электронное научно-техническое издание

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 30569. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

Представление решения задачи Коши — Неймана для параболического уравнения на полупрямой с помощью лагранжевой формулы Фейнмана

77-30569/246219

 # 10, октябрь 2011

Я. А. Бутко, А. В. Морозов

УДК 517.987.4

МГТУ им. Н.Э. Баумана
lk4d4math@gmail.com
yanabutko@yandex.ru

1. Введение

В работе рассматривается задача Коши — Неймана для параболического уравнения на полупрямой с переменными коэффициентами, зависящими от координаты. Решение задачи представляется в виде предела кратных интегралов от элементарных функций, содержащих коэффициенты уравнения и начальные условия, при возрастании кратности к бесконечности. Такие формулы называются «формулами Фейнмана». Подобные представления решений эволюционных уравнений можно использовать для непосредственных вычислений и компьютерного моделирования исследуемой динамики. Кроме того, пределы конечнократных интегралов в формулах Фейнмана совпадают с некоторыми функциональными интегралами по некоторым вероятностным мерам на множестве траекторий в тех областях, на которых рассматриваются уравнения. Представления решений эволюционных уравнений с помощью функциональных интегралов обычно называются формулами Фейнмана — Каца. Подобные представления полезны для исследования характера решений эволюционных уравнений, в том числе и методами стохастического анализа. Таким образом, формулы Фейнмана позволяют аппроксимировать функциональные интегралы, а следовательно и переходные вероятности соответствующих случайных процессов (обычно не выражающиеся через элементарные функции). Метод получения формул Фейнмана для эволюционных уравнений был предложен в работах О.Г. Смолянова и его соавторов в 1999–2003 гг. [11,12,13,21,22,23]. Данный метод основан на применении теоремы Чернова и позволяет получать формулы Фейнмана и Фейнмана — Каца для обширного класса эволюционных уравнений на различных геометрических структурах (см., например, [4,5,6,17,19,20]).

2. Предварительные сведения

Теорема 1 (Чернов). Пусть X — банахово пространство, $L(X)$ — пространство непрерывных линейных операторов на X с сильной операторной топологией. Пусть отображение $F : [0, +\infty) \to L(X)$ непрерывно, $F(0) = \mathrm{Id}$, $\|F(t)\| \leqslant e^{at}$ с некоторой постоянной $a \in \mathbb{R}^1$, причем есть такое плотное линейное подпространство $D \subset X$, что для всех $x \in D$ существует $F'(0)x$. Предположим, что $F'(0)$ на D обладает замыканием C, являющимся генератором сильно непрерывной полугруппы $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$. Тогда для всякого $x \in X$ имеем $F(t/n)^n x \to T_t x$ при $n \to \infty$ равномерно по t из всякого отрезка.

Семейство операторов $(F(t))_{t\geqslant 0})$ называют *эквивалентным по Чернову* полугруппе $(T_t)_{t\geqslant 0}$, если это семейство удовлетворяет всем условиям теоремы Чернова по отношению к этой полугруппе. Если все $F(t)$ — это интегральные операторы, ядра которых являются элементарными функциями, то формула

$$T_t x = \lim_{n\to\infty} F(t/n)^n x$$

называется лагранжевой формулой Фейнмана.

3. Задача Коши — Неймана для параболического уравнения на полупрямой

Пусть $C^b[0, \infty)$ — банахово пространство непрерывных ограниченных на бесконечности функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,\infty)} |f(x)|$. Пусть оператор N определен на области

$$\mathrm{Dom}\, N = \left\{\varphi \in C^b[0, \infty)\colon\ \varphi'(0) = 0,\ N\varphi \in C^b[0, \infty)\right\}$$

и действует следующим образом:

$$N\varphi(x) = \frac{a}{2}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + b(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} + V(x)\varphi(x),$$

где $a > 0$; $b(\cdot), V(\cdot)\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ — ограниченные и непрерывные функции.

Рассмотрим следующую задачу Коши — Неймана:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = Nf(t,x), \quad t > 0,\ x \in [0,\infty), \\ &f(0,x) = f_0(x), \quad x \in [0,\infty), \\ &\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) = 0, \quad t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Предположение 1. На пространстве $C^b[0,\infty)$ существует сильно непрерывная полугруппа операторов $(T_t^N)_{t\leqslant 0}$ (с генератором N), разрешающая задачу (1), т.е. для любой $f_0 \in C^b[0,\infty)$ решение задачи Коши — Неймана (1) представляется в виде $f(t,x) = (T_t^N f_0)(x)$.

Предположение 2. Множество

$$G_N = \Big\{\varphi \in C^b[0,\infty)\colon \varphi', \varphi'', \varphi''' \in C^b[0,\infty), \\ \varphi'(0) = \varphi''(0) = \varphi'''(0) = 0\Big\} \cap \mathrm{Dom}\, N, \tag{2}$$

является существенной областью определения генератора полугруппы $(T_t^N)_{t\geqslant 0}$.

