

Формулы Фейнмана для семейства параболических уравнений, соответствующих τ -квантованию квадратичной функции Гамильтона**77-30569/251251**

10, октябрь 2011

Я.А. Бутко, А.В. Дурагин

УДК 517.987.4

МГТУ им. Н.Э. Баумана

yanabutko@yandex.ru, avduryagin@mail.ru**1. Введение**

Формула Фейнмана это представление полугруппы, соответствующей некоторой начально-краевой задаче для эволюционного уравнения, в виде предела интегралов от элементарных функций по декартовым степеням некоторого пространства E при стремлении степени к бесконечности. Конечнократные интегралы в формулах Фейнмана аппроксимируют функциональные интегралы по некоторым вероятностным мерам или фейнмановским псевдомерам на множестве функций, определенных на интервале $[0, t]$ и принимающих значения в E . Таким образом, формулы Фейнмана могут быть использованы как для непосредственного вычисления решений начально-краевых задач, так и для представления решений таких задач с помощью функциональных интегралов (такие представления называются формулами Фейнмана–Каца), аппроксимации переходных вероятностей некоторых случайных процессов и переходных амплитуд в квантовой динамике, компьютерного моделирования случайных процессов и моделирования квантовой и стохастической динамики. Формула Фейнмана называется *гамильтоновой формулой Фейнмана*, если пространство E , декартовы степени которого рассматриваются, является фазовым пространством некоторой классической гамильтоновой системы. Такие формулы Фейнмана дают аппроксимации функциональным интегралам по траекториям в

этом самом фазовом пространстве. Аналогично определяются *лагранжевы формулы Фейнмана* с помощью замены фазового пространства конфигурационным. Лагранжевы формулы Фейнмана и, соответственно, лагранжевы формулы Фейнмана–Каца появились впервые в работе Фейнмана [10] 1948 года, в которой рассматривалось простейшее уравнение Шредингера с потенциалом. Первое строгое математическое доказательство результатов работы [10] было дано Нельсоном в 1964 г. и основывалось на формуле Троттера. Соответствующие гамильтоновы формулы Фейнмана и Фейнмана–Каца были предложены в работе Фейнмана [11], опубликованной в 1951 году. Однако первое строгое доказательство таких формул появилось только в 2002 г. в работе [23]. Возможно, такая длительная задержка связана с тем, что формулы Троттера не достаточно для доказательства гамильтоновых формул Фейнмана и необходимо вместо нее использовать теорему Чернова [9]. Теорема Чернова является естественным обобщением формулы Троттера и может быть использована для доказательства формул Фейнмана и Фейнмана–Каца для широкого класса начальных и начально-краевых задач для разнообразных эволюционных уравнений. Основанный на теореме Чернова метод получения формул Фейнмана и Фейнмана–Каца был разработан в серии работ [23], [24]–[28] и применен для описания классической, квантовой и стохастической динамики в областях евклидовых пространств и римановых многообразий, в бесконечномерных линейных и нелинейных пространствах, p -адических пространствах и т.д. (см., например, [1] — [8], [12], [14], [17], [18], [19], [20], [23], [24], [26], [28]). В настоящей работе данный метод используется для представлений решения задачи Коши–Дирихле для семейства параболических уравнений второго порядка с помощью гамильтоновых формул Фейнмана. Рассмотренное в работе семейство параболических уравнений отвечает различным видам квантования квадратичной функции Гамильтона классической гамильтоновой системы, в том числе qp -, pq -квантованиям и квантованию Вейля.

2. Теорема Чернова и формула Фейнмана

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — банахово пространство, $\mathcal{L}(X)$ — пространство ограниченных линейных операторов на X , наделенное сильной операторной топологией, $\|\cdot\|$ — операторная норма на $\mathcal{L}(X)$, Id — тождественный оператор

в X . Если $Dom(L) \subset X$ линейное подпространство и $L : Dom(L) \rightarrow X$ линейный оператор, то символом $Dom(L)$ обозначим область определения L . Однопараметрическое семейство $(T_t)_{t \geq 0}$ ограниченных линейных операторов $T_t : X \rightarrow X$ называется сильно непрерывной полугруппой, если $T_0 = Id$, $T_{s+t} = T_s \circ T_t$ для всех $s, t \geq 0$ и $\lim_{t \rightarrow 0} \|T_t \phi - \phi\|_X = 0$ для всех $\phi \in X$. Пусть $(T_t)_{t \geq 0}$ — сильно непрерывная полугруппа на банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$. Тогда генератор L полугруппы $(T_t)_{t \geq 0}$ определяется как $L\phi := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t \phi - \phi}{t}$ с областью определения

$$Dom(L) := \left\{ \phi \in X \mid \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t \phi - \phi}{t} \right\}.$$

Рассмотрим эволюционное уравнение $\frac{\partial f}{\partial t} = Lf$. Если L — генератор сильно непрерывной полугруппы $(T_t)_{t \geq 0}$ на банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$, то решение задачи Коши для этого уравнения с начальным условием $f(0) = f_0 \in X$ задается как $f(t) = T_t f_0$ для всех $f_0 \in X$. Следовательно, решение задачи Коши для эволюционного уравнения $\frac{\partial f}{\partial t} = Lf$ равносильно построению полугруппы $(T_t)_{t \geq 0}$ с заданным генератором L . Как правило, действие полугруппы не удается получить в явном, аналитическом виде. Однако, полугруппу с заданным генератором возможно аппроксимировать. Одно из средств аппроксимации полугрупп основывается на теореме Чернова [9] (далее представлена версия теоремы Чернова, введенная в [23]).

Теорема 1 (Чернова). Пусть X — банахово пространство, $F : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(q)$ — сильно непрерывное отображение, такое что $F(0) = Id$ и $\|F(t)\| \leq e^{\lambda t}$ для некоторого $\lambda \in [0, \infty)$ и всех $t \geq 0$. Пусть D линейное подпространство $Dom(F'(0))$ такое, что сужение оператора $F'(0)$ на это подпространство замыкаемо, $(L, Dom(L))$ — соответствующее замыкание. Пусть $(L, Dom(L))$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $(T_t)_{t \geq 0}$. Тогда для любого $t_0 > 0$ последовательность $(F(t/n))^n_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к $(T_t)_{t \geq 0}$ при $n \rightarrow \infty$ в сильной операторной топологии, равномерно по $t \in [0, t_0]$, т.е. $T_t = \lim_{n \rightarrow \infty} (F(t/n))^n$. Здесь производная функции $F : [0, \epsilon) \rightarrow \mathcal{L}(q)$, $\epsilon > 0$, это линейное отображение $F'(0) : Dom(F'(0)) \rightarrow X$ такое, что

$$F'(0)g := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)g - F(0)g}{t},$$

где $Dom(F'(0))$ — векторное пространство элементов $g \in X$, для которых этот предел существует.

Семейство операторов $(F(t))_{t \geq 0}$ называется *эквивалентным по Чернову* полугруппе $(T_t)_{t \geq 0}$, если семейство удовлетворяет всем требованиям теоремы Чернова по отношению к полугруппе $(T_t)_{t \geq 0}$; т.е., если по теореме Чернова выполняется равенство

$$T_t = \lim_{n \rightarrow \infty} (F(t/n))^n. \quad (1)$$

В большинстве случаев операторы $F(t)$ — это интегральные операторы и тогда в правой части равенства (1) стоит предел последовательности n -кратных интегралов. В этом случае равенство (1) называется *формулой Фейнмана*.

Определение 1. Формула Фейнмана — это представление решения начальной (или начально-краевой) задачи для эволюционного уравнения (или, что то же, представление соответствующей эволюционной полугруппы) в виде предела n -кратных интегралов при $n \rightarrow \infty$.

Мы будем называть равенство $T_t = \lim_{n \rightarrow \infty} (F(t/n))^n$ *лагранжевой формулой Фейнмана*, если $F(t)$, $t > 0$, это интегральные операторы, ядра которых выражаются через элементарные функции; если $F(t)$ — псевдо-дифференциальные операторы (см. определение 3), то назовем это равенство *гамильтоновой формулой Фейнмана*. Такая терминология связана с тем, что лагранжевы формулы Фейнмана аппроксимируют функциональные интегралы по множеству траекторий в конфигурационном пространстве системы (эволюция которой описывается полугруппой $(T_t)_{t \geq 0}$), в то время как гамильтоновы формулы Фейнмана дают аппроксимации функциональных интегралов по множеству траекторий в фазовом пространстве некоторой системы.

