

Понятие и свойства дискретного процесса функционирования системы

77-30569/292510

11, ноябрь 2011

Черненький В. М.

УДК 004.436.4

МГТУ им. Н.Э. Баумана

chernen@bmstu.ru

Система отличается многочисленными характеристиками, определяемыми аспектами ее описания. Нас будет интересовать сейчас и в дальнейшем анализ процесса ее функционирования. Под функционированием системы понимается процесс изменения ее состояния во времени. В статье рассматривается способ описания такого процесса с учетом того, что система имеет высокую размерность, разделяется на множество объектов, различным способом связанных между собой, руководствуется сложными алгоритмами, описывающими переход из одного состояния в другое.

Всю совокупность параметров системы, определяющих процесс функционирования или участвующих в нем, назовем параметрическим множеством системы $Q = \{q_i\}_{i=1}^n$, где q_i – некоторый параметр. Каждый параметр q_i принимает множество значений, обозначаемое в дальнейшем как $\sigma(q_i)$.

Определим пространство состояний системы как Декартово произведение $S = \prod_{\forall i} \sigma(q_i)$. В этом пространстве каждый параметр выступает в роли координаты, а размерность пространства равна мощности множества Q . Элемент пространства S есть возможное состояние системы.

В дальнейшем нас будет интересовать процесс изменения состояний системы во времени. Примем за основу определение процесса, предложенное в работе [1].

Процесс Z есть четверка:

$$Z = \langle S, T, F, \alpha \rangle \quad (1)$$

где:

S - пространство состояний системы, определенное ранее;

T - множество моментов времени изменения состояний системы;

F – график процесса, определяемый как отображение $T \rightarrow S$, причем это отображение должно быть функциональным (однозначным);

α - отношение линейного порядка на T .

Если множество T задано как упорядоченное, то в определении процесса α может быть опущено.

В общем случае множества T и S могут быть как дискретными, так и непрерывными.

Интервал времени $[t_n, t_k]$, где $t_n = \min\{T\}$, $t_k = \max\{T\}$, назовем интервалом определения процесса.

Поскольку пространство S координатного типа, то в случае необходимости подчеркнуть систему координат Q , на которой оно определено, будем обозначать его также S_Q .

В этих обозначениях, если множество T задано, как упорядоченное, а пространство S определено на множестве параметров Q , определить процесс можно как: $Z = \langle S_Q, T, F \rangle$.

Кортеж $\langle \tilde{X}_1 \dots \tilde{X}_i \dots \tilde{X}_n \rangle$, где $\tilde{X}_i$ - значения элементов множества X , будем обозначать как $\langle \dots \tilde{X} \dots \rangle_X$.

Определим фазовое пространство Φ процесса Z как $\Phi = T \times S$.

Тогда график F есть подмножество Φ .

Если $f \in F$, то $f = \langle t, \langle \dots \tilde{q} \dots \rangle_Q \rangle$, где $t \in T$.

Если $Q_1 \subseteq Q$, то определим понятие проекции f на пространство S_{Q_1} как:

$Pr_{S_{Q_1}} f = \langle t, \langle \dots \tilde{q} \dots \rangle_{Q_1} \rangle$. Проекцией f на T является t .

Пусть процесс Z задан на интервале $[t_n, t_k]$. Введем понятие подпроцесса Z^i как плотное во времени подмножество процесса Z на интервале $[t_i, t_j]$ при условии, что $[t_i, t_j] \subseteq [t_n, t_k]$. Плотность по времени означает, что на интервале $[t_i, t_j]$ нет ни одной точки, принадлежащей T и не относящейся к подпроцессу Z^i . Этот интервал назовем интервалом определения подпроцесса. Понятие подпроцесса позволяет рассматривать процесс в виде последовательности подпроцессов и производить операции разделения и объединения фрагментов процесса.

Рассмотрим ряд операций над процессами, описываемых с помощью введенных выше понятий.

