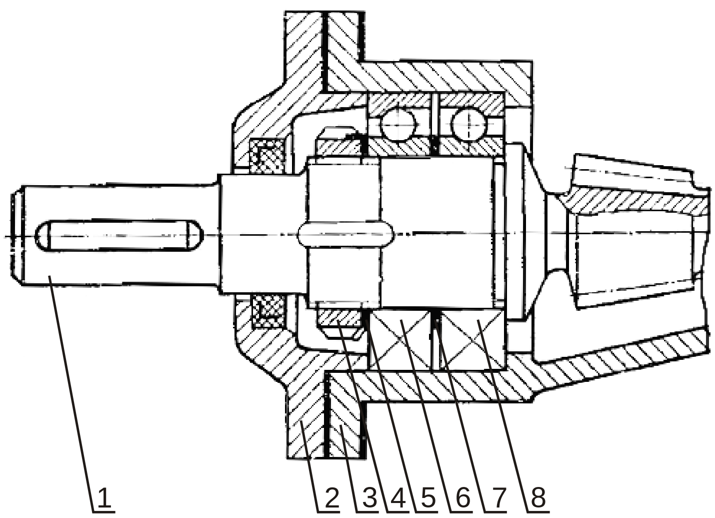

Рис. 1. Фрагмент конструкции редуктора

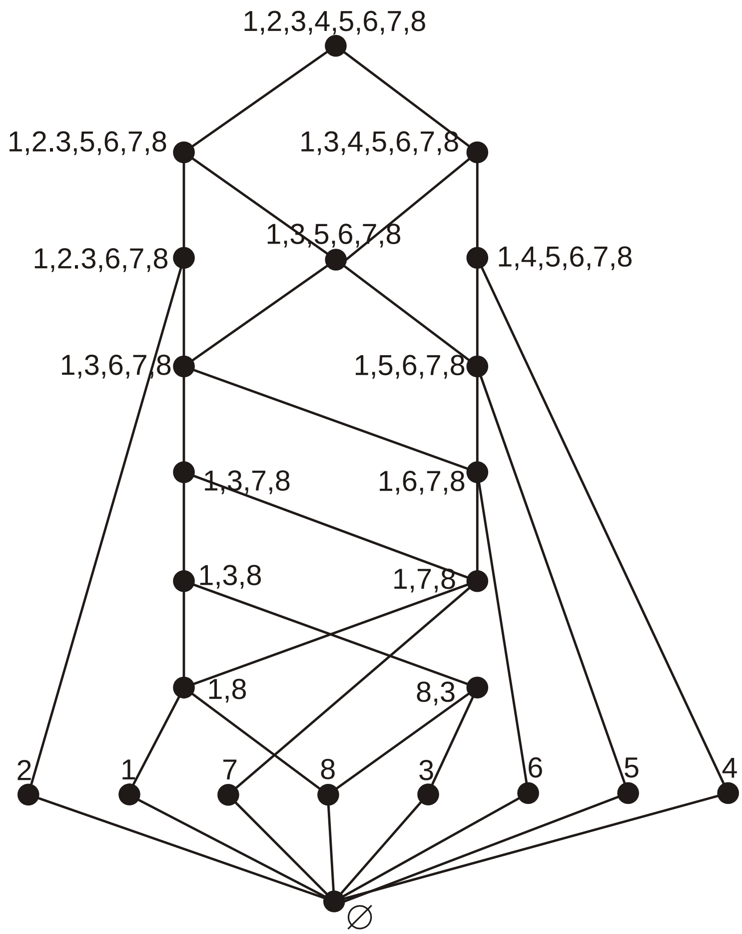

Рис. 2. Решетка $B(X)/\varphi$ всех φ-замкнутых элементов редуктора

В этой статье мы не рассматриваем способы алгоритмической генерации решеток вида $B(X)/\varphi$. Этой важной проблеме посвящены работы [1, 3], где данный объект задается в виде множества всех стягиваемых подгиперграфов гиперграфа механических связей.