3. Псевдо-дифференциальные операторы, их символы и τ -квантование

Пусть $H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ измеримая функция и $\tau \in [0, 1]$. Мы определим псевдо-дифференциальный оператор $\hat{H}_\tau(\cdot, D)$ с τ -символом $H(q, p)$ на некотором банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$ функций на $\mathbb{R}^d$ как

$$\hat{H}_\tau(\cdot, D)\phi(q) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ip \cdot (q - q_1)} H(\tau q + (1 - \tau)q_1, p) \phi(q_1) dq_1 dp, \quad (2)$$

где область определения $Dom(\hat{H}_\tau(\cdot, D))$ — это множество всех $\phi \in X$ таких, что правая часть формулы (2) корректно определена как элемент пространства $(X, \|\cdot\|_X)$. Далее, мы будем рассматривать псевдо-дифференциальные операторы на пространстве $C_\infty(\mathbb{R}^d) := \{\phi \in C(\mathbb{R}^d) : \lim_{|q| \rightarrow 0} \phi(q) = 0\}$ с нормой $\|\phi\|_\infty := \sup_{q \in \mathbb{R}^d} |\phi(q)|$. Мы всегда будем считать что множество пробных функций $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ принадлежит области определения оператора $\hat{H}_\tau(\cdot, D)$.

Отображение $\widehat{\cdot}_\tau : H \rightarrow \hat{H}_\tau(\cdot, D)$ из пространства функций на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ в пространство линейных операторов на $(X, \|\cdot\|_X)$ называется τ -квантованием, оператор $\hat{H}_\tau(\cdot, D)$ называется τ -квантованием функции H . Заметим, что если H — сумма функций, зависящих только от одной переменной q или p , то операторы $\hat{H}_\tau(\cdot, D)$ совпадают для всех $\tau \in [0, 1]$. Если $H(q, p) = qp = pq$, $q, p \in \mathbb{R}^1$, то

$$\hat{H}_\tau(\cdot, D)\phi(q) = -i\tau q \frac{\partial}{\partial q} \phi(q) - i(1 - \tau) \frac{\partial}{\partial q} (q\phi(q)).$$

Таким образом, различные τ соответствуют различному порядку применения некоммутирующих операторов. При этом, “qr”-квантование соответствует случаю $\tau = 1$, “rq”-квантование — случаю $\tau = 0$ и вейлевское квантование — случаю $\tau = 1/2$. Функция $H(q, p)$ обычно рассматривается как функция Гамильтона некоторой классической системы. Оператор $\hat{H}_\tau(\cdot, D)$ называется гамильтонианом квантовой системы, полученной τ -квантованием классической системы с функцией Гамильтона H .

4. Связь между τ -квантованиями квадратичной функции Гамильтона

В дальнейшем $p, q \in \mathbb{R}^1$, $C_b^k(\mathbb{R})$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций, ограниченных вместе со всеми своими производными. Мы будем рассматривать квадратичную функцию Гамильтона

$$H(p, q) = a(q)(ip)^2 + b(q)ip + c(q),$$

где $a(\cdot)$ — непрерывная на $\mathbb{R}$ строго положительная ограниченная функция, причем $a(q)$ не стремится к нулю на бесконечности, $b(q)$ и $c(q)$ — непрерывные и ограниченные на $\mathbb{R}$ функции.

Лемма 1. Пусть $a(\cdot) \in C_b^2(\mathbb{R})$, $b(\cdot) \in C_b^1(\mathbb{R})$, $c(\cdot) \in C_b(\mathbb{R})$. Тогда при каждом $\tau \in [0, 1]$, оператор $\widehat{H}_\tau(\cdot, D)$ продолжается на множество $C^2(\mathbb{R})$ по формуле

$$\begin{aligned}\widehat{H}_\tau(q, D)\phi(q) &= a(q)\frac{\partial^2}{\partial q^2}\phi(q) + 2(1-\tau)a'(q)\frac{\partial}{\partial q}\phi(q) + \\ &+ (1-\tau)^2a''(q)\phi(q) + b(q)\frac{\partial}{\partial q}\phi(q) + (1-\tau)b'(q)\phi(q) + c(q)\phi(q).\end{aligned}$$

◀ Пусть выполнены условия леммы. Тогда для $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ имеем:

$$\begin{aligned}\widehat{H}_\tau(q, D)\phi(q) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\tau q + (1-\tau)q_1, p) e^{ip(q-q_1)} \phi(q_1) dq_1 dp = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\tau q + (1-\tau)q_1) (ip)^2 e^{ip(q-q_1)} \phi(q_1) dq_1 dp + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} b(\tau q + (1-\tau)q_1) ip e^{ip(q-q_1)} \phi(q_1) dq_1 dp + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\tau q + (1-\tau)q_1) e^{ip(q-q_1)} \phi(q_1) dq_1 dp.\end{aligned}$$

Пусть сначала $a, b, c \in C^\infty(\mathbb{R})$. Рассмотрим каждое слагаемое по отдельности:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\tau q + (1-\tau)q_1) (ip)^2 e^{ip(q-q_1)} \phi(q_1) dq_1 dp &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \int_{\text{supp } \phi} a(\tau q + (1-\tau)q_1) (ip)^2 e^{ip(q-q_1)} \phi(q_1) dq_1 dp = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\text{supp } \phi} a(\tau q + (1-\tau)q_1) \phi(q_1) \int_{-r}^r (ip)^2 e^{ip(q-q_1)} dp dq_1 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\text{supp } \phi} a(\tau q + (1-\tau)q_1) \phi(q_1) \frac{d^2}{dq_1^2} \int_{-r}^r e^{ip(q-q_1)} dp dq_1 = \\ &= \left\langle \frac{d^2}{dq_1^2} \delta(q - q_1), a(\tau q + (1-\tau)q_1) \phi(q_1) \right\rangle =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \delta(q - q_1), \frac{d^2}{dq_1^2} a(\tau q + (1 - \tau)q_1) \phi(q_1) \right\rangle = \\
&= (1 - \tau)^2 a''(q) \phi(q) + 2(1 - \tau) a'(q) \phi'(q) + a(q) \phi''(q). \quad (3)
\end{aligned}$$

Здесь $\langle f, g \rangle$ обозначает действие обобщенной функции $f \in S'(\mathbb{R})$ на основную функцию $g \in S(\mathbb{R})$, δ — дельта-функция Дирака.

Аналогичным образом, для второго и третьего слагаемых получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} b(\tau q + (1 - \tau)q_1) i p e^{ip(q-q_1)} \phi(q_1) dq_1 dp = \\
&\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \int_{\text{supp } \phi} (\tau q + (1 - \tau)q_1) (ip) e^{ip(q-q_1)} \phi(q_1) dq_1 dp = \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\text{supp } \phi} b(\tau q + (1 - \tau)q_1) \phi(q_1) \int_{-r}^r i p e^{ip(q-q_1)} dp dq_1 = \\
&= -\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\text{supp } \phi} b(\tau q + (1 - \tau)q_1) \phi(q_1) \frac{d}{dq_1} \int_{-r}^r e^{ip(q-q_1)} dp dq_1 = \\
&= -\left\langle \frac{d}{dq_1} \delta(q - q_1), b(\tau q + (1 - \tau)q_1) \phi(q_1) \right\rangle = \\
&= -\left\langle \delta(q - q_1), \frac{d}{dq_1} b(\tau q + (1 - \tau)q_1) \phi(q_1) \right\rangle = \\
&= (1 - \tau) b'(q) \phi(q) + b(q) \phi'(q);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\tau q + (1 - \tau)q_1) e^{ip(q-q_1)} \phi(q_1) dq_1 dp = \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \int_{\text{supp } \phi} c(\tau q + (1 - \tau)q_1) e^{ip(q-q_1)} \phi(q_1) dq_1 dp = \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\text{supp } \phi} c(\tau q + (1 - \tau)q_1) \phi(q_1) \int_{-r}^r e^{ip(q-q_1)} dp dq_1 = \\
&= \left\langle \delta(q - q_1) c(\tau q + (1 - \tau)q_1) \phi(q_1) \right\rangle = c(q) \phi(q).
\end{aligned}$$

Объединяя слагаемые, получим:

$$\begin{aligned}\widehat{H}_\tau(q, D)\phi(q) = & a(q)\frac{\partial^2}{\partial q^2}\phi(q) + 2(1-\tau)a'(q)\frac{\partial}{\partial q}\phi(q) + \\ & + (1-\tau)^2a''(q)\phi(q) + b(q)\frac{\partial}{\partial q}\phi(q) + (1-\tau)b'(q)\phi + c(q)\phi(q).\end{aligned}$$

Если теперь $a(\cdot) \in C_b^2(\mathbb{R})$, $b(\cdot) \in C_b^1(\mathbb{R})$, $c(\cdot) \in C_b(\mathbb{R})$, то существуют последовательности бесконечно дифференцируемых функций $\{a_n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{c_n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$, локально равномерно на $\mathbb{R}$ сходящихся к $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, $c(\cdot)$ вместе со всеми своими производными до второго, первого и нулевого порядка соответственно.