Операция свертки процесса

Пусть задан процесс $Z = \langle S, T, F, \alpha \rangle$

Процесс $Z_1 = \langle S_1, T_1, F_1, \alpha_1 \rangle$ является сверткой процесса Z , если он получен в результате следующих преобразований:

а) произведено полное разбиение интервала определения процесса Z на n непересекающихся подинтервалов $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, где $j=1..n$, причем $\tau_1=t_H$, $\tau_{n+1}=t_K$. В результате получим разбиение процесса Z на n подпроцессов Z^j ($j=1..n$);

б) поставим в соответствие каждому подпроцессу Z^j одно значение состояния S_1^j из множества S_1 и одно значение времени β^j из интервала $[\tau_j, \tau_{j+1}]$. В результате получим дискретное множество $T_1 = \{\beta^j\}_{j=1}^n$, график $F_1 = \{\langle \beta^j, S_1^j \rangle\}_{j=1}^n$, отношение $\alpha_1 \subset \alpha$.

Таким образом, получим новый процесс Z_1 , который и называется сверткой процесса Z . Очевидно, процесс Z_1 дискретен во времени. Никаких ограничений на характер пространства состояний S_1 не накладывается. Однако на практике при проведении операции свертки пространство S_1 , как правило, оказывается значительно меньшей мощности, чем исходное пространство S .

Рассмотрим для примера процесс решения задачи с использованием CPU и жесткого диска HD (рис. 1).