В дальнейшем мы построим семейство интегральных операторов $(F(t))_{t\geqslant 0}$, эквивалентное по Чернову полугруппе $(T_t^N)_{t\geqslant 0}$. Тогда, по теореме Чернова, решение поставленной задачи Коши — Неймана будет представлено в виде лагранжевой формулы Фейнмана

$$f(t,x) = (T_t^N f_0)(x) = \lim_{n\to\infty}([F(t/n)]^n f_0)(x).$$

4. Лагранжева формула Фейнмана для задачи Коши — Неймана для параболического уравнения на полупрямой

Определим семейство операторов $(F(t))_{t\geqslant 0}$ следующим образом. Пусть $F(0) = \mathrm{Id}$ и для любого $t > 0$ $F(t)\varphi(x) = T_t^\Delta e^{tV(x)} T_t^\nabla f(x)$, где $e^{tV(x)}$ — оператор умножения на функцию $e^{tV(x)}$,

$$T_t^\Delta\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a t}}\int\limits_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}}\right)\varphi(y)\,dy,$$

и T_t^∇ определен так: каждую функцию $\varphi \in C^b[0,\infty)$ доопределим четным образом на всю вещественную ось (при этом функция останется непрерывной; будем обозначать ее тем же символом) и положим $T_t\varphi(x) = \varphi(x+b(x)t)$. Таким образом,

$$F(t)\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} \int\limits_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}}\right) e^{tV(y)}\varphi(y+b(y)t)\,dy. \qquad (3)$$

Предложение 1. Семейство операторов $(F(t))_{t\geq 0}$ действует из пространства $C^b[0,\infty)$ в него же.

◀ Пусть функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству $C^b[0,\infty)$, тогда функция $T_t^\nabla\varphi(x)$ также принадлежит пространству $C^b[0,\infty)$. Рассмотрим функцию $F(t)\varphi(x)$:

$$|F(t)\varphi(x)| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi at}} \int\limits_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}}\right) e^{tV(y)}T_t^\nabla\varphi(y)\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} \int\limits_0^\infty \left|e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}}\right| dy \sup_{x\in[0,\infty)} |e^{tV(x)}T_t^\nabla\varphi(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi at}}\left(\int\limits_0^\infty \left|e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}}\right| dy + \int\limits_0^\infty \left|e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}}\right| dy\right) \sup_{x\in[0,\infty)} |e^{tV(x)}T_t^\nabla\varphi(x)| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi at}}\left(\int\limits_0^\infty \left|e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}}\right| dy + \int\limits_{-\infty}^0 \left|e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}}\right| dy\right) \sup_{x\in[0,\infty)} |e^{tV(x)}T_t^\nabla\varphi(x)| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} \int\limits_{-\infty}^\infty \left|e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}}\right| dy \sup_{x\in[0,\infty)} |e^{tV(x)}T_t^\nabla\varphi(x)| =$$

$$= e^{t\|V(x)\|_\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} |T_t^\nabla\varphi(x)| \leqslant e^{t\|V(x)\|_\infty}\|\varphi\|_\infty.$$

Таким образом, функция $F(t)\varphi$ ограничена; $F(t)\varphi$ так же является непрерывной, как композиция непрерывных функций. ▶

Теорема 2. Семейство операторов (3) эквивалентно по Чернову полугруппе операторов $(T_t^N)_{t\geqslant 0}$, разрешающей задачу (1), т.е. решение этого задачи может быть получено по формуле Фейнмана:

$$f(t,x) = \lim_{n\to\infty} [F(t/n)]^n f_0(x). \tag{4}$$

Доказательство теоремы состоит в проверке условий теоремы Чернова для семейства операторов $\{F(t)\}_{t\geqslant 0}$ по отношению к полугруппе $(T_t^N)_{t\geqslant 0}$. Сформулируем выполнение этих условий в виде лемм.

Лемма 1. Для всех $t \geqslant 0$ верно неравенство $\|F(t)\| \leqslant e^{ta}$ с некоторой постоянной $a \in \mathbb{R}^1$.