Тогда обобщенные функции

$$a(\tau q + (1-\tau)q_1)\frac{d^2}{dq_1^2}\delta(q - q_1), \quad b(\tau q + (1-\tau)q_1)\frac{d}{dq_1}\delta(q - q_1)$$

и

$$c(\tau q + (1-\tau)q_1)\delta(q - q_1)$$

являются слабыми пределами обобщенных функций

$$a_n(\tau q + (1-\tau)q_1)\frac{d^2}{dq_1^2}\delta(q - q_1), \quad b_n(\tau q + (1-\tau)q_1)\frac{d}{dq_1}\delta(q - q_1)$$

и

$$c_n(\tau q + (1-\tau)q_1)\delta(q - q_1)$$

соответственно, а для последних справедливы выкладки, приведенные выше. ►

Рассмотрим вид оператора $\widehat{H}_\tau$ при некоторых τ . При $\tau = 1$, т. е. при qp -квантовании:

$$\widehat{H}_1(q, D)\phi(q) = a(q)\frac{\partial^2}{\partial q^2}\phi(q) + b(q)\frac{\partial}{\partial q}\phi(q) + c(q)\phi(q).$$

При $\tau = 0$, т.е. при pq -квантовании:

$$\widehat{H}_0(q, D)\phi(q) = \frac{\partial^2}{\partial q^2}[a(q)\phi(q)] + \frac{\partial}{\partial q}[b(q)\phi(q)] + c(q)\phi(q).$$

При $\tau = \frac{1}{2}$, т.е. при квантовании Вейля:

$$\begin{aligned}\widehat{H}_{\frac{1}{2}}(q, D)\phi(q) = & \frac{\partial^2}{\partial q^2}\phi(q) + a'(q)\frac{\partial}{\partial q}\phi(q) + \frac{1}{4}a''(q)\phi(q) + \\ & + b(q)\frac{\partial}{\partial q}\phi(q) + \frac{1}{2}b'(q)\phi + c(q)\phi(q).\end{aligned}$$

5. Задача Коши-Дирихле для семейства параболических уравнений второго порядка на отрезке

Пусть $G = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, $\overline{G} = [\alpha, \beta]$, $\tau \in [0, 1]$. Рассмотрим начально-краевую задачу Коши-Дирихле для параболического уравнения второго порядка в области G :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t, q) = \widehat{H}_\tau(q, D)f(t, q), & t \geq 0, \quad q \in G, \\ f(0, q) = f_0(q), & q \in G, \\ f(t, q) = 0, & t \geq 0, \quad q \in \partial G. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $\widehat{H}_\tau(\cdot, D)$ — оператор, полученный τ -квантованием функции

$$H(p, q) = a(q)(ip)^2 + b(q)ip + c(q),$$

где $a(\cdot)$ — непрерывная на $\mathbb{R}$ строго положительная ограниченная функция, причем $a(q)$ не стремится к нулю на бесконечности, $b(\cdot)$ и $c(\cdot)$ — непрерывные и ограниченные на $\mathbb{R}$ функции. Пусть Δ_a — дифференциальный оператор на множестве дважды дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, определяемый равенством: $(\Delta_a \phi)(q) = a(q) \frac{d^2}{dq^2} \phi(q)$. Будем также использовать обозначение $\nabla \phi(q)$ для $\frac{d}{dq} \phi(q)$.

Мы предполагаем, что $f_0 \in X$ и $f(t, \cdot) \in X$ для всех $t > 0$, где $X = C_0(\overline{G})$ — банахово пространство непрерывных на $\overline{G}$ функций, обращающихся в ноль на границе. Норма в пространстве $X = C_0(\overline{G})$ определена стандартным образом: $\|f\|_X = \sup_{q \in \overline{G}} |f(q)|$.

Пусть для каждого $\tau \in [0, 1]$, семейство операторов $(T_t^\tau)_{t \geq 0}$ — это полугруппа на $C_0(\overline{G})$, разрешающая задачу Коши-Дирихле (4). Мы предполагаем, что коэффициенты рассматриваемого уравнения удовлетворяют достаточным условиям для того, чтобы полугруппа $(T_t^\tau)_{t \geq 0}$ была сильно непрерывной полугруппой на пространстве $C_0(\overline{G})$. Обозначим через $(L^\tau, \text{Dom}(L^\tau))$ генератор полугруппы $(T_t^\tau)_{t \geq 0}$. Пусть $C_0^\infty(\overline{G}) := C^\infty(\overline{G}) \cap C_0(\overline{G})$. Мы предполагаем, что множество $D := \{\phi \in C_0^\infty(\overline{G}) \mid L\phi \in C_0(\overline{G})\}$ — существенная область определения $(L^\tau, \text{Dom}(L^\tau))$.

Семейства операторов, эквивалентные по Чернову полугруппе, разрешающей задачу Коши–Дирихле при $\tau = 1$

Рассмотрим задачу Коши–Дирихле (4) при $\tau = 1$. Пространство $C_0(\overline{G})$ можно рассматривать как подпространство $C_c(\mathbb{R})$ непрерывных в $\mathbb{R}$ функций с компактным носителем. Определим для любой $\phi \in C_0(\overline{G})$ непрерывное продолжение до функции $\tilde{\phi} \in C_c(\mathbb{R})$, положив:

1. Для любых $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in C_0(\overline{G})$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ выполняется импликация: если $\phi_1 = \lambda\phi_2 + \mu\phi_3$ на $\overline{G}$, то $\tilde{\phi}_1 = \lambda\tilde{\phi}_2 + \mu\tilde{\phi}_3$ на $\mathbb{R}$.
2. $\|\phi\|_{C_0(\overline{G})} = \sup_{q \in \mathbb{R}} |\tilde{\phi}(q)|$.
3. Если $\phi \in C_0^\infty(\overline{G})$, то $\tilde{\phi} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Векторное пространство всех продолжений $\tilde{\phi}$ функций $\phi \in C_0^\infty(\overline{G})$ назовем $\tilde{D} \subset C_c(\mathbb{R})$.

Определим на $S(\mathbb{R})$ семейство операторов

$$[F(t)\phi](q) = \frac{e^{tc(q)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a(q)tp^2}{2}} e^{itpb(q)} e^{ip(q-q_0)} \phi(q_0) dq_0 dp.$$

Лемма 2. Для любого ϕ из $S(\mathbb{R})$ функция $F(t)\phi$ принадлежит $C_\infty(\mathbb{R})$, где $C_\infty(\mathbb{R})$ — банахово пространство непрерывных в $\mathbb{R}$ функций таких, что $f(q) \rightarrow 0$ при $|q| \rightarrow \infty$.

◀ При $t = 0$ оператор принимает вид

$$(F(t)\phi)(q) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipq} [\mathcal{F}\phi](p) dp = \phi(q).$$

Следовательно, $F(0) = Id$ на $S(\mathbb{R})$. Здесь и далее $\mathcal{F}\phi$ обозначает преобразование Фурье функции ϕ .

При $t > 0$

$$(F(t)\phi)(q) = e^{tc(q)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a(q)tp^2}{2}} e^{ip(q+tb(q))} [\mathcal{F}\phi](p) dp.$$

Покажем, что функция $F(t)\phi$ непрерывна и убывает к нулю на бесконечности.

$$\lim_{|q| \searrow \infty} q^2 (F(t)\phi)(q) = \lim_{q \searrow \infty} e^{tc(q)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 e^{-\frac{a(q)tp^2}{2}} e^{ip(q+tb(q))} [\mathcal{F}\phi](p) dp =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{|q| \searrow \infty} e^{tc(q)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 e^{ipq} e^{-\frac{a(q)tp^2}{2}} e^{iptb(q)} [\mathcal{F}\phi](p) dp = \\
&= \lim_{|q| \searrow \infty} -e^{tc(q)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2 e^{ipq}}{dp^2} \cdot e^{-\frac{a(q)tp^2}{2}} e^{iptb(q)} [\mathcal{F}\phi](p) dp.
\end{aligned}$$

Интегрированием по частям далее получим

$$\lim_{|q| \searrow \infty} -e^{tc(q)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2}{dp^2} \left[e^{-\frac{a(q)tp^2}{2}} e^{iptb(q)} [\mathcal{F}\phi](p) \right] \cdot e^{ipq} dp,$$

