у е а е о ð ı ı ı а ı а о ÷ ı ı - о а о ı е ÷ а n е ı а е ç а а ı е а

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 30569. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

Стабилизация неминимально фазовых аффинных систем с использованием линеаризации по части переменных

77-30569/255087

 # 10, октябрь 2011

Ткачев С.Б.

УДК 517.977

МГТУ им. Н.Э. Баумана

mathmod@bmstu.ru

1. Введение

В теории нелинейных динамических систем с управлением известен ряд важных теоретических результатов, позволяющих для достаточно широкого класса систем решать задачи стабилизации положений равновесия. Основное внимание при этом уделялось аффинным системам — нелинейным системам, линейным по управлению. Среди таких систем были выделены специальные виды, для которых разработаны методы решения задачи стабилизации и с использованием дифференциально-геометрического подхода получены условия эквивалентности аффинных систем и систем специального вида.

Среди систем специального вида выделены канонические и квазиканонические виды стационарных аффинных систем со скалярным и векторным управлением [1–10]. Для аффинных систем, преобразуемых к регулярному каноническому виду [1–6], решение задачи стабилизации положения равновесия известно и один из подходов заключается в преобразовании исходной системы в линейную управляемую систему с помощью нелинейной замены переменных и введения нового управления.

Условия приводимости аффинной системы к каноническому виду выполнены не всегда, и довольно часто система может быть преобразована только к квазиканоническому виду [4] (А.П. Крищенко).

Отметим, что функцию, определяющую преобразование аффинной системы к квазиканоническому виду, часто удобно рассматривать как выход системы. Для стационарных аффинных систем с выходом введены нормальные формы [11–13] (Byrnes C., Isidori A.).

Для решения задачи стабилизации положения равновесия стационарной аффинной системы, преобразованной к квазиканоническому виду или нормальной форме, существенным является наличие свойства минимальной фазовости [11, 12]. Для минимально фазовых систем известно решение задачи стабилизации положения равновесия статическими и динамическими обратными связями по состоянию [11–17].

В случае, если аффинная система не является минимально фазовой, проблема стабилизации ее положения равновесия оказалась достаточно сложной и подходы к ее решению известны в частных случаях [18–24].

Одним из методов, позволяющих найти стабилизирующую обратную связь для неминимально фазовой системы, является метод виртуальных выходов [25–28]. Применение этого метода связана с анализом нелинейной подсистемы, выделяющейся после преобразования исходной системы к регулярному квазиканоническому виду и линеаризации системы квазиканонического вида обратной связью по части переменных.

Анализ этой подсистемы не всегда приводит к нахождению виртуального выхода с требуемыми свойствами именно из-за существенного влияния нелинейности. Одним из возможных подходов — использование для синтеза стабилизирующего управления линеаризации подсистемы, отвечающих за нулевую динамику.

Исследуем случай, когда соответствующая нелнейная подсистема допускает нетривиальную линеаризацию и опишем метод поиска такого виртуального выхода, которому соответствует нормальная форма с асимптотически устойчивой нулевой динамикой.

В отличие от общего случая поиска виртуального выхода через специально подбираемое виртуальное управление, предлагаемый метод не требует подбора специальных функций, а базируется только на использовании вычислительных процедур.

2. Квазиканонический вид и нормальная форма аффинной системы

Рассмотрим гладкую стационарную аффинную систему со скалярным управлением

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = A(x) + B(x)u, x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^1,\\
&A(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))^{\text{т}},\ B(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))^{\text{т}},\\
&a_i(x), b_i(x) \in C^\infty(\Omega),\ i = \overline{1, n},\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^n,\\
&\dot{(\,\cdot\,)} = \mathrm{d}(\,\cdot\,)/\mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{1}$$

где t — независимое переменное.

Пусть система (1) в некоторой окрестности U^0 точки x^0 преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
&\dot{z}_1 = z_2, \dots, \dot{z}_{\rho-1} = z_\rho,\\
&\dot{z}_\rho = f(z, \overline{\eta}) + g(z, \overline{\eta})u,\\
&\dot{\eta} = q(z, \overline{\eta}) + w(z, \overline{\eta})u,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $z = (z_1, \dots, z_\rho)^{\text{т}}$, $\overline{\eta} = (\overline{\eta}_1, \dots, \overline{\eta}_m)^{\text{т}}$, $\overline{\eta} \in \mathbb{R}^m$, $\rho + m = n$, и $(z, \overline{\eta}) = \Phi(x)$, — соответствующая локальная гладкая невырожденная замена переменных.

Указанный вид называют [4] квазиканоническим видом системы (1). Если коэффициент $g(z, \overline{\eta})$ при управлении в точке $(z^0, \overline{\eta}^0) = \Phi(x^0)$ отличен от нуля, то квазиканонический вид называют регулярным в этой точке. В этом случае в силу гладкости коэффициент при управлении будет отличен от нуля и в некоторой окрестности указанной точки.

Отметим, что при $\rho = n$ система (2) содержит управление только в последнем уравнении и такой вид называют каноническим.

Условия, при которых система (1) локально преобразуется к регулярному квазиканоническому виду (2), удобно записать, используя дифференциально-геометрический подход, при котором гладкой аффинной системе (1) на Ω взаимно-однозначно соответствуют гладкие векторные поля

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad B = \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3}$$

Будем использовать обозначение $L_X \lambda(x)$ для производной Ли функции $\lambda(x)$ по векторному полю X.

Пусть существует достаточно гладкая функция $\phi(x)$, удовлетворяющая в некоторой окрестности точки x^0 системе нелинейных уравнений в частных производных

$$L_B L_A^i \phi(x) = 0,\ i = \overline{0, \rho - 2} \tag{4}$$

для некоторого числа ρ, где $\rho \leq n$, а соответствующая ей функция $\gamma(x) = L_B L_A^{\rho-1}\phi(x)$ в точке x^0 удовлетворяет условию

$$\gamma(x^0) = L_B L_A^{\rho-1}\phi(x^0) \neq 0. \tag{5}$$

Приведенные условия (4)–(5) эквивалентны тому, что в окрестности точки x^0 производные от функции $\phi(x)$ в силу системы (1) до порядка $\rho-1$ не содержат управление, а в производную порядка ρ управление входит с коэффициентом, отличным от нуля в точке x^0, и, в силу гладкости, в некоторой окрестности точки x^0.

Из условия $\gamma(x^0) \neq 0$ вытекает, что $B(x^0) \neq 0$. Из условия (4) следует, что функции $L_A^i \phi(x)$, $i = \overline{0, \rho - 2}$, являются первыми интегралами векторного поля B. Выполнение условия (5) гарантирует локальную функциональную независимость функций $z_i = L_A^{i-1}\phi(x)$, $i = \overline{1, \rho}$.

К множеству функций $z_i = L_A^{i-1}\phi(x)$, $i = \overline{1, \rho}$, можно добавить еще $m = n - \rho$ функций $\overline{\eta}_k = \overline{\eta}_k(x)$ так, чтобы в окрестности точки x^0 получить невырожденную замену переменных $(z, \overline{\eta}) = \Phi(x)$, где $z = (z_1, \ldots, z_\rho)^{\text{т}}$, $\overline{\eta} = (\overline{\eta}_1, \ldots, \overline{\eta}_m)^{\text{т}}$, $\rho + m = n$. В новых переменных система (1) запишется в виде (2). Поскольку из $L_B L_A^{\rho-1}\phi(x^0) \neq 0$ следует, что $g(\Phi(x^0)) \neq 0$, квазиканонический вид будет регулярным в точке $\Phi(x^0)$.

Заметим, для системы (1) в общем случае могут существовать различные функции $\phi(x)$, удовлетворяющие условиям (4), которым могут соответствовать различные значения ρ от $\rho = 1$ до $\rho = \rho_{max} \leq n$, где ρ_{max} есть максимальное значение ρ, при котором удовлетворяются условия (4), (5). При $\rho = 1$ имеем $L_B\phi(x) \neq 0$ и управление входит в первую производную функции $\phi(x)$ в силу системы (1).