◀ По свойствам композиции операторов

$$\|F(t)\| = \|T_t^{\Delta} e^{tV(x)} T_t^{\nabla}\| \leqslant \|T_t^{\Delta}\| \cdot \|e^{tV(x)}\| \cdot \|T_t^{\nabla}\|,$$

Из непрерывности и ограниченности $V(x)$ следует $\|e^{tV(x)}\| \leqslant e^{t\|V(x)\|_\infty}$. Найдем норму $\|T_t^{\Delta}\|$:

$$\|T_t^{\Delta}\| = \sup_{\|\varphi\|_\infty\neq 0} \frac{\|T_t^{\Delta}\varphi\|_\infty}{\|\varphi\|_\infty} =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_\infty\neq 0} \frac{\sup\limits_{x\in[0,\infty)} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi a t}} \int\limits_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}} \right) \varphi(y)\, dy \right|}{\sup\limits_{x\in[0,\infty)} |\varphi(x)|} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|\varphi\|_\infty\neq 0} \frac{\sup\limits_{x\in[0,\infty)} \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi a t}} \right| \int\limits_0^\infty \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}} \right| dy \cdot \sup\limits_{x\in[0,\infty)} |\varphi(x)| \right\}}{\sup\limits_{x\in[0,\infty)} |\varphi(x)|} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\in[0,\infty)} \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi a t}} \right| \int\limits_0^\infty \left(\left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} \right| + \left| e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}} \right| \right) dy \right\} =$$

$$= \sup_{x\in[0,\infty)} \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi a t}} \right| \left(\int\limits_0^\infty \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} \right| dy + \int\limits_{-\infty}^0 \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} \right| dy \right) \right\} =$$

$$= \sup_{x\in[0,\infty)} \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi a t}} \right| \int\limits_{-\infty}^\infty \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} \right| dy \right\} = 1.$$

Так как $T_t^{\nabla}\varphi(x) = \varphi(x + b(x)t)$, то $\|T_t^{\nabla}\| = 1$.

Таким образом, получаем $\|F(t)\| \leqslant \|T_t^\Delta\| \cdot \|e^{tV(x)}\| \cdot \|T_t^\nabla\| \leqslant e^{t\|V(x)\|_\infty}$, что и требовалось доказать. ►

Лемма 2. На множестве G_N, заданном формулой (2), оператор $F'(0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{F(t) - \mathrm{Id}}{t}$ (предел берется в сильной операторной топологии) совпадает с генератором полугруппы $(T_t^N)_{t\geqslant 0}$.

◄ Докажем, что для любого $\varphi \in G_N$ выполняется равенство $F'(0)\varphi = N\varphi$. Для начала докажем, что $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{T_t^\Delta\varphi - \varphi}{t}(x) = \left(\dfrac{a}{2}\dfrac{d^2\varphi}{dx^2}\right)(x)$. Пусть $\varphi \in G_N$, продолжим эту функцию четным образом на луч $(-\infty, 0)$, при этом функция $\varphi \in G_N$ останется трижды непрерывно дифференцируемой. Рассмотрим функцию $(T_t^\Delta\varphi - \varphi)(x)$:

$$(T_t^\Delta\varphi - \varphi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi at}}\int\limits_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}}\right)\varphi(y)dy - \varphi(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi at}}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}}\varphi(y)\,dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi at}}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}}\varphi(x)\,dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi at}}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}}(\varphi(y) - \varphi(x))\,dy.$$

Разложим $\varphi(y)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа с центром в точке x:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi at}}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}}(\varphi(y) - \varphi(x))\,dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi at}}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}}\left(\varphi'(x)(y-x) + \frac{1}{2}\varphi''(x)(y-x)^2 + \frac{1}{3!}\varphi'''(\xi)(y-x)^3\right)dy.$$

Интеграл

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi at}}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}}\varphi'(x)(y-x)\,dy$$

равен нулю, как интеграл по $\mathbb{R}$ от нечетной функции.

Далее,

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} \cdot \frac{1}{2}\varphi''(x)(y-x)^2 dy =$$

$$= \frac{\varphi''(x)}{2\sqrt{2\pi at}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} (y-x)^2 dy = \frac{\varphi''(x)}{2\sqrt{2\pi at}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{at}{x-y}(y-x)^2 d\left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}}\right) =$$

$$= \frac{\varphi''(x)at}{2\sqrt{2\pi at}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-y) d\left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}}\right) =$$

$$= \frac{\varphi''(x)at}{2\sqrt{2\pi at}} \left((x-y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} dy \right) = t\left(\frac{a}{2}\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)(x).$$

Здесь было использовано следующее свойство гауссовой экспоненты:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi at}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} dy = 1.$$

Наконец,

$$|I_3| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} \frac{1}{3!}\varphi'''(\xi)(y-x)^3 dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{6\sqrt{2\pi at}} \cdot \sup_{\eta\in\mathbb{R}} |\varphi'''(\eta)| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} (y-x)^3 \right| dy.$$