где

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{d^2}{dp^2} \left[e^{-\frac{a(q)tp^2}{2}} e^{iptb(q)} [\mathcal{F}\phi](p) \right] \right| = \\
&= \left| e^{-\frac{a(q)tp^2}{2}} e^{iptb(q)} \left[[\mathcal{F}\phi]''(p) - 2[\mathcal{F}\phi]'(p)(pta(q) - itb(q)) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + [\mathcal{F}\phi](p)[p^2ta(q) + it^2p^2b(q)a(q) - ta(q) - it^2b(q)a(q) - t^2b^2(q)] \right] \right| \leq \\
&\leq \left| [\mathcal{F}\phi]''(p) - 2[\mathcal{F}\phi]'(p)(pta(q) - itb(q)) + \right. \\
&\quad \left. + [\mathcal{F}\phi](p)[p^2ta(q) + it^2p^2b(q)a(q) - ta(q) - it^2b(q)a(q) - t^2b^2(q)] \right|.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\left| \lim_{|q| \searrow \infty} q^2 (F(t)\phi)(q) \right| \leq \\
&\leq e^{\sup_{q \in \mathbb{R}} c(q)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| [\mathcal{F}\phi]''(p) - 2[\mathcal{F}\phi]'(p)(pta(q) - itb(q)) + \right. \\
&\quad \left. + [\mathcal{F}\phi](p)[p^2ta(q) + it^2p^2b(q)a(q) - ta(q) - it^2b(q)a(q) - t^2b^2(q)] \right| dp.
\end{aligned}$$

В виду того, что функции $a(q), b(q), c(q)$ ограничены в $\mathbb{R}$, $\phi, \mathcal{F}\phi \in S(\mathbb{R})$, последний интеграл существует и равен константе. Его значение обозначим C .

В итоге

$$\left| \lim_{|q| \searrow \infty} q^2 (F(t)\phi)(q) \right| \leq e^{\sup_{q \in \mathbb{R}} c(q)} C = \text{const.}$$

Непрерывность по q функции $F(t)\phi$ очевидна.

Таким образом, доказано что

$$(F(t)\phi)(q) = e^{tc(q)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a(q)tp^2}{2}} e^{ip(q+tb(q))} [\mathcal{F}\phi](p) dp$$

отображает $S(\mathbb{R})$ в $C_\infty(\mathbb{R})$. ►

Лемма 3. На множестве $S(\mathbb{R})$ сильная производная $F(t)$ в нуле совпадает с $\hat{H}_1$, то есть для любого $\phi \in S(\mathbb{R})$ равномерно по $q \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \searrow 0} t^{-1} (F(t)\phi(q) - \phi(q)) = \frac{1}{2} \Delta_a \phi(q) + b(q) \nabla \phi(q) + c(q) \phi(q).$$

◀

$$\begin{aligned} & \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} (F(t)\phi - \phi)(q) = \\ &= \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tc(q)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a(q)tp^2}{2}} e^{ip(q+tb(q))} [\mathcal{F}\phi](p) dp - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipq} [\mathcal{F}\phi](p) dp \right] = \\ &= \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\frac{a(q)tp^2}{2} + iptb(q) + tc(q)} - 1 \right] e^{ipq} [\mathcal{F}\phi](p) dp \right] = \\ &= \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{t(-\frac{a(q)p^2}{2} + ipb(q) + c(q))} - 1 \right] e^{ipq} [\mathcal{F}\phi](p) dp \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \left[e^{t(-\frac{a(q)p^2}{2} + ipb(q) + c(q))} - 1 \right] e^{ipq} [\mathcal{F}\phi](p) dp. \end{aligned}$$

Перестановка предельных переходов имеет место в силу теоремы Лебега о мажорированной сходимости. Далее получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{a(q)p^2}{2} + ipb(q) + c(q) \right] e^{ipq} [\mathcal{F}\phi](p) dp = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{a(q)(ip)^2}{2} + ipb(q) + c(q) \right] e^{ipq} [\mathcal{F}\phi](p) dp = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a(q)}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2 e^{ipq}}{dq^2} [\mathcal{F}\phi](p) dp + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} b(q) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{de^{ipq}}{dq} [\mathcal{F}\phi](p) dp + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c(q) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipq} [\mathcal{F}\phi](p) dp = \frac{a(q)}{2} \frac{d^2}{dq^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipq} [\mathcal{F}\phi](p) dp = \\
&= \frac{1}{2} a(q) \phi''(q) + b(q) \phi'(q) + c(q) \phi(q).
\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. ►

Лемма 4. Для любой $\phi \in S(\mathbb{R})$ и любого $t \geq 0$ норма

$$\|F(t)\phi\|_{C_\infty(\mathbb{R})} \leq e^{\lambda t} \|\phi\|_{C_\infty(\mathbb{R})},$$

где $\lambda = \sup_{q \in \mathbb{R}} c(q)$.

$$\begin{aligned}
\blacktriangleleft \quad &\|(F(t)\phi)(q)\|_{C_\infty(\mathbb{R})} = \\
&= \sup_{q \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tc(q)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a(q)tp^2}{2}} e^{ip(q+tb(q))} [\mathcal{F}\phi](p) dp \right| = \\
&= \sup_{q \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{2\pi} e^{tc(q)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a(q)tp^2}{2} + ip(q+tb(q)) - ipy} \phi(y) dy dp \right|.
\end{aligned}$$

Преобразуем выражение в степени экспоненты:

$$\begin{aligned}
-\frac{a(q)tp^2}{2} + ip(q + tb(q) - y) &= -\left[\frac{a(q)tp^2 - 2ip(q + tb(q) - y)}{2} \right] = \\
&= -a(q)t \left[\frac{p^2 - \frac{2ip(q+tb(q)-y)}{a(q)t}}{2} \right] = \\
&= -a(q)t \left[\frac{p^2 - \frac{2ip(q+tb(q)-y)}{a(q)t} + \left(\frac{i(q+tb(q)-y)}{a(q)t}\right)^2 - \left(\frac{i(q+tb(q)-y)}{a(q)t}\right)^2}{2} \right] = \\
&= -a(q)t \left[\frac{\left(p - \frac{i(q+tb(q)-y)}{a(q)t}\right)^2 + \left(\frac{y-(q+tb(q))}{a(q)t}\right)^2}{2} \right] = \\
&= -\frac{(y - (q + tb(q)))^2}{2a(q)t} - \frac{\left(p - \frac{i(q+tb(q)-y)}{a(q)t}\right)^2}{\frac{2}{a(q)t}}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a(q)tp^2}{2}} e^{ip(q+b(q))} e^{-ipy} dp \phi(y) dy &= \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-(q+tb(q)))^2}{2a(q)t} - \frac{(p-\frac{i(q+tb(q)-y)}{a(q)t})^2}{2}} dp \phi(y) dy = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-(q+tb(q)))^2}{2a(q)t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(p-\frac{i(q+tb(q)-y)}{a(q)t})^2}{2}} dp \phi(y) dy = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-(q+tb(q)))^2}{2a(q)t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(p-\frac{i(q+tb(q)-y)}{a(q)t})^2}{2}} d \left[p - \frac{i(q+tb(q)-y)}{a(q)t} \right] \phi(y) dy = \\
&= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{a(q)t}} e^{-\frac{(y-(q+tb(q)))^2}{2a(q)t}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi a(q)t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-(q+tb(q)))^2}{2a(q)t}} \phi(y) dy.
\end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
\|F(t)\phi\|_{C_\infty(\mathbb{R})} &\leq \sup_{q \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi a(q)t}} e^{tc(q)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-(q+tb(q)))^2}{2a(q)t}} \phi(y) dy \right| \leq \\
&\leq \sup_{q \in \mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi a(q)t}} e^{tc(q)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-(q+tb(q)))^2}{2a(q)t}} |\phi(y)| dy \leq \\
&\leq \sup_{q \in \mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi a(q)t}} e^{tc(q)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-(q+tb(q)))^2}{2a(q)t}} d \left[y - (q + tb(q)) \right] \|\phi\|_{C_\infty(\mathbb{R})} \leq \\
&\leq e^{t \sup_{q \in \mathbb{R}} c(q)} \|\phi\|_{C_\infty(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана. ►

Лемма 5. Для любого $t \geq 0$ существует единственное продолжение оператора $F(t)$ до ограниченного линейного отображения из $C_\infty(\mathbb{R})$ в $C_\infty(\mathbb{R})$ с сохранением нормы.

