электронное научно-техническое издание
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 30569. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

Свойства распределения гауссовых пакетов на пространственной сети

77-30569/239866

 # 10, октябрь 2011

В. Л. Чернышев, А. А. Толченников

УДК $519.173 + 517.938 + 517.955.8$

МГТУ им. Н.Э. Баумана
vchern@bmstu.ru

1. Введение

Данная статья посвящена исследованию поведения квазиклассического решения задачи Коши для нестационарного уравнения Шрёдингера на геометрическом графе. Она является продолжением статей [2], [3], в которых читатель может найти все необходимые обозначения, определения и формулировки. Там же (и в [4]) указаны ссылки на некоторые статьи и обзоры, касающиеся изучения дифференциальных уравнений на геометрических графах.

В [3] были выписаны формулы для асимптотики числа гауссовых пакетов для звездного графа, и поставлен вопрос о нахождении старшего коэффициента для случая произвольного конечного компактного графа. В данной работе эта задача решена, и найдена общая формула для этого коэффициента (см. Теорему 2). Кроме того, в [3] доказана равномерность распределения пакетов для частного случая двух точек, соединенных тремя ребрами. В данной статье приведено доказательство равномерности асимптотического распределения пакетов по произвольному конечному компактному графу для почти всех времен прохождения ребер (см. Теорему 1).

Во второй части статьи (раздел 3) впервые обсуждаются вопросы описания асимптотики количества пакетов для случая линейно зависимых над $\mathbb{Q}$ ребер. В этой ситуации, в общем случае, нарушается установленное в [2], [3] соответствие между количеством пакетов и числом узлов целочисленной решетки, попадающих на некоторые грани расширяющегося симплекса, однако анализ их количества все равно возможен. В разделе 3 описана ситуация, когда ранг системы времен прохождения ребер равен единице. На граф при этом не накладываются дополнительные условия. Оказывается, что число пакетов в этом случае растет только на конечном отрезке времени и стабилизируется на некотором значении, которое зависит от длин циклов. Также рассматривается ситуация, когда ранг системы времен прохождения ребер равен двум, для случая звездного графа. Найден главный член асимптотики количества гауссовых пакетов.

2. Случай линейно независимых над $\mathbb{Q}$ времен прохождения ребер.

В этой статье рассматриваются конечные компактные геометрические графы. Число ребер графа обозначим E, число вершин V. Времена прохождения ребер (см. [3]), являющиеся аналогами длин ребер, обозначаются t_j.

Лемма 1. Время прохождения любого ребра графа зависит только от начальных данных и одинаково для любых гауссовых пакетов на каждом фиксированном ребре.

Доказательство. Фиксируем некоторое ребро с номером j. По построению решения на каждом ребре (с помощью метода комплексного ростка Маслова, см [3]), мы получаем, что выполняется $P^2 + V(x) = E_j$ (в силу закона сохранения энергии для гамильтоновой системы), где значение E_j определяется начальными условиями. Записывая $P = \frac{dX}{dt}$, получаем для времени прохождения ребра явное выражение $t_j = \int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{E_j - V(x)}}$, где интеграл берется по ребру. Величина E_j одинакова для всех ребер, так как в вершинах потенциал $V(x)$ предполагается непрерывным, а P может менять только знак (по построению решения), таким образом формула $E_j = P^2 + V(x)$ определяет одно и тоже значение $E_j = E$ для всех пакетов. В начальный момент времени $E = \left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 + V(x_0)$. Сами значения t_j могут быть различны, так как ограничение потенциала $V(x)$ на ребра может быть разным.

Определение. Коэффициентом радиации R назовем коэффициент при главном члене асимптотики числа пакетов, выходящих из данной вершины, по одному из ребер.

Корректность этого определения (в частности, тот факт, что для почти всех времен прохождения ребер R не зависит от выбора вершины и ребра) будет показана в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. [О равномерности распределения] Пусть граф Γ компактен, не содержит вершин степени 2 и состоит из одной компоненты связности. На ребрах нет точек поворота. Тогда для почти всех несоизмеримых (то есть линейно независимых над $\mathbb{Q}$) чисел $t_1, \ldots t_E$, обозначающих времена прохождения ребер, отношение доли числа пакетов на любом отрезке, взятом на произвольном ребре графа, к длине этого отрезка стремится, при увеличении времени, к постоянной величине $\left(\sum\limits_{j=1}^{E} t_j\right)^{-1}$.