Введем замену переменных $z = x - y$, тогда:

$$|I_3| \leqslant \frac{\sup\limits_{\eta\in\mathbb{R}} |\varphi'''(\eta)|}{6\sqrt{2\pi at}} \cdot 2 \left| \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2at}} z^3 dz \right| = \frac{\sup\limits_{\eta\in\mathbb{R}} \varphi'''(\eta)at}{3\sqrt{2\pi at}} \left| \int\limits_{0}^{\infty} z^2 d\left(e^{-\frac{z^2}{2at}}\right) \right| =$$

$$= \frac{\sup\limits_{\eta\in\mathbb{R}} \varphi'''(\eta)at}{3\sqrt{2\pi at}} \left| z^2 e^{-\frac{z^2}{2at}} \Big|_{0}^{\infty} - 2\int\limits_{0}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2at}} dz \right| =$$

$$= \frac{2\sup\limits_{\eta\in\mathbb{R}} \varphi'''(\eta)a^2(x)t^2}{3\sqrt{2\pi at}} \left| e^{-\frac{z^2}{2at}} \Big|_{0}^{\infty} \right| = \frac{2\sup\limits_{\eta\in\mathbb{R}} \varphi'''(\eta)a^2(x)t^2}{3\sqrt{2\pi at}}.$$

Так как φ''' — ограниченая функция на $\mathbb{R}$, то

$$\lim_{t\to 0}\frac{|I_3|}{t}(x) \leqslant \lim_{t\to 0}\frac{2\sup\limits_{\eta\in\mathbb{R}}\varphi'''(\eta)a^2(x)t}{3\sqrt{2\pi a t}} = 0.$$

Таким образом, получаем:

$$\lim_{t\to 0}\frac{T_t^{\Delta}\varphi-\varphi}{t}(x) = \lim_{t\to 0}\frac{I_1+I_2+I_3}{t}(x) = \left(\frac{a}{2}\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)(x).$$

Докажем теперь, что $\lim\limits_{t\to 0}\frac{T_t^{\nabla}\varphi-\varphi}{t}(x) = \left(b(x)\frac{d\varphi}{dx}\right)(x)$. Имеем:

$$\lim_{t\to 0}\frac{T_t^{\nabla}\varphi-\varphi}{t}(x) = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(x+b(x)t)-\varphi(x)}{t}.$$

Разложим функцию $\varphi(x+b(x)t)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа с центром в точке x:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(x+b(x)t)-\varphi(x)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi'(x)(tb(x))+\frac{1}{2}\varphi''(\xi)(t^2b^2(x))}{t} = b(x)\frac{d\varphi}{dx}(x).$$

Используя доказанные утверждения, получаем:

$$\begin{aligned}
F'(0)\varphi(x) &= \lim_{t\to 0}\frac{[T_t^{\Delta}e^{tV(x)}T_t^{\nabla}\varphi(x)-\varphi(x)]}{t} = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{[T_t^{\Delta}(e^{tV(x)}T_t^{\nabla}\varphi(x)-\varphi(x))+T_t^{\Delta}\varphi(x)-\varphi(x)]}{t} = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{[e^{tV(x)}T_t^{\nabla}\varphi(x)-\varphi(x)]}{t} + \frac{a}{2}\frac{d^2\varphi}{dx^2}\varphi(x) = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{[e^{tV(x)}(T_t^{\nabla}\varphi(x)-\varphi(x))+e^{tV(x)}\varphi(x)-\varphi(x)]}{t} + \frac{a}{2}\frac{d^2\varphi}{dx^2}\varphi(x) = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{[T_t^{\nabla}\varphi(x)-\varphi(x)]}{t} + \frac{a}{2}\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + V(x)\varphi(x) = \\
&= \frac{a}{2}\frac{d^2\varphi}{dx^2}\varphi(x) + b(x)\frac{d\varphi}{dx}(x) + V(x)\varphi(x) = N\varphi(x).
\end{aligned}$$

Проверим выполнение краевых условий

$$\frac{\partial}{\partial x}(F(t)\varphi)(t,0) = 0.$$

Функции

$$g(x,y)=\left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}}+e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}}\right)e^{tV(y)}\varphi(y+b(y)t),$$

$$g_x(x,y)=\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=$$
$$=-\frac{1}{at}\left((x-y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}}+(x+y)e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}}\right)e^{tV(y)}\varphi(y+b(y)t)$$

непрерывны на $[0,\infty]$. Для $g_x(x,y)$ при любом $x\in[-1,1]$ можно взять интегрируемую на $[0,\infty)$ мажоранту

$$m(y)=\begin{cases}\dfrac{2(y+1)}{at}e^{-\frac{(y-1)^2}{2at}}C, & y\geqslant 1;\\ \dfrac{8C}{\sqrt{at}}, & y\in[0,1),\end{cases}$$

где $C=e^{t\|V(x)\|_\infty}\|\varphi\|_\infty$. Следовательно, по признаку Вейерштрасса интеграл $\int\limits_0^\infty g_x(x,y)dy$ равномерно сходится по параметру x на отрезке $[-1,1]$. Интеграл

$$\int\limits_0^\infty g(x,0)dy=\int\limits_0^\infty 2e^{-\frac{y^2}{2at}}e^{tV(y)}\varphi(y+b(y)t)\,dy$$