Вместо системы (4) можно использовать эквавалентную систему уравнений в частных производных первого порядка [1, 6]

$$\operatorname{ad}_A^i B\phi(x) = 0, \quad i = 0, \ldots, \rho - 2,$$

где $\mathrm{ad}_A B = [A, B]$ — коммутатор векторных полей A и B,

$$\mathrm{ad}_A^i B = [A, \mathrm{ad}_A^{i-1} B], \quad \mathrm{ad}_A^0 B = B.$$

Квазиканонический вид (2) можно упростить за счет выбора специальной замены переменных. Поскольку $B(x^0) \neq 0$, в некоторой окрестности точки x^0 существуют $n-1$ функционально независимых первых интегралов векторного поля B, из которых для построения замены использовались только $\rho - 1$ функции $z_i = L_A^{i-1}\phi(x)$, $i = \overline{1, \rho - 1}$. Добавляя к ним функцию $z_\rho = L_A^{\rho-1}\phi(x)$ и еще $m = n - \rho$ первых интегралов $\eta_k = \eta_k(x)$ векторного поля B, в окрестности точки x^0 можно получить такую невырожденную замену переменных $(z, \eta) = \Phi(x)$, что в новых переменных система (1) запишется в виде

$$\begin{aligned} &\dot{z}_1 = z_2, \ldots, \dot{z}_{\rho-1} = z_\rho, \\ &\dot{z}_\rho = f(z, \eta) + g(z, \eta)u, \\ &\dot{\eta} = q(z, \eta). \end{aligned} \tag{6}$$

Такой специальный квазиканонический вид системы (1) более удобен для анализа.

Преобразование системы (1) к некоторому квазиканоническому виду всегда существует [4], но методы стабилизации положения равновесия для таких систем разработаны только в частных случаях.

Приведение аффинной системы к квазиканоническому виду (2) (или (6)) основано на поиске специальной функции $\phi(x)$, с использованием которой строится замена по части переменных z. Существует подход к преобразованию аффинных систем к специальному виду, используемый в случае, если такая функция уже задана. Эту функцию называют выходом аффинной системы (1) и с ней связывают цель управления — стабилизацию заданного значения выхода или отслеживание заданного изменения выхода как функции времени [13].

В качестве выхода может быть выбрана и произвольная досточно гладкая функция состояния системы — *виртуальный выход*.

Пусть функция $y = \phi(x)$, где $\phi(x) \in C^\infty(\Omega)$, — (виртуальный) выход аффинной системы (1). Предположим, что существует такое $\rho \geq 1$, что, во-первых, выполнены условия (4) и, во-вторых,

$$L_B L_A^{\rho-1}\phi(x^0) \neq 0. \tag{7}$$

Такое число ρ называют относительной степенью аффинной системы (1) с (виртуальным) выходом $y = \phi(x)$ в точке x^0 [13].

Если относительная степень $\rho = 1$ в точке x^0, то $L_B\phi(x^0) \neq 0$. Если $\rho > 1$, то первое условие означает, что функция $\phi(x)$ в окрестности точки x^0 является решением системы уравнений в частных производных (4), причем выполнено условие (7). Приведенные условия есть условия преобразования аффинной системы (1) к регулярному квазаканоническому виду (2) с индексом приводимости ρ.

Относительная степень в точке x^0 может быть неопределена, если не существует такое $\rho \leq n$, что выполнены условия (4) и (7).

Предположим, что для системы (1) задан выход

$$y = \phi(x), \tag{8}$$

относительная степень которого в точке x^0 равна ρ. Тогда в силу выполнения условия регулярности (7) система (1) может быть локально преобразована к специальному квазиканоническому виду (6), с которым связана система

$$\begin{aligned}
&\dot{z}_1 = z_2, \ldots, \dot{z}_{\rho-1} = z_\rho,\\
&\dot{z}_\rho = f(z,\eta) + g(z,\eta)u,\\
&\dot{\eta} = q(z,\eta),\\
&y = z_1.
\end{aligned} \tag{9}$$

Систему (9) называют [11, 13] нормальной формой системы (1) с выходом (8).

В случае, если замена переменных $(z,\eta) = \Phi(x)$, задающая преобразование системы (1) с выходом (8) к нормальной форме (9), определена на всем $\mathbb{R}^n$, и коэффициент при управлении в нормальной форме (9) отличен от нуля при всех $(z,\eta) \in \mathbb{R}^n$, то такую нормальную форму называют глобально определенной.

В некоторых случаях нахождение таких переменных η, что управление не входит в последние уравнения нормальной формы, является трудоёмким или невозможно в аналитическом виде. Для практических целей часто бывает достаточно записать систему в виде

$$\begin{aligned}
&\dot{z}_1 = z_2, \ldots, \dot{z}_{\rho-1} = z_\rho,\\
&\dot{z}_\rho = f(z,\eta) + g(z,\eta)u,\\
&\dot{\eta} = q(z,\eta) + w(z,\eta)u,\\
&y = z_1.
\end{aligned} \tag{10}$$

В этом случае также говорят, что система записана в нормальной форме [13].

Таким образом, задача преобразования аффинной системы (1) с заданным выходом (8) к нормальной форме (9) является частным случаем задачи о преобразовании аффинной системы к квазиканоническому виду, поскольку в последней задаче требуется найти функцию ϕ, вводящую новые переменные z.

Отметим, что при поиске преобразования к квазиканоническому виду обычно ищут такую функцию ϕ, которой соответствует максимальное значение ρ, а при преобразовании к нормальной форме выясняют, определена ли относительная степень системы с заданным выходом в исследуемой точке и какова эта степень.

Любую аффинную систему со скалярным управлением можно рассматривать как систему, записанную в некоторой нормальной форме в окрестности точки x^0, где в качестве виртуального выхода выступает такая переменная состояния, что соответствующее этой переменной уравнение системы (производная виртуального выхода в силу системы) содержит управление и коэффициент при управлении отличен от нуля в точке x^0. Система с таким виртуальным выходом имеет в точке x^0 относительную степень 1.

В дальнейшем будем для системы (1) с некоторым виртуальным выходом использовать терминологию теории нормальной формы.

Поскольку для фиксированной аффинной системы могут рассматриваться несколько виртуальных выходов, удобнее говорить не об относительной степени системы с заданным выходом в некоторой точке, а об относительной степени фиксированного выхода системы.

3. Стабилизация минимально фазовой системы

Не нарушая общности, рассмотрим задачу стабилизации положения равновесия $x^0 = 0$ системы (1). Пусть для нее найден виртуальный выход $y = \phi(x)$, $\phi(0) = 0$, относительная степень которого в точке $x^0 = 0$ равна ρ и $\rho < n$. Тогда в окрестности этой точки существует такая гладкая невырожденная замена переменных

$$z = \Phi(x),\ \eta = \Psi(x), \quad z \in \mathbb{R}^\rho,\ \eta \in \mathbb{R}^{n-\rho}, \tag{11}$$

где $\Phi(x) = (\phi(x), L_A\phi(x), \ldots, L_A^{\rho-1}\phi(x))^{\text{т}}$, $\Phi(0) = 0$, $\Psi(0) = 0$, что в переменных z, η аффинная система запишется в нормальной форме (9).

При решении задачи стабилизации нулевого положения системы, записанной в нормальной форме, важными являются свойства подсистемы относительно переменных η в (9) при $z \equiv 0$. Систему уравнений

$$\dot{\eta} = q(0, \eta) \tag{12}$$

называют уравнениями нулевой динамики (нулевой динамикой). Если ее положение равновесия $\eta = 0$ асимптотически устойчиво, то аффинную систему (1) с виртуальным выходом $y = \phi(x)$ называют минимально фазовой (в точке $x = 0$) [13].

Введенное для аффинных стационарных систем со скалярным управлением и скалярным выходом понятие нулевой динамики [30] аналогично указанному свойству для линейных систем [33].

Относительная степень выхода [31, 32] аффинной системы в случае линейной системы со скалярным управлением и выходом равна разности степеней знаменателя и числителя передаточной функции системы.