Решетки $B(X)/\varphi$ представляют собой очень содержательное образование, которое позволяет дать точное математическое толкование большому количеству сборочных операций и решений. Приведем лишь некоторые из них. Любая цепь, первым элементом которой служит пустое множество $\varnothing$, а последним – *X*, представляет собой последовательность сборки изделия, которая удовлетворяет условия базирования. Действительно, если $\varnothing < Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_k < X$ -- такая цепь, то в этой последовательности все $Y_i, i = \overline{1,k}$ -- собираемые множества, и их можно рассматривать как образы, которые «пробегает» изделие *X* в процессе сборки. Каждая *i*-ая операция заключается в установке деталей, образующих разность $Y_i \setminus Y_{i-1}$. Любая максимальная цепь длины *N*, где *N* = |*X*|, описывает линейную последовательность сборки, которую допускает изделие по условиям базирования. Так, для конструкции, приведенной на рис. 1, решеточная цепь 1 < 18 < 178 < 1678 < 15678 < 145678 < 1345678 < 12345678 (см. рис. 2) описывает линейную последовательность сборки редуктора. Максимальные цепи длины, меньшей *N*, служат образами конструктивно реализуемых последовательностей общей сборки с участием предварительно собранных сборочных единиц.

Цепи, начинающиеся в наименьшем элементе $\varnothing$ решетки $B(X)/\varphi$ и заканчивающиеся в ее наибольшем элементе *X*, будем называть (0,1)-цепями. Все вершины $B(X)/\varphi$ можно разделит на два класса. В первый класс, который мы обозначим X', входят такие $Y \in B(X)/\varphi$, через которые проходит хотя бы одна максимальная (0,1)-цепь. Второй класс образуют X'' образуют все вершины $B(X)/\varphi$, для которых не существует ни одной такой цепи. Цепи, проходящие через X'', описывают последовательности сборки из предварительно собранных фрагментов, такие цепи и соответствующие последовательности будем называть нелинейными.

Пусть ρ -- некоторое разбиение на атомах решетки $B(X)/\varphi$. Рассмотрим бинарное отношение $\theta(\rho)$ на элементах $B(X)/\varphi$, удовлетворяющее условиям:

1. $\theta(\rho)$ -- эквивалентность на $B(X)/\varphi$;
2. $\theta(\rho)$ содержит разбиение ρ, то есть $x_1 \rho x_2 \Rightarrow x_1 \theta(\rho) x_2$;
3. отношение $\theta(\rho)$ является верхней конгруэнцией, то есть из $Y_1 \theta(\rho) Y_2$ и $X_1 \theta(\rho) X_2$ следует $(X_1 \vee Y_1)\theta(\rho)(X_2 \vee Y_2)$ (стабильность относительно решеточного объединения);
4. $\theta(\rho)$ -- минимальное из всех отношений эквивалентности, для которых выполняются свойства 1-3.

Отношение $\theta(\rho)$ с перечисленными свойствами называется отношением верхней конгруэнции, порожденное отношением ρ [4]. Классы эквивалентности $[Y]\theta$ верхней конгруэнции являются верхними подрешетками решетки $B(X)/\varphi$. Действительно, если $Y_1, Y_2 \in [Y]\theta$, то $(Y_1 \vee Y_2)\theta(\rho)(Y \vee Y)$, но $Y \vee Y = Y$, поэтому $(Y_1 \vee Y) \in [Y]\theta$.

Рассмотрим множество всех смежных классов (классов эквивалентности решетки $B(X)/\varphi$) верхней конгруэнции $\theta(\rho)$ и обозначим это множество через B/θ, то есть $B/\theta = \{[Y]\theta(\rho) \mid Y \in B(X)/\varphi\}$. Положим $[Y_1]\theta \vee [Y_2]\theta = [Y_1 \vee Y_2]\theta$ для любых $Y_1, Y_2 \in B(X)/\varphi$. Это равенство определяет операцию $\vee$ на множеств смежных классов корректно, поскольку отношение θ -- стабильно относительно решеточного объединения. Отсюда следует, что множество B/θ является верхней полурешеткой, которая называется фактор-полурешеткой по верхней конгруэнции θ [4].

Следующая теорема раскрывает одно важное свойство верхних конгруэнций [4].

Теорема. Рефлексивное бинарное отношение θ на решетке $(L,\wedge,\vee)$ является верхней конгруэнцией тогда и только тогда, когда для всех $x,y,z,t\in L$ выполнены следующие условия:

1. $x\theta y$ тогда и только тогда, когда $x\theta(x\vee y)$ и $y\theta(x\vee y)$;
2. $x\le y\le z$ $x\theta y$ $y\theta z$ влекут за собой $x\theta z$;
3. $x\le y$ $x\theta y$ влекут за собой $(x\vee t)\theta(y\vee t)$.