сходится, так как первая экспонента в нем быстро убывает к нулю на бесконечности. Тогда по теореме о дифференцировании несобственного интеграла по параметру $\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^\infty g(x,y)dy=\int\limits_0^\infty g_x(x,y)dy$. Отсюда получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x}(F(t)\varphi)(t,0)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi at}}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^\infty\left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}}+e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}}\right)e^{tV(y)}\varphi(y+b(y)t)\,dy\bigg|_{x=0}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi at}}\int\limits_0^\infty\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}}+e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}}\right)e^{tV(y)}\varphi(y+b(y)t)\,dy\bigg|_{x=0}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi at}}\int\limits_0^\infty\left(-\frac{y}{at}e^{-\frac{y^2}{2at}}+\frac{y}{at}e^{-\frac{y^2}{2at}}\right)e^{tV(y)}\varphi(y+b(y)t)\,dy=0.$$

Это завершает доказательство леммы. ►

Запишем лагранжеву формулу Фейнмана в явном виде. Подставляя в формулу (4) явные выражения операторов, получим:

$$f(t,x_0)=\lim_{n\to\infty}([F(t/n)]^n f_0)(t,x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2a\pi\frac{t}{n}}}\int\limits_0^\infty\left(e^{\frac{-(x_0-x_1)^2}{2a\frac{t}{n}}}+e^{\frac{-(x_0+x_1)^2}{2a\frac{t}{n}}}\right)\times$$

$$\times\frac{e^{\frac{t}{n}V(x_1+\frac{t}{n}b(x_1))}}{\sqrt{2a\pi\frac{t}{n}}}\int\limits_0^\infty\left(e^{\frac{-\left(x_1+\frac{t}{n}b(x_1)-x_2\right)^2}{2a\frac{t}{n}}}+e^{\frac{-\left(x_1+\frac{t}{n}b(x_1)+x_2\right)^2}{2a\frac{t}{n}}}\right)\frac{e^{\frac{t}{n}V(x_2+\frac{t}{n}b(x_2))}}{\sqrt{2a\pi\frac{t}{n}}}\times\ldots$$

$$\ldots\times\frac{e^{\frac{t}{n}V(x_{n-1}+\frac{t}{n}b(x_{n-1}))}}{\sqrt{2a\pi\frac{t}{n}}}\int\limits_0^\infty\left(e^{\frac{-\left(x_{n-1}+\frac{t}{n}b(x_{n-1})-x_n\right)^2}{2a\frac{t}{n}}}+e^{\frac{-\left(x_{n-1}+\frac{t}{n}b(x_{n-1})+x_n\right)^2}{2a\frac{t}{n}}}\right)\times$$

$$\times\, e^{\frac{t}{n}V(x_n+\frac{t}{n}b(x_n))}f_0\Big(x_n+b(x_n)\frac{t}{n}\Big)dx_n\ldots dx_1=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2a\pi\frac{t}{n}}\right)^{\frac{n}{2}}\underbrace{\int\limits_0^\infty\cdots\int\limits_0^\infty}_{\text{n раз}}\left(e^{\frac{-(x_0-x_1)^2}{2a\frac{t}{n}}}+e^{\frac{-(x_0+x_1)^2}{2a\frac{t}{n}}}\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n-1}\left(e^{\frac{-\left(x_i+\frac{t}{n}b(x_i)-x_{i+1}\right)^2}{2a\frac{t}{n}}}+e^{\frac{-\left(x_i+\frac{t}{n}b(x_i)+x_{i+1}\right)^2}{2a\frac{t}{n}}}\right)\times$$

$$e^{\frac{t}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}V\left(x_i+\frac{t}{n}b(x_i)\right)}f_0\left(x_n+b(x_n)\frac{t}{n}\right)\,dx_n\ldots dx_1.$$

З а м е ч а н и е . Рассмотрим задачу Коши — Дирихле для параболического уравнения на полупрямой:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)=Df(t,x), && t>0,\ \ x\in[0,\infty),\\ &f(0,x)=f_0(x), && x\in[0,\infty),\\ &f(t,0)=0, && t\geqslant 0,\end{aligned}$$

где оператор D действует на пространстве $C_0^b[0,\infty)$ ограниченных непрерывных на луче $[0,\infty)$ функций, обращающихся в нуль при $x=0$,

$$\mathrm{Dom}\,D=\left\{\varphi(x)\in C_0^b[0,\infty)\colon D\varphi\in C_0^b[0,\infty)\right\},$$

и для любой функции $\varphi\in\mathrm{Dom}\,D$ имеем

$$D\varphi(x)=\frac{1}{2}a(x)\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+b(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}+V(x)\varphi(x).$$