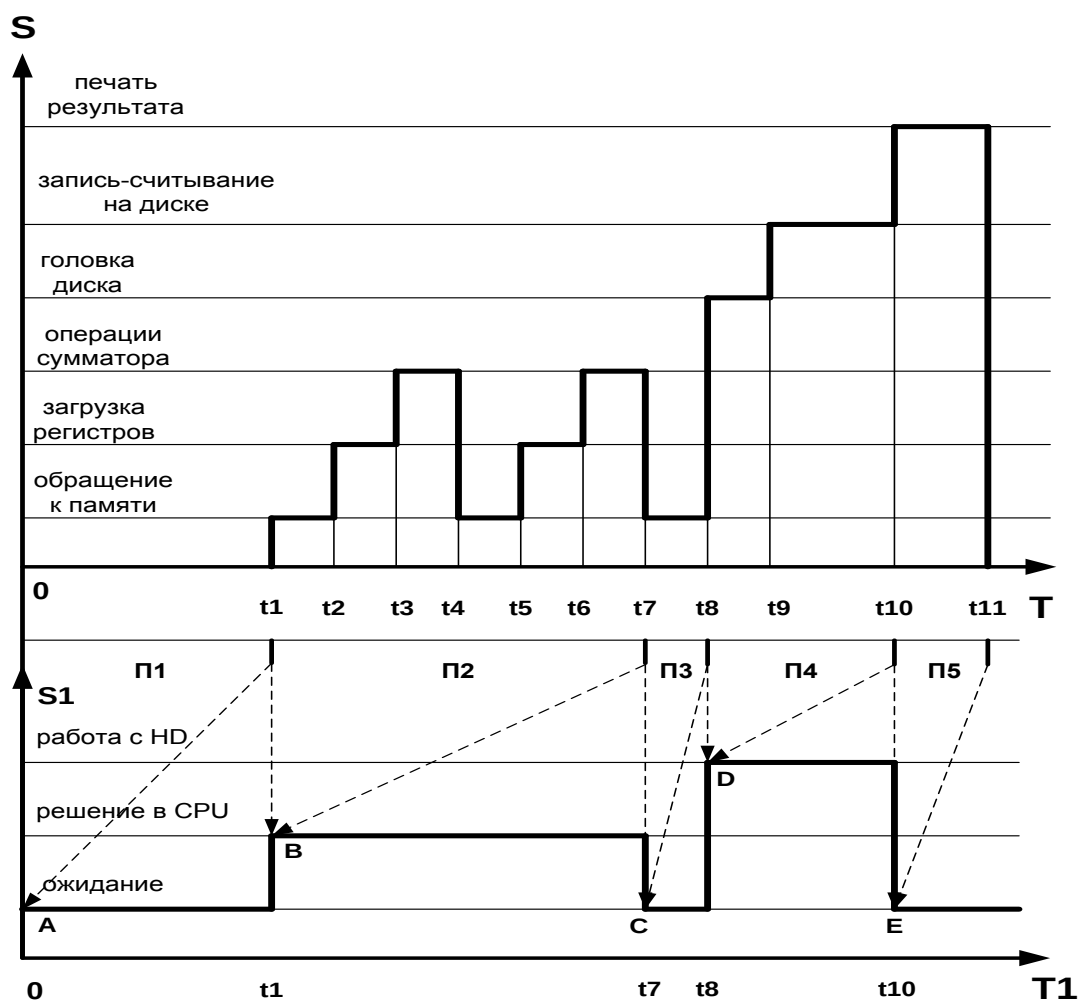


Рисунок 1. Пример операции свертки процесса

Пусть исходный процесс Z описан в пространстве S , имеющем следующие состояния: {обращение к памяти, загрузка регистров, операции сумматора, головка диска, запись-считывание на диске, печать результата}. Множество моментов времени изменения состояния $T=\{0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}\}$.

Допустим, что нам необходимо построить процесс Z_1 , отражающий лишь длительность занятия задачей CPU и жесткого диска HD. Для этого зададим новое пространство S_1 , имеющее следующие состояния: {ожидание, решение в CPU, работа с HD}. Разобьем интервал определения процесса Z на подинтервалы: $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5$. Это разбиение определяет также соответствующие подпроцессы процесса Z . Выполним отображение подпроцессов процесса Z на фазовую плоскость процесса Z_1 : Π_1 отображается в точку A , Π_2 – в точку B , Π_3 – в точку C , Π_4 – в точку D , Π_5 – в точку E . В результате получим процесс Z_1 с пространством состояний S_1 , множеством моментов времени изменения состояния $T_1=\{0, t_1, t_7, t_8, t_{10}\}$. График этого процесса приведен на этом же рисунке.

Как видно из примера, операция свертки порождает новый процесс, дискретный во времени, поскольку подпроцессы процесса Z , имеющие конечную длительность, отображаются лишь на одну точку фазовой плоскости нового процесса Z_1 .

Операция свертки относится к классу операций анализа.

Операция развертки

Операция развертки обратна по отношению к операции свертки: процесс Z является разверткой процесса Z_1 . При выполнении этой операции необходимо каждую точку $\langle \beta^j, S_1^j \rangle$ процесса Z_1 развернуть в подпроцесс Z^j .

Операция развертки относится к классу операций синтеза.

Операция проецирования

Процесс Z_1 является проекцией процесса Z на координатное пространство S_{Q_1} (обозначение $Z_1 = Pr_{S_{Q_1}} Z$), если $Q_1 \subseteq Q$ и процесс построен по следующей процедуре:

1) каждую точку графика F проецируем на пространство S_{Q_1} . В результате получаем множество $\bar{F}$. Мощность множества $\bar{F}$ равна мощности множества F ;

2) упорядочиваем множество $\bar{F}$ в соответствие с α . Результат действий 1) и 2) будем называть отображением процесса Z на пространство S_{Q_1} ;

3) вводим отношение эквивалентности на множестве $\bar{F}$ такое, что g подряд расположенных точек $f_{i+1}, \dots, f_{i+g}$ множества $\bar{F}$ ($f_{i+1} = \langle t^{i+1}, s_1^{i+1} \rangle, \dots, f_{i+g} = \langle t^{i+g}, s_1^{i+g} \rangle$) считаются эквивалентными, если $s_1^{i+1} = s_1^{i+2} = \dots = s_1^{i+g}$

g может принимать любые положительные целые значения, начиная от 1. Таким образом формируются классы эквивалентных значений K_{α} . При $g=1$ класс содержит одну единственную точку.

4) каждому классу эквивалентности K_{α} на $\bar{F}$ ставим в соответствие одну точку $f_{\alpha_{KB}} = \langle t_{\min}, s_{\alpha_{KB}} \rangle$ где $t_{\min} = \min_{\forall t_i \in K_{\alpha}} \{t_i\}$, $s_{\alpha_{KB}} = s_1^i = \dots$ для всего класса K_{α}

5) формируем множество F_1 из элементов $f_{\alpha_{KB}}$ по всем классам эквивалентности на $\bar{F}$, мощность F_1 равна количеству классов эквивалентности на $\bar{F}$.