Полурешетка $B/\theta(\rho)$ содержит информацию двух видов. Во-первых, каждая такая полурешетка является описанием схемы членения изделия на сборочные единицы. Во-вторых, $B/\theta(\rho)$ представляет всевозможные последовательности общей сборки изделия, каждая из которых допускается конструкцией по условиям базирования. Напомним, что в процессе общей сборки участвуют как детали изделия, так и предварительно собранные сборочные единицы любого уровня вложения.

Действительно, атомами решетки $B/\theta(\rho)$ являются детали. Будем считать, что разбиение множества атомов ρ выражает мнения лица принимающего решение о возможном составе сборочных единиц. Рассмотрим произвольный класс верхней конгруэнции $\theta(\rho)$, содержащий некоторый смежный класс $[x]\rho$ разбиения ρ. Обозначим этот класс $J(Y)$, где Y – его наибольший элемент. (Любой элемент $\theta(\rho)$ является верхней полурешеткой, поэтому имеет наибольший элемент). То есть Y представляет собой образ минимальное по числу элементов собираемое подмножество, содержащее смежный класс $[x]\rho$. Смежный класс $J(Y)=\{Y_i\,|\,0\prec Y_i<Y,\,Y\in B(X)/\varphi\}$ состоит из всех непустых собираемых подмножеств множества Y. Их можно рассматривать как образы, которые пробегает сборочная единица Y при различных последовательностях сборки. Здесь символом $\prec$ обозначено отношение непосредственного следования, то есть $X\prec Y$, если $X<Y$ и не существует такого Z, что $X<Z<Y$.

Например, на рис. 3 показана конструкция двухступенчатого планетарного редуктора, а на рис. 4 изображен фрагмент решетки $B(X)/\varphi$, сопоставленной этой конструкции. Эта алгебраическая структура не может быть приведена целиком в силу своей громоздкости, поэтому на рисунке показан только один содержательный фрагмент решетки.