◀ Согласно теореме об ограниченном линейном отображении (см. [15]), для ограниченного оператора, определенного на подпространстве банахова пространства, такое продолжение существует и единственно. Оператор $F(t)$, для любого $t \in [0, +\infty)$, ограничен как отображение из $S(\mathbb{R})$ в $C_\infty(\mathbb{R})$. Кроме того, $S(\mathbb{R})$ плотно в $C_\infty(\mathbb{R})$. Следовательно, существует единственное продолжение $F(t)$ из $C_\infty(\mathbb{R})$ в себя с сохранением нормы. Это продолжение мы по-прежнему будем обозначать $F(t)$. ▶

Лемма 6. Семейство $F(t)$ сильно непрерывно на $C_\infty(\mathbb{R})$.

◀ Пусть сначала $\phi \in S(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \|F(t)\phi - F(t_0)\phi\|_{C_\infty(\mathbb{R})} &= \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \sup_{q \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tc(q)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a(q)tp^2}{2}} e^{ip(q+tb(q))} [\mathcal{F}\phi](p) dp - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t_0c(q)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a(q)t_0p^2}{2}} e^{ip(q+t_0b(q))} [\mathcal{F}\phi](p) dp \right| = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \sup_{q \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipq} [\mathcal{F}\phi](p) [e^{tc(q)} e^{-\frac{a(q)tp^2}{2}} e^{iptb(q)} - \right. \\ &\quad \left. e^{t_0c(q)} e^{-\frac{a(q)t_0p^2}{2}} e^{ipt_0b(q)}] dp \right|. \end{aligned}$$

Предел

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \sup_{(q,p) \in [p^*, p^{**}] \times [q^*, q^{**}]} \left| e^{ipq} [\mathcal{F}\phi](p) [e^{tc(q)} e^{-\frac{a(q)tp^2}{2}} e^{iptb(q)} - e^{t_0c(q)} e^{-\frac{a(q)t_0p^2}{2}} e^{ipt_0b(q)}] \right|$$

существует на каждом компакте $[p^*, p^{**}] \times [q^*, q^{**}] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и равен нулю, в силу непрерывности функций под знаком предела.

Таким образом, выполнены условия теоремы о предельном переходе в несобственном интеграле и имеет место перестановка предельных переходов:

$$\sup_{q \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow t_0} e^{ipq} [\mathcal{F}\phi](p) [e^{tc(q)} e^{-\frac{a(q)tp^2}{2}} e^{iptb(q)} - e^{t_0c(q)} e^{-\frac{a(q)t_0p^2}{2}} e^{ipt_0b(q)}] dp \right|.$$

Интеграл равен нулю, так как подынтегральная функция равна нулю. Таким образом, $\lim_{t \rightarrow t_0} \|F(t)\phi - F(t_0)\phi\|_{C_\infty(\mathbb{R})} = 0$ для любого $\phi \in S(\mathbb{R})$.

Так как $S(\mathbb{R})$ плотно в $C_\infty(\mathbb{R})$, то для любого $\epsilon > 0$ и любой $\psi \in C_\infty(\mathbb{R})$ существует функция $\phi_\epsilon \in S(\mathbb{R})$, такая что $\|\psi - \phi_\epsilon\|_{C_\infty(\mathbb{R})} < \frac{\epsilon}{3M}$, где M наибольшая из норм $\|F(t_0)\|$ и $\|F(t)\|$. Тогда

$$\begin{aligned} \|F(t_0)\psi - F(t)\psi\|_{C_\infty(\mathbb{R})} &= \\ &= \|F(t_0)\psi - F(t_0)\phi_\epsilon + F(t_0)\phi_\epsilon - F(t)\phi_\epsilon + F(t)\phi_\epsilon - F(t)\psi\|_{C_\infty(\mathbb{R})} \leq \\ &\leq \|F(t_0)\psi - F(t_0)\phi_\epsilon\|_{C_\infty(\mathbb{R})} + \|F(t_0)\phi_\epsilon - F(t)\phi_\epsilon\|_{C_\infty(\mathbb{R})} + \\ &\quad + \|F(t)\phi_\epsilon - F(t)\psi\|_{C_\infty(\mathbb{R})} \leq \\ &\leq \|F(t_0)\| \cdot \|\psi - \phi_\epsilon\|_{C_\infty(\mathbb{R})} + \|F(t_0)\phi_\epsilon - F(t)\phi_\epsilon\|_{C_\infty(\mathbb{R})} + \|F(t)\| \cdot \|\phi_\epsilon - \psi\|_{C_\infty(\mathbb{R})} \leq \\ &\leq M \cdot \frac{\epsilon}{3M} + M \cdot \frac{\epsilon}{3M} + M \cdot \frac{\epsilon}{3M} = \epsilon. \end{aligned}$$

Из произвольности ϵ следует что $(F(t))_{t \geq 0}$ сильно непрерывно. ►

Пусть теперь $\epsilon(t)$ — гладкая функция монотонно убывающая к нулю при $t > 0$, $t \rightarrow 0$, такая что $\epsilon(t) = o(t)$. Например, $\epsilon(t) = c \arctg(t)$ для некоторого $c : 0 < c < \frac{1}{\pi} \text{diam}(G)$. Определим множество $G_{\epsilon(t)}$ следующим образом: $G_{\epsilon(t)} = \{q \in G : \text{dist}(q, \partial G) > \epsilon(t)\}$. Пусть $\{\psi_{\epsilon(t)}(q)\}_{t>0} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ — семейство бесконечно дифференцируемых на G функций, таких что $\psi_{\epsilon(t)}(q) = 1$ при $q \in G_{\epsilon(t)}$, $\psi_{\epsilon(t)}(q) = 0$ при $q \in \mathbb{R} \setminus G$ и $\psi_{\epsilon(t)}(q) \in [0, 1]$ при $q \in G \setminus G_{\epsilon(t)}$. При $t \rightarrow 0$ семейство $\psi_{\epsilon(t)}$ аппроксимирует индикатор области G в смысле поточечной сходимости. Будем считать, что отображение $\Psi(t, q) = \psi_{\epsilon(t)}(q)$ непрерывно по совокупности переменных t и q .

Рассмотрим композицию операторов: $\tilde{F}(t) = F_\epsilon(t)F(t)$, где

$$F_\epsilon(t)\phi(q) = \psi_{\epsilon(t)}(q)\phi(q)$$

для $\phi \in C_0(\overline{G}) \subset C_\infty(\mathbb{R})$. Тогда

$$\tilde{F}(t) : C_0(\overline{G}) \rightarrow C_0(\overline{G}).$$

При этом, для любого $\phi \in D$ справедливо представление

$$[\tilde{F}(t)\phi](q) = \frac{\psi_{\epsilon(t)}(q)e^{tc(q)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a(q)tp^2}{2}} e^{itpb(q)} e^{ip(q-q_0)} \tilde{\phi}(q_0) dq_0 dp.$$

Теорема 2. Пусть $a(\cdot), b(\cdot), c(\cdot) \in C_b(\mathbb{R})$. Пусть существует сильно непрерывная полугруппа $(T_t^1)_{t \geq 0}$ на пространстве $C_0(\overline{G})$, разрешающая задачу Коши-Дирихле (4) при $\tau = 1$. Пусть $D := \{\phi \in C_0^\infty(\overline{G}) \mid L^1\phi \in C_0(\overline{G})\}$ — существенная область определения генератора $(L^1, Dom(L^1))$ этой полугруппы. Тогда семейство операторов $\tilde{F}(t)_{t \geq 0}$ на пространстве $C_0(\overline{G})$ эквивалентно по Чернову полугруппе, разрешающей задачу Коши-Дирихле (4) при $\tau = 1$.

◀ В первую очередь, докажем, что сильная производная в нуле $\tilde{F}(t)$ совпадает с генератором полугруппы на существенной области определения D .

Покажем, что $[\tilde{F}(t)\phi](q) = \phi(q) + tL^1\phi(q) + o(t)$ равномерно по $q \in \overline{G}$ при $t \rightarrow 0$. Используя результат леммы 3 получим:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(t)\tilde{\phi}(q) &= F_\epsilon(t)F(t)\tilde{\phi}(q) = \\ &= F_\epsilon(t)\left[\tilde{\phi}(q) + \frac{t}{2}\Delta_a\tilde{\phi}(q) + tb(q)\nabla\tilde{\phi}(q) + tc(q)\tilde{\phi}(q) + o(t)\right] = \\ &= \psi_{\epsilon(t)}\left(\tilde{\phi}(q) + \frac{t}{2}\Delta_a\tilde{\phi}(q) + tb(q)\nabla\tilde{\phi}(q) + tc(q)\tilde{\phi}(q) + o(t)\right)\end{aligned}$$

для любого $\tilde{\phi} \in \tilde{D}$ равномерно по $q \in \mathbb{R}$.