Пусть в положении равновесия $x^0 = 0$ система (1) является минимально фазовой. Выбрем для системы (1) управление в виде

$$u = \left(-L_A^{\rho}\phi(x) - \sum_{k=0}^{\rho-1} c_k L_A^k \phi(x)\right) \Big/ L_B L_A^{\rho-1}\phi(x)\,, \tag{13}$$

где коэффициенты c_k, $k = 0, \ldots, \rho - 1$, выбраны так, что корни уравнения $\lambda^{\rho} + \sum_{k=0}^{\rho-1} c_k \lambda^k = 0$ имеют отрицательные действительные части.

В переменных z, η управление (13) имеет вид

$$u = \left(-f(z, \eta) - \sum_{k=0}^{\rho-1} c_k z_{k+1}\right) / g(z, \eta)\,. \tag{14}$$

Тогда система (9) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az, \\ \dot{\eta} &= q(z, \eta), \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \ldots & -c_{\rho-2} & -c_{\rho-1} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

причем матрица A имеет собственные числа со строго отрицательной действительной частью.

Управление (14) стабилизирует систему (9) по части переменных z. При этом стабилизируемость по переменным η зависит от свойств нулевой динамики. При асимптотически устойчивой нулевой динамике положение равновесия $(z, \eta) = (0, 0)$ является асимтотически устойчивым [13].

Действительно, система (9), замкнутая управлением (14), имеет специальный каскадный вид (15). Условия асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия таких систем задает следующая теорема.

Теорема 1. [13, 29] Система (15) асимптотически устойчива в нулевом положении равновесия $(z, \eta) = (0, 0)$, если функция $q(z, \eta)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки $(z, \eta) = (0, 0)$, $q(0, 0) = 0$, линейная система

$$\dot{z} = Az, \tag{17}$$

асимптотически устойчива, а система

$$\dot{\eta} = q(0, \eta), \tag{18}$$

асимптотически устойчива в точке $\eta = 0$.

В случае, если нулевая динамика (18) не является асимптотически устойчивой, проблема стабилизации может быть решена в том случае, если будет найден такой новый (виртуальный) выход системы (1), что соответствующая ему нулевая динамика будет асимптотически устойчива. Тогда для новой нормальной формы, соответствующей этому выходу, можно построить стабилизирующую обратную связь вида (14) и затем переписать ее в исходные переменные.

4. Метод виртуальных выходов

Для аффинной системы (1), считая $x^0 = 0$, фиксируем некоторый выход $y = h(x)$, $h(0) = 0$, при котором относительная степень системы (1) в точке $x = 0$ равна 1. Запишем систему (1) с этим выходом в соответствующей нормальной форме

$$\dot{z} = f(z, \eta) + g(z, \eta)u, \tag{19}$$

$$\dot{\eta} = q(z, \eta), \tag{20}$$

$$y = z.$$

В (19)–(20) $z \in \mathbb{R}^1$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $f(0,0) = 0$, $g(0,0) \neq 0$, $q(0,0) = 0$, $z = h(x)$, $\eta = \Psi(x)$, $\Psi(0) = 0$.

Теорема 2. [25] Для того, чтобы аффинная система (1) имела виртуальный выход с относительной степенью $\rho = 1$ в точке $x = 0$ и асимптотически устойчивой нулевой динамикой, необходимо и достаточно, чтобы положение равновесия $\eta = 0$ нелинейной системы

$$\dot{\eta} = q(v, \eta) \tag{21}$$

с управлением v было стабилизируемо гладкой обратной связью $v = v(\eta)$. Каждой такой стабилизирующей обратной связи в системе (21) соответствует виртуальный выход $\phi = z - v(\eta) = h(x) - v(\Psi(x))$ аффинной системы (1) относительной степени $\rho = 1$ в точке $x = 0$ и асимптотически устойчивая нулевая динамика.

Для аффинной системы (1) фиксируем некоторый выход $y = h(x)$, при котором относительная степень системы (1) в точке $x = 0$ равна 2. Запишем систему (1) с указанным выходом в соответствующей нормальной форме

$$\dot{z}_1 = z_2, \ \dot{z}_2 = f(z, \eta) + g(z, \eta)u, \tag{22}$$

$$\dot{\eta} = q(z, \eta). \tag{23}$$

В (22)–(23) $z = (z_1, z_2)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^2$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-2})^{\text{т}} \in \mathbb{R}^{n-2}$, $f(0,0) = 0$, $g(0,0) \neq 0$, $q(0,0) = 0$, $z_1 = h(x)$, $z_2 = L_A h(x)$, $\eta = \Psi(x)$, $\Psi(0) = 0$.

Теорема 3. [25] Пусть система (1) с виртуальным выходом ϕ, $\phi\Big|_{x=0} = 0$, имеет в точке $x = 0$ относительную степень $\rho = 2$, а нулевая динамика асимптотически устойчива. Если в переменных z, η нормальной формы (22)–(23) $\phi'_{z_1}\Big|_{z=0,\eta=0} \neq 0$, то существуют функции $v_1(\eta)$, $v_2(\eta)$, $v_i(0) = 0$, $i = 1, 2$, стабилизирующее положение равновесия $\eta = 0$ системы

$$\dot{\eta} = q(v_1, v_2, \eta) \tag{24}$$

с управлениями v_1, v_2, причем

$$\frac{\mathrm{d}v_1(\eta)}{\mathrm{d}t}\Big|_{\dot{\eta} = q(v_1(\eta), v_2(\eta), \eta)} = v_2(\eta). \tag{25}$$

Теорема 4. [25] Пусть управления $v_1 = v_1(\eta)$, $v_2 = v_2(\eta)$ стабилизируют положение равновесия $\eta = 0$ системы (24) и удовлетворяет условию (25). Если система (22)–(23) с виртуальным выходом $\phi(z, \eta) = z_1 - v_1(\eta)$ имеет относительную степень $\rho = 2$ в точке $(z, \eta) = 0$, то нулевая динамика, соответствующая виртуальному выходу ϕ, асимптотически устойчива в точке $\eta = 0$.

5. Линеаризация нулевой динамики

Успешность применения метода виртуальных выходов к динамической системе с неустойчивой нулевой динамикой зависит от возможности построения виртуальной обратной связи $v(\eta)$, обеспечивающей асимптотическую стабилизацию положения равновесия системы $\dot{\eta} = q(v, \eta)$. Нахождение такого управления часто является достаточно сложной задачей.

Например, для системы

$$\begin{aligned} \dot{z} &= u, \\ \dot{\eta} &= \eta + \sin z + \eta z^2, \end{aligned} \tag{26}$$

положение равновесия уравнения нулевой динамики $\dot{\eta} = \eta$ неустойчиво, а поиск обратной связи $v(\eta)$, стабилизирующей положение равновесия стационарной системы

$$\dot{\eta} = \eta + \sin v + \eta v^2, \tag{27}$$

представляет существенную проблему.

Однако для линеаризованного в окрестности нулевого положения равновесия второго уравнения системы (26)

$$\dot{\eta} = \eta + z$$

задача построения стабилизирующей обратной связи легко решается. Например, при $v(\eta) = -(c_1 + 1)\eta$, $c_1 > 0$, получим $\dot{\eta} = -c_1\eta$, т. е. указанная обратная связь асимптотически стабилизирует нулевое положение равновесия.

Теорема 5. Если для системы $\dot{\eta} = q(z, \eta)$ положение равновесия $\eta = 0$ линеаризованной системы

$$\dot{\eta} = A\eta + Bz, \tag{28}$$

где $A = \left.\frac{\partial q(z,\eta)}{\partial \eta}\right|_{(z,\eta)=(0,0)}$, $B = \left.\frac{\partial q(z,\eta)}{\partial z}\right|_{(z,\eta)=(0,0)}$, с виртуальным управлением $z = v$ стабилизируется линейной обратной связью $v = -K\eta$, то каждой такой стабилизирующей обратной связи в системе (28) соответствует виртуальный выход $y = z + K\eta = h(x) + K\Psi(x)$ аффинной системы (1) относительной степени $\rho = 1$ в точке $x = 0$ и асимптотически устойчивая нулевая динамика.