З а м е ч а н и е 1. Фактически, это означает, что с ростом времени распределение числа пакетов все ближе к равномерному.

Доказательство. Выберем на произвольном ребре графа с временем прохождения t_j отрезок dg с временем прохождения τ. Доля пакетов на отрезке в момент времени t — это отношение числа пакетов на отрезке $N_\tau(t)$ к общему числу пакетов на графе, то есть $N_\tau(t)/N(t)$. Мы знаем (см. [3]), что $N(t) = Ct^{E-1} + o(t^{E-1})$. Найдем выражение для $N_\tau(t)$. Так как число пакетов может меняться только в вершинах, справедливо соотношение:

$$N_\tau(t) = N_{\to d}(t) - N_{\to d}(t - \tau) + N_{\to g}(t) - N_{\to g}(t - \tau). \tag{1}$$

Здесь $N_{\to d}(t)$ означает число пакетов, попавших на ребро через точку d. Формула справедлива, так как на графе нет точек поворота.

Ясно, что число пакетов, пришедших в точку d к моменту времени t, равно числу пакетов, вышедших из ближайшей вершины графа a в момент времени $t - T_1$, где T_1 – время прохождения отрезка от a до d. Таким образом, для нахождения $N_\tau(t)$ нам нужно исследовать асимптотику числа пакетов, выходящих из вершины a в сторону точки d, обозначим его $N_{a\to d}(t)$.

Проанализируем, как устроена асимптотика числа пакетов, выходящих из какой-то произвольной вершины a графа. Пакеты не могут выходить из нашей вершины в моменты времени, не являющиеся линейной комбинацией (с целыми неотрицательными коэффициентами) времен прохождения ребер графа. Количество возможных событий, состоящих в выходе хотя бы одного пакета из вершины a, описывается числом целых неотрицательных чисел n_j, удовлетворяющих неравенствам вида

$$n_1 t_{l_1} + \ldots + n_m t_{l_m} \leq t, \tag{2}$$

где t_j – время прохождения траекторией j-го ребра.

Таким образом, мы каждый раз учитываем, по каким именно ребрам проходили те траектории, которые порождают пакеты, приходящие в фиксированную вершину. При этом числа n_j показывают сколько раз было так, что пакет оказывался на ребре с временем прохождения t_{l_j}. Так как все t_j линейно независимы над $\mathbb{Q}$, старший коэффициент асимптотики числа пакетов при росте t определяется объемом симплекса, задаваемого неравенством (2). Таким образом, чаще всего с увеличением t будут происходить те события, для которых число слагаемых в левой части неравенства максимально (это следует из того, что число целых точек в расширяющемся симплексе размерности k растет как t^k). Другими словами, число различных ребер, по которым уже прошли гауссовы пакеты, приходящие в нашу вершину, должно быть максимальным. Так как в графе всего E ребер, то этот максимум будет достигаться при наличии E слагаемых. При этом пакеты чаще всего выходят из вершины a по всем инцидентным ей ребрам, в частности по тому, что содержит точку d. То есть, мы показали, что

$$N_{a\to d}(t) = R^a t^E + o(t^E). \tag{3}$$

Для почти всех чисел $t_1, \ldots t_E$ эту оценку можно улучшить (см. [1]). Найдется такое число K^a, что $N_{a\to d}(t) = R^a t^E + K^a t^{E-1} + o(t^{E-1})$.

Докажем, что константа R^a, которую называют *коэффициентом радиации*, не зависит от выбора вершины. Рассмотрим две вершины a и b. Данный граф является связным, и поэтому существует путь, соединяющий вершины a и b. Время его прохождения обозначим δ. Любой пакет, вышедший из a в сторону точки d, порождает, через время не превосходящее 2δ, как минимум один пакет, выходящий из вершины b в сторону точки d'. Это свойство верно и для пакетов, выходящих из вершины b. Получаем два неравенства: $N_{a\to d}(t+2\delta) \geq N_{b\to d'}(t)$ и $N_{b\to d'}(t+2\delta) \geq N_{a\to d}(t)$. Мы знаем, что $N_{a\to d}(t) = R^a t^E + o(T^E)$, $N_{b\to d'}(t) = R^b t^E + o(T^E)$. Отсюда следует, что $R^a t^E + o(t^E) = R^b t^E$. Последнее выражение делим на T^E и получаем искомое соотношение $R^a = R^b$.