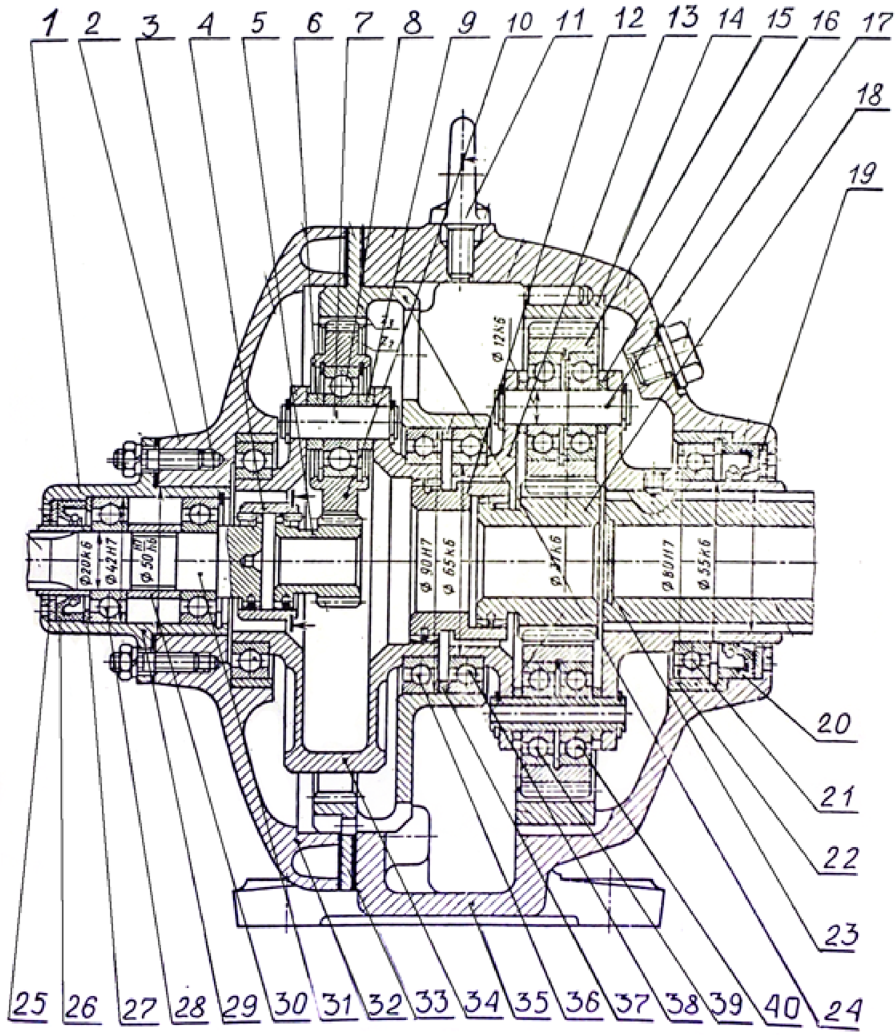

Рис. 3. Двухступенчатый планетарный редуктор

На рис. 4 сплошной замкнутой линией обведены классы разбиения по отношению ρ. Таковыми являются {30, 31} и {26, 28, 29}. Штриховой линией обозначены подмножества элементов $B(X)/\varphi$, которые представляют собой смежные классы $\theta(\rho)$ вида $J(Y)$. Так, класс {30, 31} порождает класс $[2,30,31]\theta$. Класс $[2,30,31]\theta$ является минимальным собираемым множеством деталей, которое содержит {30, 31}. Остальные классы $\theta(\rho)$ обведены штрихпунктирной линией.

Пример, приведенный на рис. 4, подтверждает свойство верхней стабильности отношения $\theta(\rho)$, что можно проверить непосредственно по рисунку. Решеточное объединение любого элемента из $[2,30,31]\theta$ и любого элемента из $[3,25,26,27,28,29]\theta$ принадлежит классу $[1,2,3,25,26,27,28,29,30,31]\theta$.