Пусть функции $a(\cdot), b(\cdot), V(\cdot)\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ограничены и непрерывны и $a(x) > a_0 > 0$ при $x \in [0,\infty)$. Тогда с помощью рассуждений, аналогичных доказательству теоремы 2, можно показать, что решение этой задачи представляется с помощью лагранжевой формулы Фейнмана:

$$
\begin{aligned}
f(t,x_0) &= \lim_{n\to\infty}([F(t/n)]^n f_0)(t,x_0) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{t}{n}V(x_0)}}{\sqrt{2a(x_0)\pi\frac{t}{n}}} \int\limits_0^\infty \left(e^{\frac{-(x_0-x_1)^2}{2a(x_0)\frac{t}{n}}} - e^{\frac{-(x_0+x_1)^2}{2a(x_0)\frac{t}{n}}} \right) \times \\
&\times \frac{e^{\frac{t}{n}V\left(x_1+\frac{t}{n}b(x_1)\right)}}{\sqrt{2a(x_1+\frac{t}{n}b(x_1))\pi\frac{t}{n}}} \int\limits_0^\infty \left(e^{\frac{-\left(x_1+\frac{t}{n}b(x_1)-x_2\right)^2}{2a\left(x_1+\frac{t}{n}b(x_1)\right)\frac{t}{n}}} - e^{\frac{-\left(x_1+\frac{t}{n}b(x_1)+x_2\right)^2}{2a\left(x_1+\frac{t}{n}b(x_1)\right)\frac{t}{n}}} \right) \times \ldots \\
&\ldots \times \frac{e^{\frac{t}{n}V\left(x_{n-1}+\frac{t}{n}b(x_{n-1})\right)}}{\sqrt{2a\left(x_{n-1}+\frac{t}{n}b(x_{n-1})\right)\pi\frac{t}{n}}} \int\limits_0^\infty \left(e^{\frac{-\left(x_{n-1}+\frac{t}{n}b(x_{n-1})-x_n\right)^2}{2a\left(x_{n-1}+\frac{t}{n}b(x_{n-1})\right)\frac{t}{n}}} - \right. \\
&\left. - e^{\frac{-\left(x_{n-1}+\frac{t}{n}b(x_{n-1})+x_n\right)^2}{2a\left(x_{n-1}+\frac{t}{n}b(x_{n-1})\right)\frac{t}{n}}} \right) f_0\left(x_n + b(x_n)\frac{t}{n}\right) dx_n \ldots dx_1 = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{t}{n}V(x_0)}}{\sqrt{2a(x_0)\pi\frac{t}{n}}} \underbrace{\int\limits_0^\infty \cdots \int\limits_0^\infty}_{\text{n раз}} \left(e^{\frac{-(x_0-x_1)^2}{2a(x_0)\frac{t}{n}}} - e^{\frac{-(x_0+x_1)^2}{2a(x_0)\frac{t}{n}}} \right) e^{\frac{t}{n}\sum\limits_{i=1}^{n-1} V\left(x_i+\frac{t}{n}b(x_i)\right)} \times \\
&\times \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2a\left(x_i+\frac{t}{n}b(x_i)\right)\pi\frac{t}{n}}} \left(e^{\frac{-\left(x_i+\frac{t}{n}b(x_i)-x_{i+1}\right)^2}{2a\left(x_i+\frac{t}{n}b(x_i)\right)\frac{t}{n}}} - e^{\frac{-\left(x_i+\frac{t}{n}b(x_i)+x_{i+1}\right)^2}{2a\left(x_i+\frac{t}{n}b(x_i)\right)\frac{t}{n}}} \right) \right\} \times \\
&\qquad\qquad \times f_0\left(x_n + b(x_n)\frac{t}{n}\right) dx_n \ldots dx_1.
\end{aligned}
$$

5. Заключение

Получено представление решения задачи Коши — Неймана для параболического уравнения на полупрямой в виде предела конечнократных интегралов при неограниченном возрастании кратности; при этом интегралы берутся от элементарных функций, зависящих от коэффициентов уравнения и начальных данных. Такие представления называют формулами Фейнмана. Полученная формула Фейнмана может быть использована для непосредственных вычислений и компьютерного моделирования соответствующей динамики.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации МК-943.2010.1. и гранта РФФИ 10-01-00724-а.