При $q \in G_{\epsilon(t)}$ $\psi_{\epsilon(t)}(q) = 1$ и

$$[\tilde{F}(t)\phi](q) = \phi(q) + \frac{1}{2}\Delta_a\phi(q) + b(q)\nabla\phi(q) + c(q)\phi(q) + o(t)$$

равномерно по $q \in G_{\epsilon(t)}$ при $t \rightarrow 0$. При $q \in \mathbb{R} \setminus G$, $\psi_{\epsilon(t)}(q) = 0$ и

$$[\tilde{F}(t)\phi](q) = 0 = \phi(q) + \frac{1}{2}\Delta_a\phi(q) + b(q)\nabla\phi(q) + c(q)\phi(q) + o(t)$$

равномерно по $q \in \mathbb{R} \setminus G$ при $t \rightarrow 0$. Если $q \in G \setminus G_{\epsilon(t)}$, то

$$|\tilde{F}(t)\phi(q) - \phi(q) - tL^1\phi(q)| = |(1 - \psi_{\epsilon(t)}(q))(\phi(q) + tL^1\phi(q)) + o(t)|$$

при $t \rightarrow 0$. Функцию $\phi \in D$ на множестве $G \setminus G_{\epsilon(t)}$ можно разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $q \in \overline{G}$. Разложение примет вид:

$$\phi(q) = \phi(q^*) + \phi^{(1)}(\vartheta q + (1 - \vartheta q^*))(q - q^*),$$

где $q^* \in \partial G$ такое что $\|q - q^*\| \leq o(t)$,

$$|\phi(q)| = |\phi^{(1)}(\vartheta q + (1 - \vartheta q^*))(q - q^*)| \leq |\phi^{(1)}(\vartheta q + (1 - \vartheta q^*))|o(t) \leq o(t)$$

равномерно по $q \in G \setminus G_{\epsilon(t)}$.

Так как $L^1\phi \in C_0^\infty(\overline{G})$, то $L^1\phi(q) \rightarrow 0$ равномерно по $q \in G \setminus G_{\epsilon(t)}$ при $t \rightarrow 0$. Следовательно, $|\tilde{F}(t)\phi(q) - \phi(q) - tL^1\phi(q)| \leq o(t)$, равномерно по $q \in G \setminus G_{\epsilon(t)}$. Таким образом, для $\phi \in D$ равномерно по $q \in \overline{G}$ при $t \rightarrow 0$ выполняется равенство $\tilde{F}(t)\phi(q) = \phi(q) + tL^1\phi(q) + o(t)$. Этим доказано, что сильная производная в нуле на множестве D , совпадает с генератором разрешающей полугруппы.

Для композиции операторов

$$\|\tilde{F}(t)\| = \|F_\epsilon(t)F(t)\| \leq \|F_\epsilon(t)\| \cdot \|F(t)\| \leq e^{t \sup_{q \in \mathbb{R}} c(q)},$$

так как $\|F_\epsilon(t)\| = 1$. Таким образом, норма $\|\tilde{F}(t)\|$ удовлетворяет условию теоремы Чернова.

В силу условий, наложенных на $\{\psi_{\epsilon(t)}\}$, семейство $F_\epsilon(t)$ сильно непрерывно на $C_\infty(\mathbb{R})$. Тогда $\tilde{F}(t)$ сильно непрерывно как композиция сильно непрерывных семейств операторов. Так как $C_0(\overline{G}) \subset C_\infty(\mathbb{R})$, то $\tilde{F}(t)$ сильно непрерывно на $C_0(\overline{G})$.

Таким образом, выполняются все условия теоремы Чернова и доказана эквивалентность по Чернову семейства $(\tilde{F}(t))_{t \geq 0}$ для полугруппы $(T_t^1)_{t \geq 0}$, т.е.

$$T_t^1 = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} [\tilde{F}(t/n)]^n.$$

Тем самым, доказательство теоремы 2 закончено. ►

Из доказанной теоремы следует, что для решения задачи 4 при $\tau = 1$ справедлива гамильтонова формула Фейнмана:

$$\begin{aligned} f(t, q_0) = & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{2n} \prod_{j=1}^n \psi_{\epsilon(\frac{t}{n})}(q_{j-1}) e^{\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n c(q_{j-1})} e^{i \frac{t}{n} \sum_{j=1}^n b(q_{j-1})p_j} e^{-\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n \frac{a(q_{j-1})p_j^2}{2}} \times \\ & \times e^{i \sum_{j=1}^n p_j(q_{j-1} - q_j)} \tilde{f}_0(q_n) dq_n dp_n dq_{n-1} dp_{n-1} \dots dq_1 dp_1. \end{aligned}$$

Преобразуем вид формулы Фейнмана. Прежде всего заметим, что при $n = 1$

$$\frac{1}{2\pi} e^{tc(q)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a(q)tp^2}{2}} e^{ip(q+b(q))} e^{-ipy} \phi(y) dy dp =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi a(q)t}} e^{tc(q)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-(q+tb(q)))^2}{2a(q)t}} \phi(y) dy. \quad (5)$$

Распространяя преобразование на произвольное n , получим

$$f(t, q_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^n \psi_{\epsilon(t/n)}(q_{j-1}) e^{\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n V(q_{j-1})} e^{\sum_{j=1}^n \frac{b(q_{j-1})(q_j - q_{j-1})}{a(q_{j-1})}} \times \\ p_a(t/n, q_0, q_1) \dots p_a(t/n, q_{n-1}, q_n) \tilde{f}_0(q_n) dq_1 \dots dq_n, \quad (6)$$

$$\text{где } V(q_{j-1}) = c(q_{j-1}) - \frac{tb(q_{j-1})^2}{2a(q_{j-1})} \text{ и } p_a(t, q_{j-1}, q_j) = \frac{1}{\sqrt{a(q_{j-1})(2\pi t)^m}} e^{-\frac{(q_{j-1}-q_j)^2}{2ta(q_{j-1})}}.$$

В работе [5] показано, что ни скорость сходимости $\epsilon(t) \rightarrow 0$ (если она $o(t)$), ни выбор семейства $\{\psi_{\epsilon(t)}\}$, аппроксимирующего область при $t \rightarrow 0$, не влияют на предел в последней формуле, а поэтому

$$f(t, q_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^n \psi_{\epsilon(t/n)}(q_{j-1}) e^{\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n V(q_{j-1})} e^{\sum_{j=1}^n \frac{b(q_{j-1})(q_j - q_{j-1})}{a(q_{j-1})}} \times \\ p_a(t/n, q_0, q_1) \dots p_a(t/n, q_{n-1}, q_n) \tilde{f}_0(q_n) dq_1 \dots dq_n = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G \dots \int_G e^{\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n V(q_{j-1})} e^{\sum_{j=1}^n \frac{b(q_{j-1})(q_j - q_{j-1})}{a(q_{j-1})}} \times \\ \times p_a(t/n, q_0, q_1) \dots p_a(t/n, q_{n-1}, q_n) \tilde{f}_0(q_n) dq_1 \dots dq_n. \quad (7)$$

Выполняя обратное преобразование при $G = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, получим

$$f(t, q_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\alpha}^{\beta}}_{2n} e^{\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n c(q_{j-1})} e^{i \frac{t}{n} \sum_{j=1}^n b(q_{j-1}) p_j} e^{-\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n \frac{a(q_{j-1}) p_j^2}{2}} \times \\ \times e^{i \sum_{j=1}^n p_j (q_{j-1} - q_j)} \tilde{f}_0(q_n) dq_n dp_n dq_{n-1} dp_{n-1} \dots dq_1 dp_1. \quad (8)$$

6. Формула Фейнмана для полугруппы, разрешающей задачу Коши–Дирихле при произвольном $\tau \in [0, 1]$

Теперь рассмотрим задачу Коши–Дирихле (4) при произвольном $\tau \in [0, 1]$.

Теорема 3. Пусть $a(\cdot) \in C_b^2(\mathbb{R})$, $b(\cdot) \in C_b^1(\mathbb{R})$, $c(\cdot) \in C_b(\mathbb{R})$ и для любого $\tau \in [0, 1]$ существует сильно непрерывная полугруппа $(T_t^\tau)_{t \geq 0}$ на пространстве $C_0(\overline{G})$, разрешающая задачу Коши-Дирихле (4). Пусть $D^\tau := \{\phi \in C_0^\infty(\overline{G}) \mid L^\tau \phi \in C_0(\overline{G})\}$ — существенная область определения генератора $(L^\tau, \text{Dom}(L^\tau))$ полугруппы $(T_t^\tau)_{t \geq 0}$. Тогда решение задачи Коши-Дирихле (4) представляется в виде гамильтоновой формулы Фейнмана:

$$f_\tau(t, q_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\alpha}^{\beta}}_{2n} e^{\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n [(1-\tau)^2 a''(q_{j-1}) + (1-\tau)b'(q_{j-1}) + c(q_{j-1})]} \times \\ \times e^{i \frac{t}{n} \sum_{j=1}^n [b(q_{j-1}) + 2(1-\tau)a'(q_{j-1})] p_j} e^{-\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n \frac{a(q_{j-1})p_j^2}{2}} \times \\ \times e^{i \sum_{j=1}^n p_j(q_{j-1} - q_j)} f_0(q_n) dq_n dp_n dq_{n-1} dp_{n-1} \dots dq_1 dp_1,$$

для любой $f_0 \in C_0(\overline{G})$.