◀ Пусть обратная связь $v = -K\eta$ стабилизирует положение равновесия $\eta = 0$ системы (28). Рассмотрим для аффинной системы (1) виртуальный выход, который в переменных нормальной формы (19)–(20) имеет вид $\phi(z,\eta) = z + K\eta$. В точке $(z,\eta) = (0,0)$ относительная степень этого виртуального выхода равна 1, так как

$$\dot{\phi}(z,\eta) = f(z,\eta) + Kq(z,\eta) + g(z,\eta)u$$

и в точке $(0,0)$ коэффициент при управлении $g(0,0) \neq 0$.

Соотношения

$$\begin{aligned} \overline{z} &= \phi(z,\eta) = z + K\eta, \\ \overline{\eta} &= \eta, \end{aligned} \tag{29}$$

задают глобальную замену переменных, в которых система (19)–(20) записывается в нормальной форме, соответствующей виртуальному выходу ϕ

$$\begin{aligned} \dot{\overline{z}} &= \overline{f}(\overline{z},\overline{\eta}) + \overline{g}(\overline{z},\overline{\eta})u, \\ \dot{\overline{\eta}} &= q(\overline{z} - K\overline{\eta},\overline{\eta}), \end{aligned} \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned} \overline{f}(\overline{z},\overline{\eta}) &= (f(z,\eta) + Kq(z,\eta))\,\big|_{z=\overline{z}-K\eta,\eta=\overline{\eta}}\ , \\ \overline{g}(\overline{z},\overline{\eta}) &= g(z,\eta)\,\big|_{z=\overline{z}-K\eta,\eta=\overline{\eta}}\ . \end{aligned}$$

Полагая в (30) $\overline{z} \equiv 0$, получаем систему уравнений нулевой динамики

$$\dot{\overline{\eta}} = q(-K\overline{\eta},\overline{\eta}). \tag{31}$$

Рассмотрим линеаризацию уравнений нулевой динамики в окрестности точки $\overline{\eta} = 0$. Получим

$$\dot{\overline{\eta}} = -\frac{\partial q(\tau,\overline{\eta})}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0,\overline{\eta}=0} K\overline{\eta} + \frac{\partial q(\tau,\overline{\eta})}{\partial \overline{\eta}}\bigg|_{\tau=0,\overline{\eta}=0} \cdot \overline{\eta}$$

После замены $\overline{\eta} = \eta$, $\tau = z$ полученная система совпадает с системой (28), замкнутой стабилизирующей обратной связью $z = v = -K\eta$. Следовательно, положение равновесия $\overline{\eta} = 0$ системы (31) асимптотически устойчиво по первому приближению.

Поскольку замена переменных (29) является линейной, то определена невырожденная замена переменных, задающая преобразование системы (1) к виду (30), который является нормальной формой аффинной системы (1) с выходом $\phi(z, \eta) = z + K\eta$. Этот выход в исходных переменных аффинной системы (1) записывается в виде $\phi = h(x) + K\Psi(x)$. ►

Одной из особенностей применения метода виртуальных выходов при $\rho = 2$ является поиск стабилизирующих обратных связей $v_1(\eta)$ и $v_2(\eta)$, которые связаны соотношением (25). Поиск таких стабилизирующих управлений из-за соотношений (25) является достаточно сложной задачей. Покажем, что для ее решения можно воспользоваться линеаризованными уравнениями.

Теорема 6. Пусть линейное приближение подсистемы $\dot{\eta} = q(z, \eta)$ системы (22)–(23) в окрестности точки $(z, \eta) = (0, 0)$ имеет вид

$$\dot{\eta} = A\eta + B_1 z_1 + B_2 z_2, \tag{32}$$

где $A = \left.\frac{\partial q}{\partial \eta}\right|_{z=0,\eta=0}$, $B_1 = \left.\frac{\partial q}{\partial z_1}\right|_{z=0,\eta=0}$, $B_2 = \left.\frac{\partial q}{\partial z_2}\right|_{z=0,\eta=0}$, $B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$, $\eta \in \mathbb{R}^{n-2}$, $z \in \mathbb{R}^2$, и $K = (k_1, \ldots, k_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-2}$ — такая строка, что система (22)–(23) с виртуальным выходом $\phi(z, \eta) = z_1 + K\eta$ имеет относительную степень 2 в точке $(z, \eta) = 0$, а управления

$$\begin{aligned} v_1 &= -K\eta, \\ v_2 &= \frac{-KA + KB_1K}{1 + KB_2}\eta, \end{aligned} \tag{33}$$

стабилизируют положение равновесия $\eta = 0$ системы

$$\dot{\eta} = A\eta + B_1 v_1 + B_2 v_2. \tag{34}$$

Тогда нулевая динамика, соответствующая виртуальному выходу ϕ, асимптотически устойчива в точке $\eta = 0$.

◄ Покажем, что управление v_2 определено корректно и

$$1 + KB_2 \neq 0. \tag{35}$$

Поскольку относительная степень виртуального выхода $\phi(z, \eta)$ в точке $(z, \eta) = 0$ равна 2, то значение в этой точке коэффициента

$$\tilde{g}(z, \eta) = g(z, \eta)(1 + Kq'_{z_2}(z_1, z_2, \eta))$$

при управлении в

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\phi(z,\eta)}{\mathrm{d}t^2}\right|_{(22)-(23)}$$

отлично от нуля. Учитывая, что $B_2 = \left.\frac{\partial q}{\partial z_2}\right|_{z=0,\eta=0}$, можно видеть, что неравенство (35) справедливо.

Соотношения

$$\begin{aligned}
&\overline{z}_1 = \phi(z,\eta) = z_1 + K\eta,\\
&\overline{z}_2 = \left.\frac{\mathrm{d}\phi(z,\eta)}{\mathrm{d}t}\right|_{(22)-(23)} = z_2 + Kq(z_1,z_2,\eta),\\
&\overline{\eta} = \eta
\end{aligned} \tag{36}$$

задают невырожденную замену переменных в окрестности точки $(z,\eta) = (0,0)$, поскольку определитель матрицы Якоби $\frac{\partial(\overline{z}_1,\overline{z}_2)}{\partial(z_1,z_2)}$ в этой точке равен

$$1 + Kq^{'}_{z_2}(z_1,z_2,\eta)|_{z=0,\eta=0} = 1 + KB_2$$

и также отличен от нуля.

Пусть обратная для (36) замена имеет вид

$$z_1 = \overline{z}_1 - K\overline{\eta},\ z_2 = w_2(\overline{z}_1,\overline{z}_2,\overline{\eta}),\ \eta = \overline{\eta}.$$

В переменных (36) система (22)–(23) с виртуальным выходом ϕ запишется в нормальной форме

$$\dot{\overline{z}}_1 = \overline{z}_2,\ \dot{\overline{z}}_2 = \overline{f}(\overline{z},\overline{\eta}) + \overline{g}(\overline{z},\overline{\eta})u, \tag{37}$$

$$\dot{\overline{\eta}} = q(\overline{z}_1 - K\overline{\eta}, w_2(\overline{z}_1,\overline{z}_2,\overline{\eta}),\overline{\eta}). \tag{38}$$

Полагая $\overline{z}_1 = 0$, $\overline{z}_2 = 0$ в (38) и сделав замену $\overline{\eta} = \eta$, получим уравнения соответствующей нулевой динамики

$$\dot{\eta} = q(-K\eta, w_2(0,0,\eta),\eta). \tag{39}$$

Докажем ее ассимптотическую устойчивость в точке $\eta = 0$. Линейное приближение уравнения (39) имеет вид

$$\dot{\eta} = \left.\frac{\partial q(z,\eta)}{\partial \eta}\right|_{z=0,\eta=0} \eta + \left.\frac{\partial q(z,\eta)}{\partial z_1}\right|_{z=0,\eta=0} (-K\eta) + \\ + \left.\frac{\partial q(z,\eta)}{\partial z_2}\right|_{z=0,\eta=0} \left.\frac{\partial w_2(0,0,\eta)}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} \eta = \\ = A\eta - B_1 K\eta + B_2 \frac{\partial w_2(0,0,0)}{\partial \eta}\eta. \tag{40}$$