Преобразуем выражение для $N_\tau(t)$. Пользуясь совпадением коэффициентов R^a, получаем $N_\tau(t) = R(t-T_1)^E + K^a(t-T_1)^{E-1} - R(t-T_1-\tau)^E - K^a(t-T_1-\tau)^{E-1} + R(t-T_2)^E + K^b(t-T_2)^{E-1} - R(t-T_2-\tau)^E - K^b(t-T_1-\tau)^{E-1} + o(t^{E-1}) = 2ER\tau t^{E-1} + o(t^{E-1})$.

Теперь, если записать отношение $\frac{N_\tau(t)}{N(t)}$, получим

$$\frac{N_\tau(t)}{N(t)} \to \frac{2ER}{C}\tau. \tag{4}$$

Осталось доказать, что коэффициент при τ имеет нужный вид. Если последовательно брать в качестве отрезка dg все ребра графа, а затем просуммировать полученные выражения, получим, что

$$1 = \sum_{j=1}^{E} \frac{N_{t_j}(t)}{N(t)} \to \frac{2ER}{C} \sum_{j=1}^{E} t_j. \tag{5}$$

Следовательно,

$$C = 2ER \sum_{j=1}^{E} t_j. \tag{6}$$

Доказательство завершено.

З а м е ч а н и е 2. Для двух произвольных вершин графа числа K^a и K^b связаны неравенством $|K^b - K^a| \leq E\delta R$. Здесь δ – время прохождения какого-либо пути из вершины a в вершину b.

В ходе доказательства теоремы мы получили следующее утверждение:

Следствие 1. [Формула, связывающая коэффициенты C и R.]

Старший коэффициент числа гауссовых пакетов C и константа радиации R, для почти всех времен прохождения ребер, связаны следующим соотношением:

$$C = 2ER \sum_{j=1}^{E} t_j. \tag{7}$$

Теорема 2. [О формуле для старшего коэффициента числа пакетов.] Пусть граф Γ компактен, не содержит вершин степени 2 и состоит из одной компоненты связности. На ребрах нет точек поворота. Тогда для почти всех несоизмеримых (то есть линейно независимых над $\mathbb{Q}$) чисел $t_1, \dots t_E$, обозначающих времена прохождения ребер, старший коэффициент, при росте t числа гауссовых пакетов, может быть найден по формуле:

$$C = \frac{1}{2^{V-2}(E-1)!} \frac{\sum\limits_{j=1}^{E} t_j}{\prod\limits_{j=1}^{E} t_j}. \tag{8}$$

Здесь V – число вершин, E – число ребер в графе.

Доказательство основано на формуле 8 и следующей лемме:

Лемма 2. Пусть дан конечный связный граф с несоизмеримыми временами прохождения ребер $t_i (i = 1 \dots E)$ и количеством циклов β. Пусть A — вершина, из которой в начальный момент времени вышел пакет, а B — произвольная вершина. Тогда, для почти всех времен прохождения ребер, количество пакетов, пришедших в вершину B к моменту времени T, асимптотически равно

$$R(T) \sim \frac{2^{\beta}}{2^E\, E! \prod\limits_{j=1}^{E} t_j} T^E.$$

З а м е ч а н и е 3. Очевидно, что это эквивалентно тому, что для коэффициента радиации справедливо соотношение:

$$R = \frac{1}{2^{V-1}E!} \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{E} t_j}.$$

Доказательство. Нам достаточно рассматривать пути таких пакетов, которые прошли по всем ребрам – только они дают главный член асимптотики. Каждому такому пути из A в B мы сопоставим код — набор коэффициентов соответствующей цепи с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$. Понятно, что код не меняется при гомотопии пути. Найдем число возможных кодов. Гомотопический класс пути определяется четностью числа прохождений по ребрам, которые не лежат в максимальном дереве графа, по так называемым "перемычкам". Задав коэффициенты цепи на перемычках, мы определим коэффициенты на всех остальных ребрах. Таким образом, различных кодов может быть 2^β. Теперь каждому коду $(c_1, \dots, c_E), c_i \in \{0, 1\}$ поставим в соответствие времена

$$\left\{ \sum_{i=1}^{E} t_i(c_i + 2n_i) | n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