Список литературы

1. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. 724 с.
2. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982.
3. Бутко Я.А., Смолянов О.Г. Формулы Фейнмана в квантовой и стохастической динамике // Современные проблемы математики и механики. 2011. Т. 6, № 1. С. 61–75.
4. Бутко Я.А., Гротхаус М., Смолянов О.Г. Формула Фейнмана для параболического уравнения второго порядка в области // ДАН. 2008. Т. 421, № 6. С.727–732.
5. Бутко Я.А., Смолянов О.Г., Шиллинг Р.Л. Формулы Фейнмана для феллеровских полугрупп // ДАН. 2010. Т. 434, № 1. С. 7–11.
6. Бутко Я.А. Формулы Фейнмана и функциональные интегралы для диффузии со сносом в области многообразия // Мат. Заметки. 2008. Т. 83, № 3. С. 333–349.
7. Егоров А.Д., Жидков Е.П. Введение в теорию и приложения функционального интегрирования. М.: Физматлит, 2006.
8. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю. Метод приближенного континуального интегрирования в задачах математической физики // ЭЧАЯ. 1996. Т. 27, № 1. С. 173–242.
9. Лобанов Ю.Ю. Методы приближенного функционального интегрирования для численного исследования моделей в квантовой физике: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, 2009.

10. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. В 3-х т. Т. 1. М.: Мир, 1977.
11. Смолянов О.Г., Вайцзеккер Х.ф., Виттих 0. Диффузия на компактном римановом многообразии и поверхностные меры // ДАН. 2000. Т. 371, № 4. С. 442–447.
12. Смолянов О.Г., Вайцзеккер Х.ф., Виттих 0. Поверхностные меры Винера на траектория в римановых многообразиях // ДАН. 2002. Т. 383, № 4. С. 458–463.
13. Смолянов О.Г., Вайцзеккер Х.ф., Виттих 0. Поверхностные меры на траекториях в римановых многообразиях, порождаемые диффузиями // ДАН. 2001. Т. 377, № 4. С. 441–446.
14. Butko Ya.A. Function integrals corresponding to a solution of the Cauchy — Dirichlet problem for the heat equation in a domain of a Riemannian manifold // J. of Math. Sci. 2008. V. 151, No 1. P. 2629–2638.
15. Butko Ya., Grothaus M., Smolyanov O.G. Lagrangian Feynman Formulae for Second Order Parabolic Equations in Bounded and Unbounded Domains // IDAQP. 2010. V. 13, No 3. P. 377–392.
16. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Hamiltonian Feynman — Kac and Feynman formulae for dynamics of particles with position-dependent mass // Int. J. Theor. Phys. 2011. V. 50. P. 2009–2018.
17. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Lagrangian and Hamiltonian Feynman formulae for some Feller semigroups and their perturbations // IDAQP. 2011. To appear.
18. Obrezkov O., Smolyanov O.G., Truman A. The Generalized Chernoff Theorem and Randomized Feynman Formula // Doklady Math. 2005. V. 71, No 1. P. 105–110.
19. Sakbaev V.G., Smolyanov O.G. Dynamics of a Quantum Particle with Discontinuous Position-Dependent Mass // Dokl. Math. 2010. V. 82, No 1. P. 630–634.
20. Smolyanov O.G. Feynman type formulae for quantum evolution and diffusion on manifolds and graphs // Quant. Bio-Informatics, World Sci. 2010. V. 3. P. 337–

347.

21. Smolyanov O.G., Tokarev A.G., A. Truman. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula // Journal of mathematical physics. 2002. V. 43, No 10. P. 5161–5171.
22. Smolyanov O.G., Weizsacker H.v., Wittich O. Brownian motion on a manifold as limit of stepwise conditioned standart Brownian motions // Canadian Mathematic Society Conference. 2000. V. 29.
23. Smolyanov O.G., Weizsacker H.v., Wittich O. Chernoff's Theoreme and Discrete Time Approximations of Brownian Motion on Manifolds // Potent. Anal. 2007. V. 26, No 1. P. 1–29.

electronic scientific and technical periodical

SCIENCE and EDUCATION

El № FS77 - 30569. №0421100025. ISSN 1994-0408

Representation of the solution of the Cauchy--Neumann problem for a parabolic equation on a ray by a Lagrangian Feynman formula

77-30569/246219

10, October 2011

Ya.A. Butko, A.V. Morozov

Bauman Moscow State Technical University

lk4d4math@gmail.com

yanabutko@yandex.ru

The Cauchy — Neumann problem for a parabolic equation with position-dependent coefficients is considered on a ray. The solution of the problem is represented by a limit of n-fold iterated integrals of elementary functions containing the coefficients of the equation and the initial conditions when n tends to infinity. Such representations are called Feynman formulae. Such formulae can be used for direct calculations and computer modeling of the considered dynamics. Moreover, the limits of finite dimensional integrals in Feynman formulae coincide with some functional integrals with respect to probability measures on the set of paths in the domains, where the equations are considered. Thus, Feynman formulae allow to approximate functional integrals, and hence the transition probabilities of the corresponding stochastic processes (usually the transition probabilities are not known explicitly). A method to obtain Feynman formulae for evolution equations is suggested in works of Smolyanov and his co-authors. This method is based on the Chernoff theorem and allows to obtain Feynman and Feynman — Kac formulae for a broad class of evolution equations on various geometric structures.