Поскольку $\dot{z}_1 = z_2$, то $\dot{\overline{z}}_1 - K\dot{\overline{\eta}} = w_2(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{\eta})$, что при $\overline{z}_1 = 0$, $\overline{z}_2 = 0$ после замены $\overline{\eta} = \eta$ дает соотношение

$$-Kq(-K\eta, w_2(0,0,\eta), \eta) = w_2(0,0,\eta). \tag{41}$$

Из (41) получим

$$\frac{\partial w_2(0,0,\eta)}{\partial \eta} = -K \left(\frac{\partial q(z_1,z_2,\eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial q(z_1,z_2,\eta)}{\partial z_1} K + \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial q(z_1,z_2,\eta)}{\partial z_2} \frac{\partial w_2(0,0,\eta)}{\partial \eta} \right) \right|_{z_1=-K\eta, z_2=w_2(0,0,\eta)},$$

откуда

$$\frac{\partial w_2(0,0,\eta)}{\partial \eta} = \left. \frac{-K\frac{\partial q(z_1,z_2,\eta)}{\partial \eta} + K\frac{\partial q(z_1,z_2,\eta)}{\partial z_1}K}{1 + K\frac{\partial q(z_1,z_2,\eta)}{\partial z_2}} \right|_{z_1=-K\eta, z_2=w_2(0,0,\eta)} \tag{42}$$

При $\eta = 0$ получим

$$\frac{\partial w_2(0,0,0)}{\partial \eta} = \frac{-KA + KB_1K}{1 + KB_2}.$$

Подставляя полученное выражение в (40), получим систему

$$\dot{\eta} = A\eta - B_1K\eta + B_2\frac{-KA + KB_1K}{1 + KB_2}\eta. \tag{43}$$

которая совпадает с системой (34), замкнутой управлениями

$$v_1 = -K\eta, \quad v_2 = \frac{-KA + KB_1K}{1 + KB_2}\eta.$$

По условиям теоремы система (43) асимптотически устойчива.

Следовательно, нулевая динамика системы (37)-(38) асимптотически устойчива в точке $\eta = 0$ по теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению. ▶

Отметим, что для нахождения виртуального выхода с устойчивой нулевой динамикой использовалась линеаризация только нулевой динамики исходной системы. Использование полной линеаризации системы (22)–(23) возможно, но в данном случае нецелесообразно, поскольку управление вида (14), построенное для системы (37)–(38) и записанное в переменных z, будет стабилизировать нормальную форму (22)–(23 по части переменных z в большей области, чем управление, построенное с использованием полностью линеаризованной системы.

Укажем способ выбора строки K из теоремы 6 в случае $n = 4$. В этом случае система (32) имеет вид

$$\dot{\eta} = A\eta + B_1 v_1 + B_2 v_2, \tag{44}$$

где $\eta \in \mathbb{R}^2$, A — квадратная матрица второго порядка, а $B_1 = (b_{11}, b_{21})^{\mathrm{T}}$, $B_2 = (b_{21}, b_{22})^{\mathrm{T}}$, $K = (k_1, k_2)$.

Характеристический многочлен матрицы

$$A - B_1 K + B_2 \frac{-KA + KB_1 K}{1 + KB_2}, \tag{45}$$

замкнутой системы (44), (33) имеет вид $\lambda^2 + d_1\lambda + d_0$, где

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{-k_1\delta_3 - k_2\delta_4 + \delta_0}{k_1 b_{12} + k_2 b_{22} + 1}, \\ d_1 &= \frac{k_1(b_{11} - \delta_1) + k_2(b_{21} - \delta_2) - (a_{11} + a_{22})}{k_1 b_{12} + k_2 b_{22} + 1}, \end{aligned} \tag{46}$$

а

$$\begin{aligned} &\delta_0 = \det A, && \delta_1 = a_{22}b_{12} - b_{22}a_{12}, \\ &\delta_2 = a_{11}b_{22} - b_{12}a_{21}, && \delta_3 = b_{11}a_{22} - a_{12}b_{21}, \\ &\delta_4 = a_{11}b_{21} - b_{11}a_{21}. \end{aligned}$$

Элементы матрицы K, если они существуют, должны быть выбраны так, чтобы $d_0 > 0$, $d_1 > 0$, что обеспечит гурвицевость матрицы (45). Дополнительное условие $1 + KB_2 \neq 0$ имеет вид $k_1 b_{21} + k_2 b_{22} + 1 \neq 0$. Эти условия на плоскости Ok_1k_2 задают область, точку в которой несложно выбрать в случае ее непустоты.

В случае, если значения k_1 и k_2, удовлетворяющие указанным неравенствам, не существуют, найти виртуальный выход с использованием теоремы 6 не удается.

6. Стабилизация маятника на тележке

Рассмотрим задачу стабилизации верхнего неустойчивого положения равновесия перевернутого маятника, установленного на тележке (см. рис. 1). Управляемым параметром является сила f, прикладываемая к тележке. Желательно, чтобы одновременно с маятником стабилизировалось и положение тележки в точке $x = 0$, $\dot{x} = 0$.

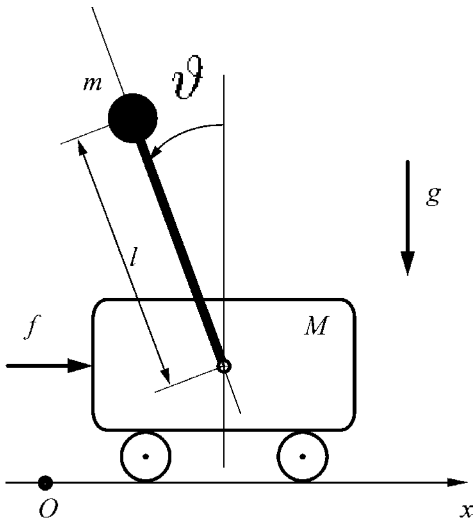

Рис. 1

Для решения указанной задачи разработаны различные алгоритмы [34]. Ограничимся случаем, когда $|\vartheta| \le \frac{\pi}{2}$. Пусть тележка имеет массу M, маятник — массу m, а центр масс маятника расположен на расстоянии l от точки подвеса. Для упрощения формул примем момент инерции маятника относительно его центра масс равным 0. В этом случае модель системы имеет вид [34]

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{mg\cos\vartheta\sin\vartheta - ml\sin\vartheta\dot{\vartheta}^2 + f}{M + m\sin^2(\vartheta)} \\
\ddot{\vartheta} &= \frac{(M+m)g\sin\vartheta - ml\cos\vartheta\sin\vartheta\dot{\vartheta}^2 + f\cos\vartheta}{(M + m\sin^2\vartheta)l}
\end{aligned}
\qquad (47)
$$

Преобразуем систему (47) к нормальной форме относительно виртуального выхода $y = \vartheta$. Положим $z_1 = \vartheta$, $z_2 = \dot{\vartheta}$. Относительно введенных переменных в области $|\vartheta| < \frac{\pi}{2}$ относительная степень выхода равна 2. Найдем первые интегралы векторного поля D при управлении f,

$$D = \frac{1}{M + m\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\dot{x}} + \frac{\cos\vartheta}{(M + m\sin^2\vartheta)l}\frac{\partial}{\partial\dot{\vartheta}}.$$

Решив уравнение $L_D\phi = 0$, получим $\phi_1 = \vartheta$, $\phi_2 = x$ и $\phi_3 = l\dot{\vartheta} - \dot{x}\cos\vartheta$. Примем $\eta_1 = x$, $\eta_2 = l\dot{\vartheta} - \dot{x}\cos\vartheta$.