6) проецируя F_1 на T , получим множество T_1 . Очевидно, что $T_1 \subseteq T$, сужение отношения α на T_1 обозначим α_1 .

В результате выполнения вышеуказанных операций получим процесс $Z_1 = Pr_{S_{Q_1}} Z$:

$$Z_1 = \langle S_{Q_1}, T_1, F_1, \alpha_1 \rangle.$$

Пользуясь операцией проецирования, можно переопределить понятие подпроцесса:

$$Z_{[t_1, t_2]} = \Pi p_{[t_1, t_2]} Z$$

Пример операции проецирования приведен на рис. 2. На нем показан исходный процесс Z , заданный в двухпараметрическом пространстве $S = \sigma(A) \times \sigma(B)$, где $\sigma(A) = \{g, h, k, m, n\}$, $\sigma(B) = \{a, b, c, d\}$. Ось времени не показана, однако значения моментов времени изменения состояний указаны в кружочках, обозначающих соответствующее состояние. Таким образом, как видно из рисунка, множество $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

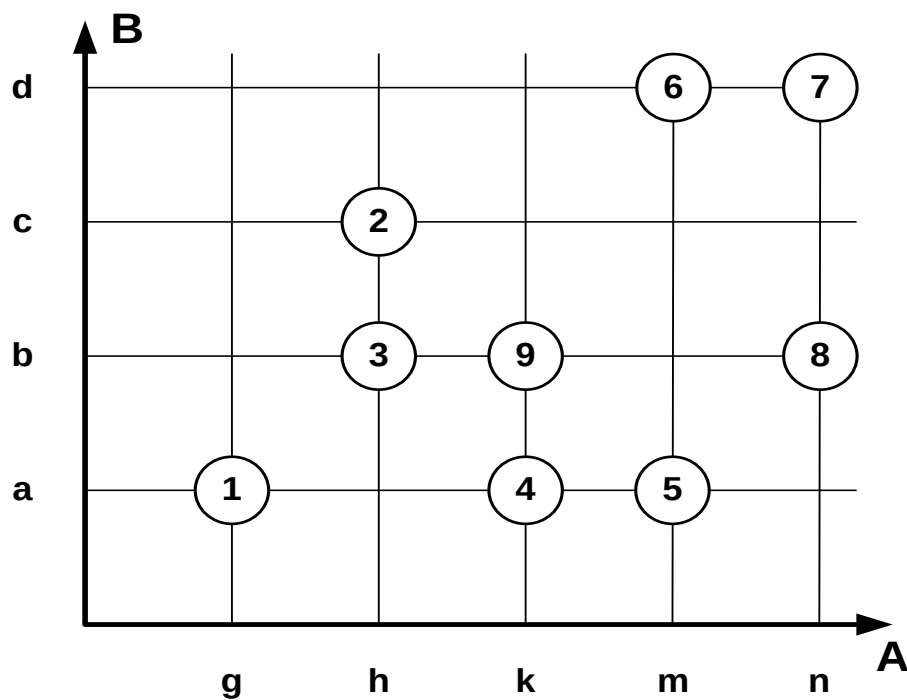


Рисунок 2. Процесс Z в двухпараметрическом пространстве

График процесса $F = \{ \langle 1, \langle g, a \rangle \rangle, \langle 2, \langle h, c \rangle \rangle, \langle 3, \langle h, b \rangle \rangle, \langle 4, \langle k, a \rangle \rangle, \langle 5, \langle m, a \rangle \rangle, \langle 6, \langle m, d \rangle \rangle, \langle 7, \langle n, d \rangle \rangle, \langle 8, \langle n, b \rangle \rangle, \langle 9, \langle k, b \rangle \rangle \}$

Построим процесс $Z_A = \Pi p_{S_A} Z$, являющийся проекцией процесса Z на пространство $\sigma(A)$, в соответствии с алгоритмом выполнения операции проецирования.