References

1. Bogachev V.I., Smoljanov O.G. Dejstvitel'nyj i funkcional'nyj analiz: universitetskij kurs. M.-Izhevsk: NIC "Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika", Institut komp'juternyh issledovanij, 2009. 724 s.
2. Bratteli U., Robinson D. Operatornye algebry i kvantovaja statisticheskaja mehanika. M.: Mir, 1982.

3. Butko Ja.A., Smoljanov O.G. Formuly Fejnmana v kvantovoj i stohasticheskoj dinamike // Sovremennye problemy matematiki i mehaniki. 2011. V. 6, No 1. S. 61–75.
4. Butko Ya.A., Grothaus M., Smolyanov O.G. Feynman formula for a class of second order parabolic equations in a bounded domain // Dokl. Math. 2008. V. 78. P. 590–595.
5. Ya.A. Butko, R.L. Schilling and O.G. Smolyanov. Feynman formulae for Feller semigroups // Dokl. Math. 2010. V. 82. No 2. P. 697–683.
6. Butko Ya.A. Feynman formulas and functional integrals for diffusion with drift in a domain of a Riemannian manifold // Math. Notes. 2008. V. 83. P. 333–349.
7. Egorov A.D., Zhidkov E.P. Vvedenie v teoriju i prilozhenija funkcional'nogo integrirovanija. M.: Fizmatlit, 2006.
8. Zhidkov E.P., Lobanov Ju.Ju. Metod priblizhennogo kontinual'nogo integrirovanija v zadachah matematicheskoj fiziki // JeChAJa. 1996. V. 27, No 1. P. 173–242.
9. Lobanov Ju.Ju. Metody priblizhennogo funkcional'nogo integrirovanija dlja chislennogo issledovanija modelej v kvantovoj fizike: Dis. . . . kand. fiz.-mat. nauk. Moskva, 2009.
10. Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics. V 3 v. V. I. Academic Press, 1980.
11. Smolyanov O.G., Weizsacker H .v., Wittich O. Diffusion on Compact Riemannian Manifolds and Surface Measures // DAN. 2000. V. 61, No. 2. P. 230–235.
12. Smolyanov O.G., Weizsacker H .v., Wittich O. Wiener Surface Measures on Trajectories in Riemannian Manifolds // Dokl. Math. 2002. V. 65, No 2. P. 239–245.
13. Smolyanov O.G., Weizsacker H .v., Wittich O. Surface Measures Generated by Diffusions on Paths in Riemannian Manifolds // Dokl. Math. 2001. T. 63, No 2. P. 203–208.
14. Butko Ya.A. Function integrals corresponding to a solution of the Cauchy — Dirichlet problem for the heat equation in a domain of a Riemannian manifold // J. of Math. Sci. 2008. V. 151, No 1. P. 2629–2638.
15. Butko Ya., Grothaus M., Smolyanov O.G. Lagrangian Feynman Formulae for Second Order Parabolic Equations in Bounded and Unbounded Domains // IDAQP. 2010. V. 13, No 3. P. 377–392.
16. Butko Ya. A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Hamiltonian Feynman — Kac and Feynman formulae for dynamics of particles with position-dependent mass // Int. J. Theor. Phys. 2011. V 50. P. 2009–2018.

17. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Lagrangian and Hamiltonian Feynman formulae for some Feller semigroups and their perturbations // IDAQP. 2011. To appear.
18. Obrezkov O., Smolyanov O.G., Truman A. The Generalized Chernoff Theorem and Randomized Feynman Formula // Doklady Math. 2005. V. 71, No 1. P. 105–110.
19. Sakbaev V.G., Smolyanov O.G. Dynamics of a Quantum Particle with Discontinuous Position-Dependent Mass // Dokl. Math. 2010. V. 82, No 1. P. 630–634.
20. Smolyanov O.G. Feynman type formulae for quantum evolution and diffusion on manifolds and graphs // Quant. Bio-Informatics, World Sci. 2010. V. 3. P. 337–347.
21. Smolyanov O.G., Tokarev A.G., A. Truman. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula // J. of math. physics. 2002. V. 43, No 10. P. 5161–5171.
22. Smolyanov O.G., Weizsacker H .v., Wittich O. Brownian motion on a manifold as limit of stepwise conditioned standart Brownian motions // Canadian Mathematic Society Conference. 2000. V. 29.
23. Smolyanov O.G., Weizsacker H .v., Wittich O. Chernoff's Theoreme and Discrete Time Approximations of Brownian Motion on Manifolds // Potent. Anal. 2007. V. 26. No 1. P. 1–29.