Можно видеть, что замена $(z, \eta) = \Phi(\vartheta, \dot{\vartheta}, x, \dot{x})$

$$z_1 = \vartheta,\ z_2 = \dot{\vartheta},\ \eta_1 = x,\ \eta_2 = l\dot{\vartheta} - \dot{x}\cos\vartheta$$

гладкая и невырождена в рассматриваемой области $|\vartheta| < \frac{\pi}{2}$, а обратная замена имеет вид

$$\vartheta = z_1,\ \dot{\vartheta} = z_2,\ x = \eta_1,\ \dot{x} = \frac{lz_2 - \eta_2}{\cos z_1}.$$

В найденных переменных уравнения для η_1, η_2 имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \frac{lz_2 - \eta_2}{\cos z_1}, \\ \dot{\eta}_2 &= \left(g + \frac{lz_2 - \eta_2}{\cos z_1} z_2\right)\sin z_1. \end{aligned} \tag{48}$$

и дают следующие уравнения нулевой динамики

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= -\eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= 0. \end{aligned} \tag{49}$$

Нулевое положение равновесия этой системы не является асимптотически устойчивым.

Будем искать новый виртуальный выход с асимптотически устойчивой нулевой динамикой. Согласно теореме 4, для этого надо найти управления $v_1(\eta)$ и $v_2(\eta)$, стабилизирующие положение равновесия системы

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \frac{lv_2 - \eta_2}{\cos v_1}, \\ \dot{\eta}_2 &= \left(g + \frac{lv_2 - \eta_2}{\cos v_1} z_2\right)\sin v_1 \end{aligned} \tag{50}$$

и связанные соотношением

$$\frac{\partial v_1}{\partial \eta_1}\frac{lv_2-\eta_2}{\cos v_1}+\frac{\partial v_1}{\partial \eta_2}\left(g+\frac{lv_2-\eta_2}{\cos v_1}v_2\right)\sin v_1=v_2.$$

Поиск таких управлений представляется достаточно сложной задачей. Для упрощения задачи применим теорему 6.

Линеаризованные в окрестности нулевого положения уравнения (48) после замены $z_1=v_1$, $z_2=v_2$ имеют вид

$$\begin{aligned}\dot\eta_1&=-\eta_2+lv_2,\\ \dot\eta_2&=gv_1.\end{aligned}\tag{51}$$

Используя соотношения (46), получим

$$d_0=\frac{-k_1g}{k_1l+1},\ d_1=\frac{k_2g}{k_1l+1}.$$

Из условий $d_0>0$, $d_1>0$, $k_1l+1\neq 0$ вытекает, что $k_2>0$ и $-\frac{1}{l}<k_1<0$ или $k_1<-\frac{1}{l}$ и $k_2<0$.

Задача нахождения стабилизирующих обратных связей для линеризованных уравнений нулевой динамики решена. Виртуальный выход, обеспечивающий асимптотическую устойчивость нулевой динамики, имеет вид

$$\overline{y}=\vartheta+k_1\eta_1+k_2\eta_2=\vartheta+k_1x+k_2(l\dot\vartheta-\dot x\cos\vartheta).$$

Построим теперь стабилизирующее управление для системы (47), для чего найдем нормальную форму относительно найденного виртуального выхода.

Заметим, что для построения стабилизирующего управления достаточно получить нормальную форму в виде заготовки, то есть правую часть уравнений записать в переменных z,η.

Вычисления удобно проводить с использованием пакета компьютерной алгебры. Ниже приведены с небольшими изменениями результаты, полученные с использованием пакета Maple:

$$
\begin{aligned}
\dot{\overline{z}}_1 &= \overline{z}_2,\\
\dot{\overline{z}}_2 &= \left(\frac{k_1(lz_2-\eta_2)\sin z_1}{\cos^2 z_1}+\frac{k_2(lz_2-\eta_2)z_2\sin^2 z_1}{\cos^2 z_1}\right)z_2+\\
&+k_2(g\cos z_1+(lz_2-\eta_2)z_2)z_2+\\
&+\left(1+\frac{k_1\, l}{\cos z_1}+k_2\left(\frac{2lz_2-\eta_2}{\cos z_1}\right)\sin z_1\right)\times\\
&\qquad\times\frac{(M+m)\sin z_1 g-mlz_2^2\cos z_1\sin z_1}{(M+m\sin^2 z_1)l}-\\
&-\left(\frac{k_1}{\cos z_1}+\frac{k_2z_2\sin z_1}{\cos z_1}\right)\left(g+\frac{(lz_2-\eta_2)z_2}{\cos z_1}\right)\sin z_1+\\
&+\frac{\cos z_1+k_1l+k_2(2lz_2-\eta_2)\sin z_1}{(M+m\sin^2 z_1)}u=\overline{f}+\overline{g}u,
\end{aligned}
\tag{52}
$$

где $\overline{z}_1=\overline{y}$, а

$$
\overline{z}_2=z_2+k_1\frac{lz_2-\eta_2}{\cos z_1}+k_2\left(g+\frac{lz_2-\eta_2}{\cos z_1}z_2\right)\sin z_1.
$$

Используя (52), получим стабилизирующее управление в виде

$$
u=\frac{-\overline{f}-c_1\overline{z}_2-c_0\overline{z}_1}{\overline{g}}.
$$

Замена переменных $(z,\eta)=\Phi(\vartheta,\dot{\vartheta},x,\dot{x})$ позволяет это управление записать в исходных переменных. Поскольку замена задает диффеоморфизм в области $|\vartheta|<\frac{\pi}{2}$, то локальная асимптотическая устойчивость сохранится и в исходных переменных.

Численное моделирование выполнялось при $M=2.0$, $m=0.1$, $l=0.5$, $\vartheta(0)=\frac{\pi}{10}$, $\dot{\vartheta}(0)=-0.1$, $x(0)=0.0$, $\dot{x}(0)=0.0$, $k_1=-1.5$, $k_2=0.25$, $c_1=0.75$, $c_0=0.125$.

На рис. 2, рис. 3 приведены графики зависимостей $\dot{\vartheta}(\vartheta)$ и $\dot{x}(x)$, полученных интегрированием замкнутой системы при $t\in[0,t_k]$, $t_k=25$ с.

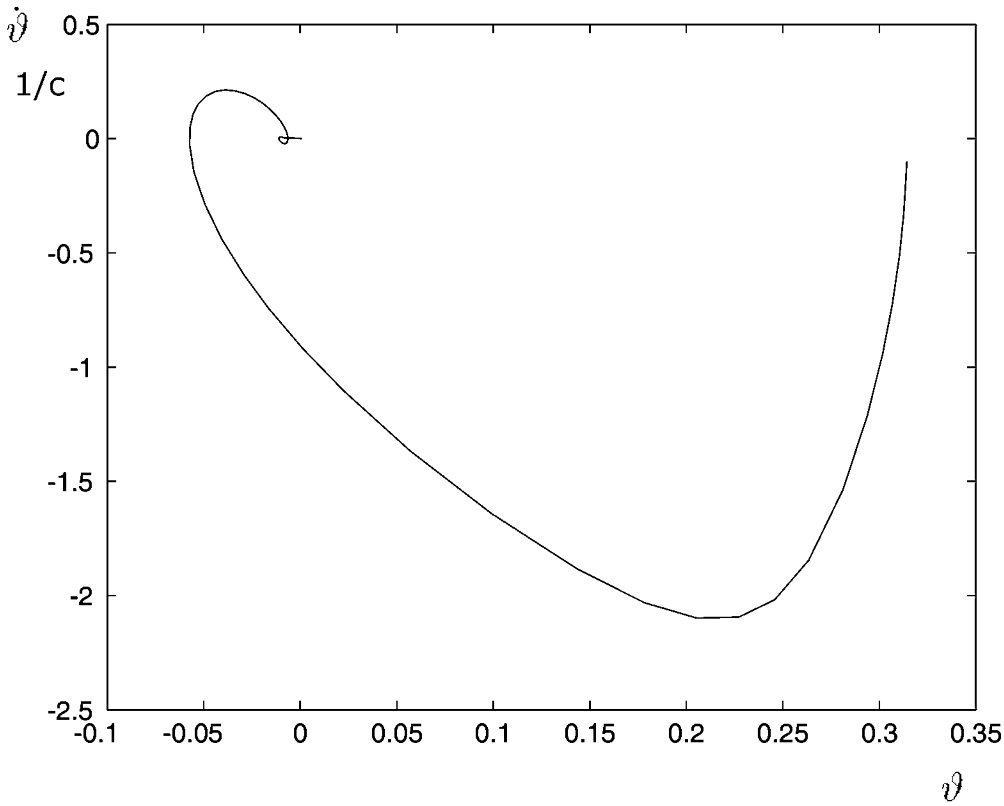
$\dot{\vartheta}$
1/с
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-0.1
-0.05
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
ϑ