◀ Выше было доказано, что решение задачи Коши-Дирихле (4) при $\tau = 1$ представляется формулой Фейнмана

$$f(t, q_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\alpha}^{\beta}}_{2n} e^{\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n c(q_{j-1})} e^{i \frac{t}{n} \sum_{j=1}^n b(q_{j-1}) p_j} e^{-\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n \frac{a(q_{j-1})p_j^2}{2}} \times \\ \times e^{i \sum_{j=1}^n p_j(q_{j-1} - q_j)} f_0(q_n) dq_n dp_n dq_{n-1} dp_{n-1} \dots dq_1 dp_1.$$

Заметим, что по лемме 1

$$\begin{aligned} \widehat{H}_\tau(q, D) &= a(q) \frac{\partial^2}{\partial q^2} \phi(q) + [b(q) + 2(1-\tau)a'(q)] \frac{\partial}{\partial q} \phi(q) + \\ &+ [(1-\tau)^2 a''(q) + (1-\tau)b'(q) + c(q)] \phi(q) = \\ &= a(q) \frac{\partial^2}{\partial q^2} \phi(q) + b_\tau(q) \frac{\partial}{\partial q} \phi(q) + c_\tau(q) \phi(q), \end{aligned}$$

где $b_\tau(q) = b(q) + 2(1-\tau)a'(q)$, $c_\tau(q) = (1-\tau)^2 a''(q) + (1-\tau)b'(q) + c(q)$.

Таким образом, сужение оператора $\widehat{H}_\tau(q, D)$ на множество $C_c^\infty(\mathbb{R})$ совпадает с 1-квантованием символа $H^\tau(p, q) = a(q)(ip)^2 + b_\tau(q)ip + c_\tau(q)$. Так

как $a(\cdot) \in C_b^2(\mathbb{R})$, $b(\cdot) \in C_b^1(\mathbb{R})$, $c(\cdot) \in C_b(\mathbb{R})$, то $a(q)$, $b_\tau(q)$, $c_\tau(q)$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда из теоремы 2, теоремы 3 и леммы 1 следует гамильтонова формула Фейнмана:

$$\begin{aligned} f_\tau(t, q_0) &\equiv T_t^\tau f_0(q_0) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\alpha}^{\beta}}_{2n} e^{\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n [(1-\tau)^2 a''(q_{j-1}) + (1-\tau) b'(q_{j-1}) + c(q_{j-1})]} \times \\ &\quad \times e^{i \frac{t}{n} \sum_{j=1}^n [b(q_{j-1}) + 2(1-\tau) a'(q_{j-1})] p_j} e^{-\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n \frac{a(q_{j-1}) p_j^2}{2}} e^{i \sum_{j=1}^n p_j (q_{j-1} - q_j)} \times \\ &\quad \times f_0(q_n) dq_n dp_n dq_{n-1} dp_{n-1} \dots dq_1 dp_1, \quad (9) \end{aligned}$$

где $f_0 \in C_0(\overline{G})$. ►

З а м е ч а н и е 1. Пользуясь конструкцией гамильтонова интеграла Фейнмана, введенной в работах [23], [7], [1], можно показать, что правая часть гамильтоновой формулы Фейнмана (9) совпадает с интегралом Фейнмана по множеству $E_t^{q_0}$ траекторий $(q(s), p(s))$ в фазовом пространстве $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R}$ таких, что $q(0) = q_0$:

$$\begin{aligned} f_\tau(t, q_0) &\equiv T_t^\tau f_0(q_0) = \\ &= \int_{E_t^{q_0}} e^{\int_0^t [(1-\tau)^2 a''(q(s)) + (1-\tau) b'(q(s)) + c(q(s))] ds} \times \\ &\quad \times e^{i \int_0^t [b(q(s)) + 2(1-\tau) a'(q(s))] p(s) ds} e^{-\int_0^t \frac{a(q(s)) p^2(s)}{2} ds} f_0(q(t)) \Phi_{q_0}^1(dq dp), \end{aligned}$$

7. Заключение

В настоящей работе рассмотрено семейство параболических уравнений второго порядка, порожденных различными видами квантования квадратичной функции Гамильтона некоторой классической системы. Решение задачи Коши–Дирихле для рассмотренного семейства уравнений на отрезке представлено в виде гамильтоновой формулы Фейнмана, то есть в виде предела конечно-кратных интегралов от элементарных функций при стремлении кратности к бесконечности.

Тем самым, в работе получена новая формула, пригодная для непосредственных вычислений решения поставленной задачи и компьютерного моделирования соответствующей динамики. В работе также обсуждается связь между дифференциальными операторами, соответствующими различным типам квантования квадратичной функции Гамильтона, и связь полученной гамильтоновой формулы Фейнмана с интегралами Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве.

Авторы благодарят профессора О.Г. Смолянова за полезные дискуссии и внимание. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации МК-943.2010.1. и гранта РФФИ 10-01-00724-а.

Список литературы

1. Boettcher B., Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O. G. Feynman formulae and path integrals for some evolution semigroups related to tau-quantization // Rus. J. Math. Phys., Vol. 18 N 4 (2011), Pp. 381-399.
2. Бутко Я.А. Формулы Фейнмана и функциональные интегралы для диффузии со сносом в области многообразия // Мат. Заметки. 2008 Т.83. N 3. С.333-349.
3. Butko Ya.A., Function integrals corresponding to a solution of the Cauchy-Dirichlet problem for the heat equation in a domain of a Riemannian manifold // J. of Math. Sci. 2008. V.151. N. 1.P. 2629-2638.
4. Бутко Я.А., Гротхаус М., Смолянов О.Г. Формула Фейнмана для класса параболических уравнения второго порядка в ограниченной области // Доклады РАН. 2008. Т. 421. N 6. С. 727-732.
5. Butko Ya.A., Grothaus M., Smolyanov O.G. Lagrangian Feynman Formulae for Second Order Parabolic Equations in Bounded and Unbounded Domains //IDAQP 2010. V.13. N. 3. P. 377-392.
6. Бутко Я.А.,Смолянов О.Г., Шиллинг Р.Л. Формулы Фейнмана для феллеровских полугрупп //Доклады РАН. 2010.Т.434. №1.С.7-11.
7. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Hamiltonian Feynman-Kac and Feynman formulae for dynamics of particles with position-dependent mass //Int. J. Theor. Phys. 2011. V. 50. P. 2009-2018.

8. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G., Lagrangian and Hamiltonian Feynman formulae for some Feller semigroups and their perturbations //IDAQP. 2011, to appear.
9. Chernoff P. Product formulas, nonlinear semigroups and addition of unbounded operators //Mem. Am. Math. Soc. 1974.140.
10. Feynman R.P. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics //Rev. Mod. Phys. 1948. 20. P. 367-387.
11. Feynman R.P. An Operation Calculus Having Application in Quantum Electrodynamics // Phys. Rev. 1951.84.P.108-128.
12. Gadella M., Smolyanov O.G. Feynman Formulas for Particles with Position-Dependent Mass// Doklady Math. 2007. 77. N.1. P.120-123.
13. Jacob N. Pseudo-differential operators and Markov processes // Imperial College Press. 2001.Vol. 1-3.
14. Obrezkov O., Smolyanov O.G., Truman A., The Generalized Chernoff Theorem and Randomized Feynman Formula //Doklady Math. 2005. 71.N. 1. P.105-110.
15. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Издательство Мир. Москва.1977. т.1
16. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Издательство Мир. Москва.1977. т.2
17. Sakbaev V.G., Smolyanov O.G. Dynamics of a Quantum Particle with Discontinuous Position-Dependent Mass //Dokl. Math. 2010. 82. N. 1. P.630–634.
18. Smolyanov O.G., Feynman type formulae for quantum evolution and diffusion on manifolds and graphs //Quant. Bio-Informatics, World Sc. 2010. 3. P.337–347.
19. Smolyanov O.G., Shamarov N.N. Feynman and Feynman-Kac formulae for evolution equations with Vladimirov operator // Doklady Math. 2008. 77. P.345-349.
20. Smolyanov O.G., Shamarov N. N. Hamiltonian Feynman Integrals for Equations with the Vladimirov Operator //Dokl. Math. 2010. 81. N. 2. P.209-214.
21. Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Континуальные интегралы. Изд-во МГУ. Москва. 1990.

22. Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Носитель симплектической меры Фейнмана и принцип неопределенности // Доклады А.Н. 1992. Т.323. N 6. С.1038-1042.
23. Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula // J. Math. Phys. 2002. 43. N. 10. P. 5161-5171.
24. Smolyanov O.G., Weizsacker H.v. and Wittich O., Diffusion on compact Riemannian manifolds, and surface measures // Doklady Math. 2000. V. 61. P.230–234.
25. Smolyanov O.G., Weizsacker H. v., Wittich O. Brownian Motion on a Manifold as Limit of Stepwise Conditioned Standard Brownian Motions // Stochastic Processes, Physics and Geometry: New Interplays. II: A Volume in Honor of Sergio Albeverio. Ser. Conference Proceedings. Canadian Math. Society. Providence: AMS. 2000. 29. P.589-602.
26. Smolyanov O.G., Weizsäcker H.v., Wittich O. Chernoff's theorem and the construction of semigroups // Evolution Equations: Applications to Physics, Industry, Life Sciences and Economics. Proc. 7th Intl. Conf. Evolution Eqs and Appl., Levico Terme, Italy, Oct./Nov. 2000. Birkhauser, Prog. Nonlinear Differ. Eq. Appl. 2003. V. 55. P.349-358.
27. Smolyanov O.G., Weizsäcker H.v., Wittich O. Surface Measures and Initial Boundary Value Problems Generated by Diffusions with Drift // Doklady Math. 2007. V. 76. N. 1. P.606-610.
28. Smolyanov O.G., Weizsäcker H. v., Wittich O. Chernoff's Theorem and Discrete Time Approximations of Brownian Motion on Manifolds // 2007. Potent. Anal. V. 26. N. 1. P. 1-29.
29. Telyatnikov I.V., Smolyanov O.G., Weizsacker H.v. surface measures generated by diffusions on the set of trajectories in Riemannian manifolds // IDAQP 2008. V. 11. N .1. P.21-31.

Feynman formulae for a family of parabolic equations corresponding to the tau-quantization of a quadratic Hamilton function**77-30569/251251**

10, October 2011

Ya. Butko, A. Duryagin

Bauman Moscow State Technical University
yanabutko@yandex.ru, avduryagin@mail.ru

In the present article a set of second order parabolic equations, generated by different types of quantization of a quadratic Hamilton function, is considered. The solution of the Cauchy–Dirichlet problem for this set of equations on a segment is represented by a Hamiltonian Feynman formula, that is by a limit of the n -fold iterated integrals of elementary functions, when n tends to infinity. Therefore, a new formula, suitable for the numerical solution of the considered problem and for the computer modeling of the corresponding dynamics, is obtained. The connection between the differential operators, corresponding to different types of quantization of a quadratic Hamilton function, and the connection between the obtained Hamiltonian Feynman formula and phase space Feynman path integrals are also discussed in this article.

References

1. Boettcher B., Butko Ya. A., Schilling R.L., Smolyanov O. G. Feynman formulae and path integrals for some evolution semigroups related to tau-quantization // Rus. J. Math. Phys., Vol. 18 N 4 (2011), Pp. 381-399.
2. Butko Ya.A. Feynman formulas and functional integrals for diffusion with drift in a domain on a manifold //Math. Notes. 2008. V. 83. N. 3-4. P. 301-316.
3. Butko Ya.A., Function integrals corresponding to a solution of the Cauchy-Dirichlet problem for the heat equation in a domain of a Riemannian manifold // J. of Math. Sci. 2008. V.151. N. 1.P. 2629-2638.
4. Butko Ya.A, Grothaus M., Smolyanov O.G. Feynman Formula for a Class of Second-Order Parabolic Equations in a Bounded Domain //Doklady Math. 2008. V. 78. N. 1. P. 590-595.

5. Butko Ya.A, Grothaus M., Smolyanov O.G. Lagrangian Feynman Formulae for Second Order Parabolic Equations in Bounded and Unbounded Domains //IDAQP 2010. V.13. N. 3. P. 377-392.
6. Butko Ya.A, Schilling R.L., Smolyanov O.G. Feynman formulae for Feller semigroups //Doklady Math. 2010. V.82. N.2. P. 679-683.
7. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Hamiltonian Feynman-Kac and Feynman formulae for dynamics of particles with position-dependent mass //Int. J. Theor. Phys. 2011, 2009-2018. V.50.
8. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G., Lagrangian and Hamiltonian Feynman formulae for some Feller semigroups and their perturbations //IDAQP. 2011 to appear.
9. Chernoff P. Product formulas, nonlinear semigroups and addition of unbounded operators //Mem. Am. Math. Soc. 1974.V.140.
10. Feynman R.P. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics //Rev. Mod. Phys. 1948. V.20. P. 367-387.
11. Feynman R.P. An Operation Calculus Having Application in Quantum Electrodynamics // Phys. Rev. 1951.V.84.P.108-128.
12. Gadella M., Smolyanov O.G. Feynman Formulas for Particles with Position-Dependent Mass// Doklady Math. 2007. V.77. N.1.P.120-123.
13. Jacob N. Pseudo-differential operators and Markov processes // Imperial College Press. 2001.V.1-3.
14. Obrezkov O., Smolyanov O.G., Truman A., The Generalized Chernoff Theorem and Randomized Feynman Formula //Doklady Math. 2005. 71.N. V.1. P.105-110.
15. Sakbaev V.G., Smolyanov O. G. Dynamics of a Quantum Particle with Discontinuous Position-Dependent Mass //Dokl. Math. 2010. V.82. N. 1. P.630–634.
16. Smolyanov O.G., Feynman type formulae for quantum evolution and diffusion on manifolds and graphs //Quant. Bio-Informatics, World Sc. 2010. V.3. P.337–347.
17. Smolyanov O.G., Shamarov N.N. Feynman and Feynman-Kac formulae for evolution equations with Vladimirov operator // Doklady Math. 2008. V.77. P.345-349.
18. Smolyanov O.G., Shamarov N. N. Hamiltonian Feynman Integrals for Equations with the Vladimirov Operator //Dokl. Math. 2010.V. 81. N. 2. P.209-214.
19. Smolyanov O.G., Shavgulidze E.T. Kontinualnye integraly .in Russian. Moscow State University Press. 1990.
20. Smolyanov O.G. , Shavgulidze E.T.. Th support of symplectic Feynman measure and uncertainty principle. //in Russian.Dokl. Acad. Nauk USSR. 1992. V.323. N.

6. P.1038-1042.

21. Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula // J. Math. Phys. 2002. V.43. N. 10. P. 5161-5171.
22. Smolyanov O.G., Weizsacker H.v. and Wittich O., Diffusion on compact Riemannian manifolds, and surface measures //Doklady Math.2000.V.61. P.230–234.
23. Smolyanov O.G., Weizsacker H. v., Wittich O. Brownian Motion on a Manifold as Limit of Stepwise Conditioned Standard Brownian Motions //Stochastic Proceses, Physics and Geometry: New Interplays. II: A Volume in Honor of Sergio Albeverio. Ser. Conference Proceedings. Canadian Math. Society. Providence: AMS. 2000. V.29.P.589-602.
24. Smolyanov O.G., Weizsacker H.v., Wittich O. Chernoff's theorem and the construction of semigroups //Evolution Equations: Applications to Physics, Industry, Life Sciences and Economics. Proc. 7th Intl. Conf. Evolution Eqs and Appl., Levico Terme, Italy, Oct./Nov. 2000. Birkhauser, Prog. Nonlinear Differ. Eq. Appl. 2003.V.55. P.349-358.
25. Smolyanov O.G., Weizsacker H.v., Wittich O. Surface Measures and Initial Boundary Value Problems Generated by Diffusions with Drift //Doklady Math. 2007. V.76. N. 1. P.606-610.
26. Smolyanov O.G., Weizsacker H. v., Wittich O. Chernoff's Theorem and Discrete Time Approximations of Brownian Motion on Manifolds // 2007. Potent. Anal. V.26. N. 1. P. 1-29.
27. Telyatnikov I.V., Smolyanov O.G., Weizsacker H.v. surface measures generated by diffusions on the set of trajectories in Riemannian manifolds //IDAQP 2008. V.11. N .1. P.21-31.
28. Reed M., Simon B. Methods of modern mathematical phisycs. Academic press New York London. 1972. V.1
29. Reed M., Simon B. Methods of modern mathematical phisycs. Academic press New York London. 1975. V.2