1) Строим график $\bar{F}_A = \{ \langle 1, g \rangle, \langle 2, h \rangle, \langle 3, h \rangle, \langle 4, k \rangle, \langle 5, m \rangle, \langle 6, m \rangle, \langle 7, n \rangle, \langle 8, n \rangle, \langle 9, k \rangle \}$

2) Множество $\bar{F}_A$ уже упорядочено по времени. Получаем отображение процесса Z на пространство $\sigma(A)$, показанное на рис. 3.

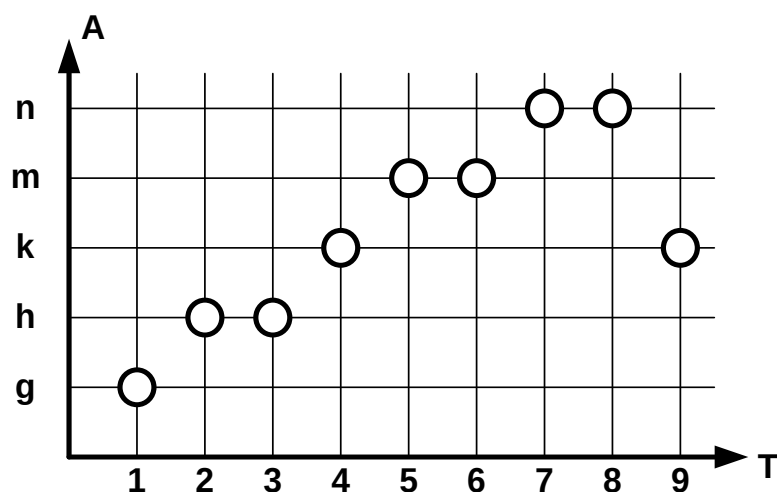


Рисунок 3. Отображение процесса Z на параметр A

3) На множестве $\overline{F}_A$ определяем классы эквивалентности: K_1 – точка 1, K_2 – точки 2,3, K_3 – точка 4, K_4 – точки 5,6, K_5 – точки 7,8, K_6 – точка 9.

4) Ставим в соответствие классу K_2 точку $\langle 2, h \rangle$, классу K_4 точку $\langle 5, m \rangle$, классу K_5 точку $\langle 7, n \rangle$.

5) Формируем график $F_A = \{ \langle 1, g \rangle, \langle 2, h \rangle, \langle 4, k \rangle, \langle 5, m \rangle, \langle 7, n \rangle, \langle 9, k \rangle \}$

6) Формируем множество времен изменения состояний $T_A = \langle 1, 2, 4, 5, 7, 9 \rangle$

Полученный в результате проведенных операций процесс $Z_A = \Pi p_{S_A} Z$ показан на рис. 4.

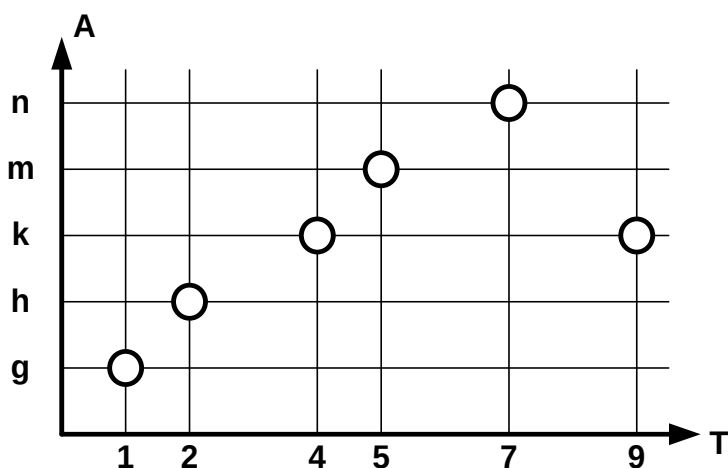


Рисунок 4. Процесс Z_A – проекция процесса Z на параметр A

Аналогично строится и проекция процесса Z на параметр B (пространство, состоящее из единственного параметра). Процесс Z_B показан на рис. 5.