В каждое такое время (все они различны) будет приходить хотя бы один пакет в вершину B. Асимптотически, количество таких времен, меньших T, будет эквивалентно

$$\frac{T^E}{2^E\, E!\, t_1 \cdots t_E}.$$

Теперь нужно просуммировать по всем возможным кодам. Доказательство леммы завершено. Теперь осталось только использовать выражение числа β через E и V: $\beta = E - V + 1$ (см. [5]). Доказательство завершено.

3. Случай линейно зависимых времен прохождения ребер.

В этом разделе мы отказываемся от требования линейной независимости времен прохождения над $\mathbb{Q}$. Это приводит к тому, что взаимно однозначного соответствия (описанного в [2], [3]) между числом гауссовых пакетов и числом точек целочисленной решетки, попадающих в расширяющийся симплекс, нет. Простейшим примером может служить граф-звезда с тремя одинаковыми ребрами. Число пакетов на таком графе достигает трех и больше не растет, в то время как число точек целочисленной решетки увеличивается с ростом времени.

Сперва рассмотрим произвольный граф, для которого ранг системы времен прохождения равен единице.

Утверждение 1. Пусть дан конечный связный граф с временами прохождения ребер $t_1, = n_1 t_0 \dots, t_E = n_E t_0$, где $n_i \in \mathbb{N}$ и НОД$(n_1, \dots, n_E) = 1$.

Тогда, начиная с некоторого времени, количество пакетов будет постоянным. При этом:

1) Если существует цикл с временем прохождения, которое не делится нацело на $2t_0$, то

$$N(T) = 2\sum_{i=1}^{E} n_i.$$

2) В противном случае

$$N(T) = \sum_{i=1}^{E} n_i.$$

Доказательство этого утверждения мы здесь не приводим.

Утверждение 2. Пусть есть звездный граф из трех ребер e_1, e_2, e_3 с временами прохождения $t_1 = nt_0, t_2 = mt_0, t_3$, где $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ (НОД(n,m) = 1), а t_3 таково, что ранг t_1, t_2, t_3 над $\mathbb{Q}$ равен 2. Тогда количество пакетов асимптотически равно

$$N(T) = \frac{T}{2}\left(\frac{m+n}{t_3} + \frac{1}{t_0}\right) + o(T).$$

Доказательство. Изменение количества пакетов может происходить только во времена вида $2((n\alpha + m\beta)t_0 + t_3\gamma)$, где α, β, γ. Заметим, что это представление для времен неоднозначно. Если время можно представить в виде указанной суммы с $\alpha \geq 1, \beta \geq 1, \gamma \geq 1$, то в этот момент изменения $N(T)$ не происходит, так как пакеты придут в вершину по всем трем ребрам.

Замечание 4. Число $n\alpha$ можно представить в виде $n\alpha' + m\beta'$ $(\beta' \neq 0)$ тогда и только тогда, когда $\alpha \geq m$.

В силу этого утверждения для определения асимптотики $N(T)$ достаточно рассмотреть следующие времена:

1) $\gamma \neq 0, \beta = 0, 1 \leq \alpha < m$. В эти времена $N(T)$ увеличивается на 1. Количество таких времен – это количество пар (α, γ) таких, что $2(\alpha t_0 + \gamma t_3) < T$. Асимптотически этих пар: $(m-1)\frac{T}{2t_3}$.

2) $\gamma \neq 0, \alpha = 0, 1 \leq \beta < n$. Аналогично, количество таких пар асимптотически будет равно $(n-1)\frac{T}{2t_3}$.

3) $\alpha = 0, \beta = 0$. Количество таких времен, меньших T, растет как $\frac{T}{2t_3}$. Количество пакетов здесь увеличивается на 2.

4) $\gamma = 0$. Покажем, что линейные комбинации $\alpha n + \beta m$ содержат в себе все натуральные числа, большие некоторого числа.

Лемма 3. Если $(m, n) = 1$, то существует M, т.ч. любое $N > M$ можно представить в виде $N = \alpha n + \beta m$, где $\beta \geq 1, \alpha \geq 1$.