Рис. 2

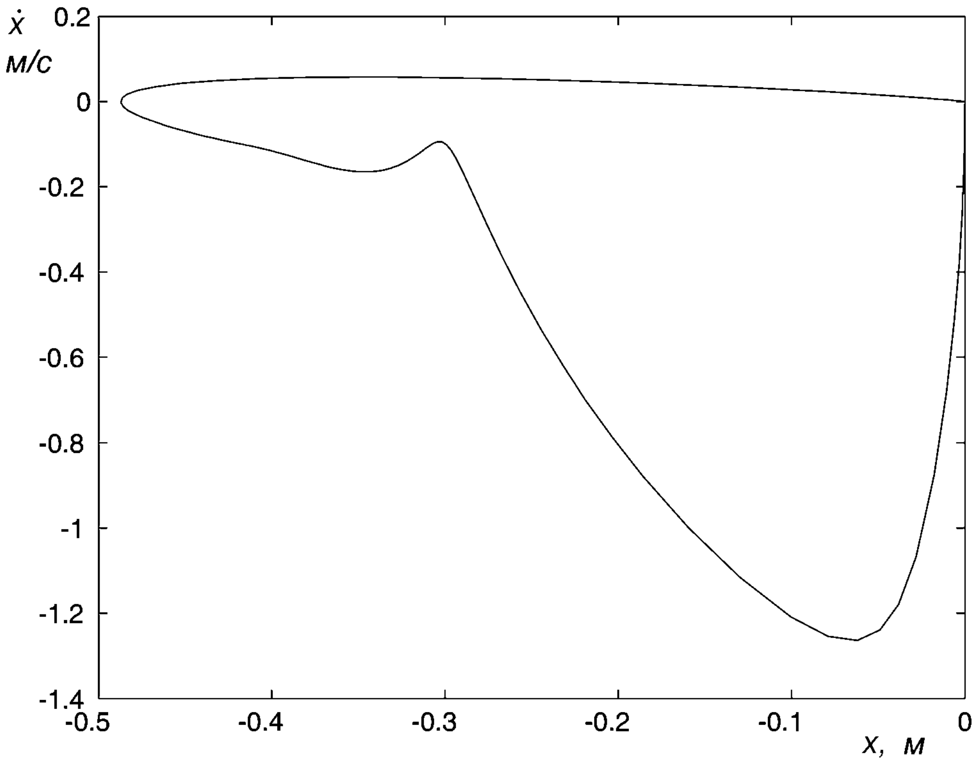
$\dot{x}$
м/с
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
-1.4
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
x, м

Рис. 3

7. Заключение

Поиск виртуального выхода, которому соответствует асимптотически устойчивая нулевая динамика, по-существу является поиском такого многообразия в пространстве переменных состояния системы, при движении по которому траектории динамической системы, замкнутой соответствующим управление, стремятся к положению равновесия. Управление здесь используется только для удержания траектории системы в достаточно малой окрестности указанного многообразия.

Такое управление может быть предпочтительнее управления, полученного с использованием полной линеаризации динамической системы с управлением, поскольку базируется на внутренних свойствах системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 10-07-00468 и Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-4144.2010.1)

Список литературы

1. Жевнин А.А., Крищенко А.П. Управляемость нелинейных систем и синтез алгоритмов управления // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258, № 4. С. 805 – 809.
2. Крищенко А.П. Исследование управляемости и множеств достижимости нелинейных систем управления // Автоматика и телемеханика. 1984. № 6. С. 30 – 36.
3. Крищенко А.П. Стабилизация программных движений нелинейных систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1985. № 6. С. 103 – 112.
4. Крищенко А.П. Преобразование нелинейных систем и стабилизация программных движений // Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана. 1988. № 512. С. 69 – 87.
5. Крищенко А.П. Преобразование многомерных аффинных управляемых систем // Управляемые нелинейные системы. 1991. № 2. С. 5 – 14.
6. Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.

7. Brockett R.W. Feedback invariants for nonlinear systems // Preprints of VII World Congress IFAC. Oxford: Pergamon Press, 1978. V. 2. P. 1115 – 1120.
8. Su R. On the linear equivalents of nonlinear systems // Syst.& Cont. Letters. 1982. № 1. P. 48 – 52.
9. Hunt L.R., Su R., Meyer G. Design for multiinput nonlinear systems // Diff. Geometric Control Theory. Boston: BirkHauser, 1983. P. 24 – 30.
10. Jacubczyk B., Respondek W. On linearization of control systems // Bul. L'acad Pol. Sciense. 1980. V. 28., № 9-10. P. 517 – 522.
11. Byrnes C., Isidori A. Local stabilization of minimum phase nonlinear system // Syst. Contr. Lett. 1988. V. 11. P. 9 – 17.
12. Byrnes C., Isidori A. Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1991. № 10. P. 1122 – 1137.
13. Isidori A. Nonlinear control systems. London: Springer-Verlag, 1995. 587 p.
14. Byrnes C., Isidori A. New results and examples in nonlinear feedback stabilization // Syst. Contr. Lett. 1989. V. 12. P. 437 – 442.
15. Isidori A., Moog C., De Luca A. A sufficient condition for full linearization via dynamic feedback // Proc. of the 25th IEEE Conf. Decision Contr. Athlanta, 1986. P. 203 – 208.
16. Teel A.R. Semi-global stabilization of minimum-phase nonlinear systems in special normal forms // Syst. Cont. Letters. 1992. № 3. P. 187 – 192.
17. Byrnes C., Isidori A., Willems J. Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1992. V. 37. P. 1004 – 1017.
18. Allgower F., Doyle III F.J. Approximate input-output linearization of nonlinear systems // Nonlinear model-based process control. Ed. by Barber R., Kravaric C. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. P. 235 – 274.
19. Tornambe A. Output feedback stabilization of a class of non-minimum phase nonlinear systems // Syst.& Cont. Letters. 1992. № 3. P. 193 – 204.
20. Zou Q., Devasia S. Precision preview-based stable-inversion for nonlinear nonminimum-phase systems: The VTOL example // Automatica. 2007. № 1. P. 117 – 127.

21. Hauser J., Sastry S., Meyer G. Nonlinear control design for slightly non-minimum phase systems: application to V/STOL aircraft // Automatica. 1992. V. 28, № 4. P. 665 – 679.

22. Wright R. A., Kravaris C. Nonminimum-phase compensation for nonlinear processes // AIChE Journal. 1992. V. 38, № 1. P. 26 – 40.

23. Niemiec P. M., Kravaris C. Nonlinear model-state feedback control for nonminimum-phase processes // Automatica. 2003. V. 39, № 7. P. 1295 – 1302.

24. Kravaris C., Mousavere D. ISE-optimal nonminimum-phase compensation for nonlinear processes // Journal of Process Control. 2007. V. 17, № 5. P. 453 – 461.

25. Крищенко А.П., Панфилов Д.Ю., Ткачев С.Б. Построение минимально фазовых аффинных систем // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 11. С. 1483 – 1489.

26. Крищенко А.П., Панфилов Д.Ю., Ткачев С.Б. Глобальная стабилизация аффинных систем с помощью виртуальных выходов // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 11. С. 1503 – 1510.

27. Output maps with associated asymptotically stable zero dynamics / A.P. Krishchenko, D.U. Panfilov, K.E. Starkov, S.B. Tkachev // Nonlinear Control Systems'04: Proc. of VI IFAC Symp. Stuttgart, 2004. V. 1. P. 329 – 334.

28. Ткачев С.Б. Стабилизация нестационарных аффинных систем методом виртуальных выходов // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 11. С. 1507 – 1517.