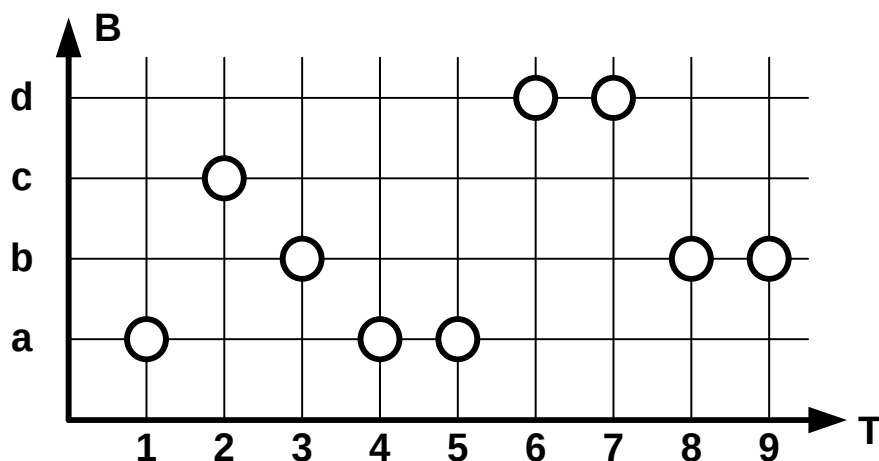


Рисунок 5. Отображение процесса Z на параметр B

После выполнения пункта 5. алгоритма получим результат, представленный на рис. 6.

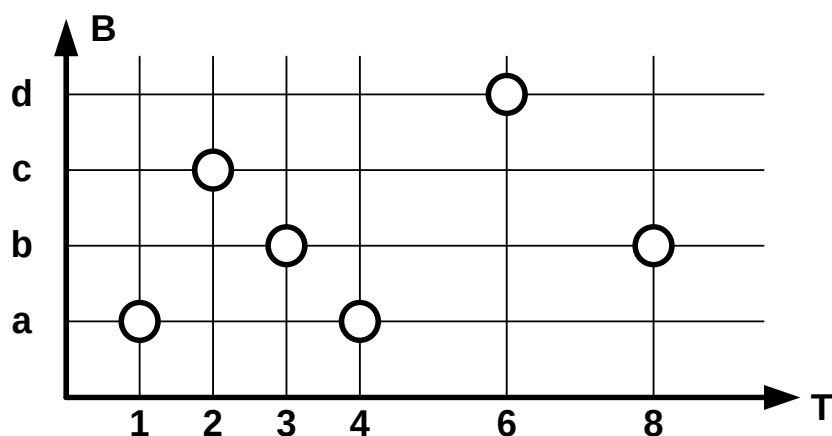


Рисунок 6. Процесс Z_B - проекция процесса Z на параметр B

Операция объединения

Пространство S_Q называется склейкой пространств S_{Q_1} и S_{Q_2} , если $Q=Q_1 \cup Q_2$. Интерес представляет случай непустого пересечения Q_1 и Q_2 , когда пространства S_{Q_1} и S_{Q_2} имеют общую область.

Пусть кортеж s_1 принадлежит пространству S_{Q_1} , кортеж s_2 принадлежит пространству S_{Q_2} . Обозначим значения параметра q из кортежа s_1 как $\tilde{q}^{s_1}$, а значение параметра q из кортежа s_2 как $\tilde{q}^{s_2}$.

Тогда $s_1 = \langle \dots \tilde{q}_{Q_1}^{s_1} \dots \rangle$, $s_2 = \langle \dots \tilde{q}_{Q_2}^{s_2} \dots \rangle$.

Кортеж s является левой склейкой кортежей s_1 и s_2 , когда:

$$s_l = \langle \dots \tilde{q}_{Q_1}^{s_1} \dots \tilde{q}_{Q_1 Q_2}^{s_2} \dots \rangle.$$

Правая склейка определяется как:

$$s_p = \langle \dots \tilde{q}_{Q_1 Q_2}^{s_1} \dots \tilde{q}_{Q_2}^{s_2} \dots \rangle.$$

Если $s_l = s_p$, то склейка называется функциональной.