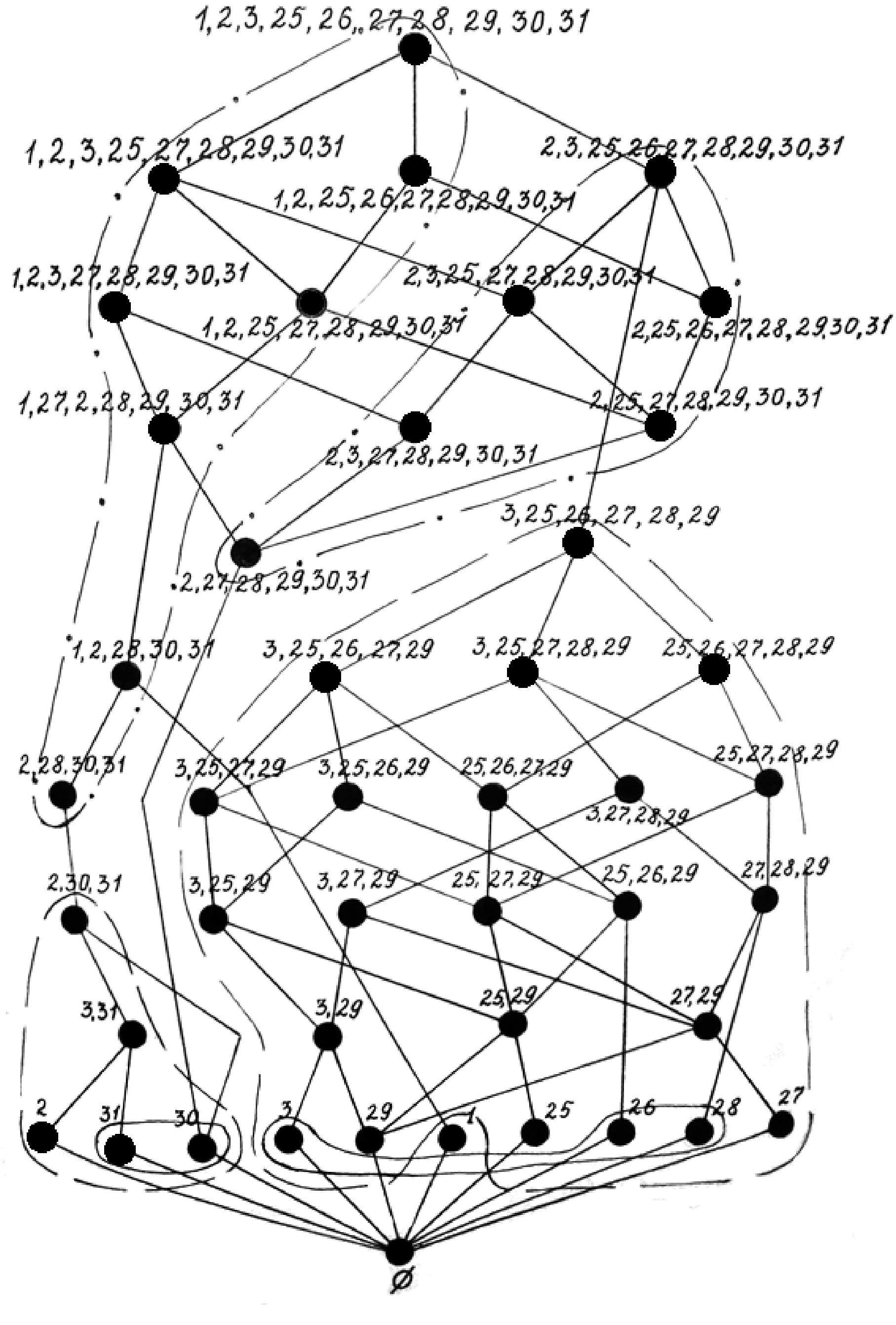

Рис. 4. Фрагмент решетки $B(X)/\varphi$ планетарного редуктора

Рассмотрим частично упорядоченное множество решетки $B(X)/\varphi$, состоящее из всех атомов, наибольших элементов смежных классов $J(Y)$ верхней конгруэнции $\theta(\rho)$ и наибольшего элемента всей решетки. Это упорядоченное множество представляет собой описание схемы членения изделия, в которой сборочными единицами первого порядка служат наибольшие элементы классов $J(Y)$. Схемы членения такого вида, то есть порожденные верхними конгруэнциями, -- простейшие, поскольку минимальное число уровней иерархии, равное трем. На рис. 5 приведена трехуровневая схема членения планетарного редуктора (рис. 3).