29. Khalil H.K. Nonlinear systems. 3-d edition. Upper Saddle River: Prentice–Hall, 2002. 750 p.

30. Krener A., Isidori A. Nonlinear zero distributions // Proc. of the 19th IEEE Conf. Decision Contr. Athlanta, 1980. P. 665 – 668.

31. Byrnes C., Isidori A. A frequency domain philosofy for nonlinear system with application to stabilization and to adaptive control // Proc. of the 23rd IEEE Conf. Decision Contr. Las Vegas, 1985. P. 1031 – 1037.

32. Isidori A., Moog C. On the nonlinear equivalent of the notion of transmission zeros // Modeling and Adaptive Control. New York, 1988. P. 203-208.

33. Ким Д.П. Теория автоматического управления. В 2-х томах. Многомерные,

нелинейные и адаптивные системы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. Т.2. 464 с.

34. Fantoni I., Lozano R. Non-linear control for underactuated mechanical systems. London: Springer-Verlag, 2002. 295 p.

electronic scientific and technical periodical
SCIENCE and EDUCATION
El № FS77 - 30569. №0421100025. ISSN 1994-0408

Stabilization of nonminimum-phase affine systems using a partial linearization

77-30569/255087

10, October 2011
S. B. Tkachev

Bauman Moscow State Technical University
mathmod@bmstu.ru

For nonlinear dynamical system with scalar control the stabilization problem of an equilibrium point on a basis of the differential-geometric approach is considered. The basic theoretical data on transformation of a dynamical control system in a quasicanonical form and of a dynamic control system with output in a normal form are reviewed. The basic attention is given to the case when zero dynamics of the system isn't asymptotically stable, i.e. the nonlinear system isn't minimum-phase. Application for stabilization of such systems of the virtual outputs method not always possible because of difficulties of search of virtual controls with desired properties. It is shown that for construction of virtual outputs with desired properties the linearization of the subsystem defining zero dynamics can be used. For the dynamic system describing the turned pendulum on the cart, the static feedback is designed using of the virtual output method and partial linearization. Designed feedback stabilizes simultaneously the top pendulum equilibrium point and the preset position of the cart.

References

1. Zhevnin A.A., Krishchenko A.P. Upravlyaemost' nelinejnyh sistem i sintez algoritmov upravleniya // Dokl. AN SSSR. 1981. T. 258, N 4. S. 805-809.

2. Krishchenko A.P. Issledovanie upravlyaemosti i mnozhestv dostizhimosti nelinejnyh sistem upravleniya // Avtomatika i telemehanika. 1984. N 6. S. 30-36.

3. Krishchenko A.P. Ctabilizaciya programmnyh dvizhenij nelinejnyh sistem // Izv. AN SSSR. Tehnicheskaya kibernetika. 1985. N 6. S. 103-112.

4. Krishchenko A.P. Preobrazovanie nelinejnyh sistem i stabilizaciya programmnyh dvizhenij // Trudy MVTU im. N.Je. Baumana. 1988. N 512. S. 69-87.

5. Krishchenko A.P. Preobrazovanie mnogomernyh affinnyh upravlyaemyh sistem // Upravlyaemye nelinejnye sistemy. 1991. N 2. C. 5-14.

6. Krasnoshchechenko V.I., Krishchenko A.P. Nelinejnye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza. M.: Izd-vo MGTU im. N.Je. Baumana, 2005. 520 s.

7. Brockett R.W. Feedback invariants for nonlinear systems // Preprints of VII World Congress IFAC. Oxford: Pergamon Press, 1978. V. 2. P. 1115-1120.

8. Su R. On the linear equivalents of nonlinear systems // Syst.& Cont. Letters. 1982. N 1. P. 48-52.

9. Hunt L.R., Su R., Meyer G. Design for multiinput nonlinear systems // Diff. Geometric Control Theory. Boston: BirkHauser, 1983. P. 24-30.

10. Jacubczyk B., Respondek W. On linearization of control systems // Bul. L'acad Pol. Sciense. 1980. V. 28., N 9-10. P. 517-522.

11. Byrnes C., Isidori A. Local stabilization of minimum phase nonlinear system // Syst. Contr. Lett. 1988. V. 11. P. 9-17.

12. Byrnes C., Isidori A. Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1991. N 10. P. 1122-1137.

13. Isidori A. Nonlinear control systems. London: Springer-Verlag, 1995. 587 p.

14. Byrnes C., Isidori A. New results and examples in nonlinear feedback stabilization // Syst. Contr. Lett. 1989. V. 12. P. 437-442.

15. Isidori A., Moog C., De Luca A. A sufficient condition for full linearization via dynamic feedback // Proc. of the 25th IEEE Conf. Decision Contr. Athlanta, 1986. P. 203-208.

16. Teel A.R. Semi-global stabilization of minimum-phase nonlinear systems in special normal forms // Syst. Cont. Letters. 1992. N 3. P. 187-192.

17. Byrnes C., Isidori A., Willems J. Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1992. V. 37. P. 1004-1017.

18. Allgower F., Doyle III F.J. Approximate input-output linearization of nonlinear systems // Nonlinear model-based process control. Ed. by Barber R., Kravaric C. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. P. 235-274.

19. Tornambe A. Output feedback stabilization of a class of non-minimum phase nonlinear systems // Syst.& Cont. Letters. 1992. N 3. P. 193-204.

20. Zou Q., Devasia S. Precision preview-based stable-inversion for nonlinear nonminimum-phase systems: The VTOL example // Automatica. 2007. N 1. P. 117-127.

21. Hauser J., Sastry S., Meyer G. Nonlinear control design for slightly non-minimum phase systems: application to V/STOL aircraft // Automatica. 1992. V. 28, N 4. P. 665-679.

22. Wright R. A., Kravaris C. Nonminimum-phase compensation for nonlinear processes // AIChE Journal. 1992. V. 38, N 1. P. 26-40.

23. Niemiec P. M., Kravaris C. Nonlinear model-state feedback control for nonminimum-phase processes // Automatica. 2003. V. 39, N 7. P. 1295-1302.

24. Kravaris C., Mousavere D. ISE-optimal nonminimum-phase compensation for nonlinear processes // Journal of Process Control. 2007. V. 17, N 5. P. 453-461.

25. Krishchenko A.P., Panfilov D.Ju., Tkachev S.B. Postroenie minimal’no fazovyh affinnyh sistem. Differencial’nye uravneniya. 2002. T. 38, N 11. S. 1483-1489.

26. Krishchenko A.P., Panfilov D.Ju., Tkachev S.B. Global’naya stabilizaciya affinnyh sistem s pomoshch’ju virtual’nyh vyhodov // Differencial’nye uravneniya. 2003. T. 39, N 11. S. 1503-1510.

27. Output maps with associated asymptotically stable zero dynamics / A.P. Krishchenko, D.U. Panfilov, K.E. Starkov, S.B. Tkachev // Nonlinear Control Systems'04: Proc. of VI IFAC Symp. Stuttgart, 2004. V. 1. P. 329-334.

28. Tkachev S.B. Stabilizaciya nestacionarnyh affinnyh sistem metodom virtual'nyh vyhodov // Differencial'nye uravneniya. 2007. T. 43, N 11. C. 1507-1517.

29. Khalil H.K. Nonlinear systems. 3-d edition. Upper Saddle River: Prentice–Hall, 2002. 750 p.

30. Krener A., Isidori A. Nonlinear zero distributions // Proc. of the 19th IEEE Conf. Decision Contr. Athlanta, 1980. P. 665-668.

31. Byrnes C., Isidori A. A frequency domain philosofy for nonlinear system with application to stabilization and to adaptive control // Proc. of the 23rd IEEE Conf. Decision Contr. Las Vegas, 1985. P. 1031-1037.

32. Isidori A., Moog C. On the nonlinear equivalent of the notion of transmission zeros // Modeling and Adaptive Control. New York, 1988. P. 203-208.

33. Kim D.P. Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. V 2-x tomah. Mnogomernye, nelinejnye i adaptivnye sistemy. M.: FIZMATLIT, 2004. T.2. 464 s.

34. Fantoni I., Lozano R. Non-linear control for underactuated mechanical systems. London: Springer-Verlag, 2002. 295 p.