Пусть заданы процессы $Z_1 = \langle S_{Q_1}, T_1, F_1, \alpha_1 \rangle$ и $Z_2 = \langle S_{Q_2}, T_2, F_2, \alpha_2 \rangle$. Процесс $Z = \langle S_Q, T, F, \alpha \rangle$ является объединением процессов Z_1 и Z_2 (обозначение $Z = Z_1 \cup Z_2$), если:

- S_Q является склейкой пространств S_{Q_1} и S_{Q_2}
- $T = T_1 \cup T_2$
- для каждого $t \in T$ строится: $f_t = \langle t, s_t \rangle$, где s_t – склейка кортежей s_t^1 ($s_t^1 \in S_{Q_1}$) и s_t^2 ($s_t^2 \in S_{Q_2}$), кортежи s_t^1 и s_t^2 принадлежат соответственно графикам F_1 и F_2 для значения t

- все склейки кортежей s_t^1 и s_t^2 для всех $t \in T$ являются функциональными
- совокупность f_t для всех $t \in T$ формирует график F
- отношение α строится как транзитивное замыкание на $\alpha_1 \cup \alpha_2$.

Процессы Z_1 и Z_2 , допускающие операцию объединения, называются согласованными.

Можно доказать ряд утверждений

Утверждение 1.

Два процесса Z_1 с пространством состояний S_{Q_1} и Z_2 с пространством состояний S_{Q_2} согласованы, если $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Утверждение 2.

Пусть задан процесс Z_1 с пространством состояний S_{Q_1} и Z_2 с пространством состояний S_{Q_2} . Пусть в некоторый момент времени t состояние Z_1 равно $s_1 \in S_{Q_1}$, а состояние Z_2 равно $s_2 \in S_{Q_2}$. В общем случае будем полагать, что $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$. Обозначим $Q_3 = Q_1 \cap Q_2$.

Если для всех моментов времени $t \in T$ значения $\langle \dots \tilde{q}_{Q_3}^{s_1} \dots \rangle = \langle \dots \tilde{q}_{Q_3}^{s_2} \dots \rangle$, то

процессы Z_1 и Z_2 –согласованы.

Утверждение 3.

Если $Z_1 = \Pi p_{S_{Q_1}} Z$ и $Z_2 = \Pi p_{S_{Q_2}} Z$, то процессы Z_1 и Z_2 согласованы.

Утверждение 4.

Пусть заданы процесс Z_1 , определенный на интервале $[t_H^1, t_K^1]$, и Z_2 , определенный на интервале $[t_H^2, t_K^2]$.

Если $[t_H^1, t_K^1] \cap [t_H^2, t_K^2] = \emptyset$, то процессы Z_1 и Z_2 согласованы.

Сформулированные выше утверждения позволяют выработать практически важные рекомендации по управлению процессами с тем, чтобы осуществить их объединение.

Литература

1. Бусленко Н.П., Калашников В.В., Коваленко И.Н. Лекции по теории сложных систем. - М.: Сов.Радио, 1973. - 438 с.
2. Черненький В.М. Процессно - ориентированная концепция системного моделирования АСУ: Дис...док. тех. наук.-М.,2000.-350с.

Concept and properties of discrete process of system functioning 77-30569/292510

11, November 2011

Chernen'kii V.M.

Bauman Moscow State Technical University

chernen@bmstu.ru

Article is devoted to analysis of process representation form as a description of changing the state of any system in time. The description of process was included; every component such as parametric set of a system, state space, temporary set, diagram and phase space were described. Concepts of subspace, subprocess, projection of a point in space onto a subspace were introduced. Operations of convolution, deconvolution, projection and union were defined over these processes. These operations were analyzed; their properties and realization conditions were defined.

Publications with keywords: [system functioning](#), [system parameters](#), [operations over processes](#), [union of processes](#), [state space](#), [process](#)

Publications with words: [system functioning](#), [system parameters](#), [operations over processes](#), [union of processes](#), [state space](#), [process](#)

Reference

1. Buslenko N.P., Kalashnikov V.V., Kovalenko I.N., Lectures on the theory of complex systems, Moscow, Sov.Radio, 1973, 438 p.
2. Chernen'kii V.M., The process - oriented concept of system modeling ACS (Dr.Sci.Tech. dissertation), Moscow, 2000, 299 p.