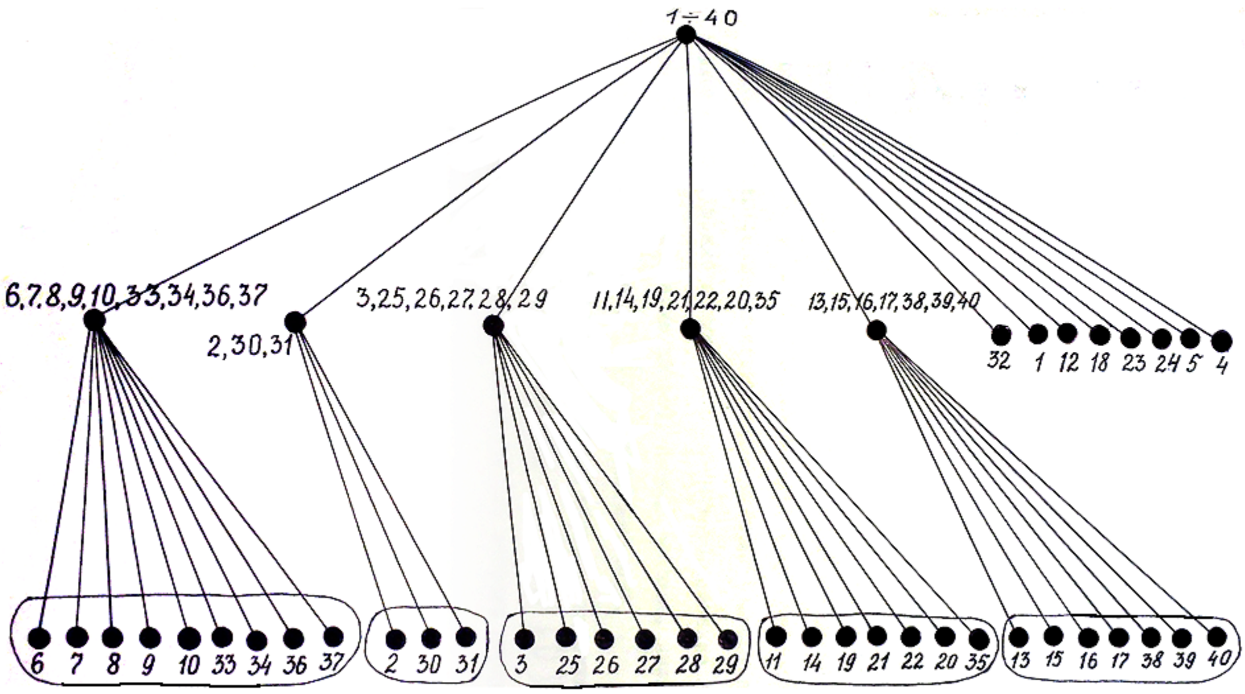

Рис. 5. Трехуровневая схема членения

Смежные классы конгруэнции $\theta(\rho)$, отличные от классов вида $J(Y)$, не имеют интерпретации в содержательных терминах процесса сборки. Однако их наибольшие элементы можно рассматривать как фрагменты изделия (собираемые множества деталей), состоящие из объединения наибольших элементов классов $J(Y)$, то есть «образы изделия» при различных последовательностях узловой сборки.

Выводы

1. Подмножества деталей изделия, которые могут быть собраны независимо, используются для генерации многочисленных проектных решений на этапе технологической подготовки производства. Достаточно казать, что они лежат в основе ключевых документов технологического проектирования: схемы сборки и схемы членения (разузлования).
2. Свойство независимой собираемости можно описать как некоторый оператор замыкания, действующий на булеане множества деталей. Образами этого оператора служат подмножества деталей, допускающие независимую сборку и только они. В работе они называются φ-замкнутыми. Совокупность всех таких элементов $B(X)/\phi$ представляет собой решетку относительно операций решеточного пересечения и объединения.

3. Решетка $B(X)/\phi$ представляет собой универсальную среду для синтеза различных проектных решений, основывающихся на независимой собираемости деталей. В частности, любая трехуровневая схема разбиения на сборочные единицы может быть описана как множество смежных классов $B(X)/\phi$ по отношению верхней конгруэнции $\theta(\rho)$, которое порождено разбиением атомов ρ.

Список литературы

1. Божко А.Н. Моделирование механических связей изделия// Электронное научно-техническое издание «Наука и образование» – 2011. – №3.
2. Божко А.Н. Моделирование механических связей изделия. Условия стягиваемости// Электронное научно-техническое издание «Наука и образование» – 2011. – №5.
3. Божко А. Н., Бетин Е. А. Анализ стягиваемости гиперграфов// Информационные технологии. – 2005. – №5 – с. 6-12.
4. Гретцер Г. Общая теория решеток. – М.: Мир, 1982.

electronic scientific and technical periodical
SCIENCE and EDUCATION
EL № FS 77 - 30569. №0421100025. ISSN 1994-0408

Theoretically-lattice model of machine and mechanical device decomposition

77-30569/324631

02, February 2012
Bojko A., N.

Bauman Moscow State Technical University
abozhko1@gmail.com

The theoretically-lattice model of product decomposition was discussed in this article; it allowed to synthesize all structurally implemented three-level schemes of machine and mechanical appliance decomposition. It was shown that the property of an independent assembly, that any candidate for the assembly unit should have, could be described as the effect of a closure operator defined on the Boolean set of parts. This set of all closed subsets was a Boolean sublattice and the scheme of decomposition could be described as a set of residue classes of top congruence relation.

Publications with keywords: assembly, assembly sequence, lattice, closure operator, the scheme of decomposition, circuit assembly, congruence, binary relation, semilattice, equivalence
Publications with words: assembly, assembly sequence, lattice, closure operator, the scheme of decomposition, circuit assembly, congruence, binary relation, semilattice, equivalence

Reference

1. Bozhko A.N., Simulation of mechanical linkage products, Nauka i obrazovanie – Science and Education 3 (2011) < http://technomag.edu.ru/doc/168373.html>.
2. Bozhko A.N., Modeling of mechanical linkages. Contractibility conditions, Nauka i obrazovanie – Science and Education 5 (2011) <http://technomag.edu.ru/en/doc/182518.html >.
3. Bozhko A. N., Betin E. A., Analysis of the contractibility of hypergraphs, Informatsionnye tekhnologii 5 (2005) 6-12.
4. Gretser G., General lattice theory, Moscow, Mir, 1982.