Доказательство. Числа $m, 2m, \ldots, nm$ дают все остатки при делении на n:

$$\{\beta m\}_{\beta=1}^{n} = \{\beta_i m = i + nk_i | i \in [0, n-1], k_i \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Пусть $k_0 = \max k_i$. Теперь возьмем любое $N > nk_0$. Тогда $N = i + nk$ $(k > k_0, 0 \leq i < n)$ и $N - \beta_i m = n(k - k_i)$. Значит, любое число, большее nk_0, можно представить в виде $\alpha n + \beta m$, где $1 \leq \beta \leq n, \alpha \geq 1$.

Поэтому асимптотика количества таких времен совпадает с асимптотикой чисел вида $2kt_0 (k \in \mathbb{N})$, меньших T. А поскольку в такие времена приходят 2 пакета из e_1 и e_2, то $N(T)$ увеличивается на 1.

4. Благодарности

В. Л. Чернышев благодарит М. М. Скриганова и Н. Г. Мощевитина за полезные обсуждения и внимание к работе. Авторы выражают благодарность А. И. Шафаревичу за постоянную поддержку в работе.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов МК-943.2010.1, РФФИ 10-07-00617-а и 09-07-00327-а, РНП 2.1.1/11818 и программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (госконтракт 14.740.11.0794).

Список литературы

1. Skriganov M. M. Ergodic theory on $\mathrm{SL}(n)$, Diophantine approximations and anomalies in the lattice point problem. // Invent. Math. 132, no. 1, 1998. p. 1–72.
2. Толченников А. А., Чернышев В. Л., Шафаревич А. И. Асимптотические свойства и классические динамические системы в квантовых задачах на сингулярных пространствах // Нелинейная динамика, 2010, т.6, No.3, с. 623-638.
3. Чернышев В. Л. Нестационарное уравнение Шрёдингера: статистика распространения гауссовых пакетов на геометрическом графе // Труды Математического Института им. В.А. Стеклова, 2010, т. 270, с. 249-265.

4. Чернышев В. Л., Шафаревич А. И. Квазиклассический спектр оператора Шредингера на геометрическом графе. // Математические заметки, том 82, №4, 2007. С. 606-620.

5. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, перевод с английского: редактор Г. Гаврилов, 1978. 432 С.

electronic scientific and technical periodical
SCIENCE and EDUCATION
El № FS77 - 30569. №0421100025. ISSN 1994-0408

The properties of the distribution of Gaussian packets on a spatial network

77-30569/239866

10, October 2011

V. L. Chernyshev

Bauman Moscow State Technical University
vchern@bmstu.ru

The description of the statistical behavior of Gaussian packets on a metric graph is considered. Semiclassical asymptotics of solutions of the Cauchy problem for the Schrödinger equation with initial data concentrated in the neighborhood of one point on the edge, generates a classical dynamical system on a graph. In a situation where all times for packets to pass over edges are linearly independent over the rational numbers, a description of the behavior of such systems is related to the number-theoretic problem of counting the number of lattice points in an expanding polyhedron. In this paper we show that for a final compact graph packets almost always are distributed evenly. The formula for the leading coefficient of the asymptotic behavior of the number of packets with an increasing time is obtained. The situation is also discussed where the edge travel times are not linearly independent over the rationals.

References

1. Skriganov M. M. Ergodic theory on $\mathrm{SL}(n)$, Diophantine approximations and anomalies in the lattice point problem. // Invent. Math. 132, no. 1, 1998. p. 1–72.
2. Tolchennikov A.A., Chernyshev, V.L., Shafarevich A.I. Asymptotic properties of the classical dynamical systems in quantum problems on singular spaces / / Nonlinear Dynamics, 2010, v.6, No.3, p.623-638 (in Russian).

3. Chernyshev V. L. Time-dependent Schrödinger equation: statistics of the distribution of Gaussian packets on a metric graph // Proc. Steklov Inst. Math., 270 (2010), p.246-262.
4. Chernyshev, V.L., Shafarevich A.I. Semiclassical spectrum of the Schrödinger operator on a geometric graph // Mathematical Notes, Volume 82, Numbers 3-4, 2007, p.542-554.
5. Christofides N., Graph Theory – An Algorithmic Approach, Academic Press, London, 1975. 415 p.