электронное научно-техническое издание
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 30569. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

Формула Фейнмана для полугрупп с мультипликативно возмущенными генераторами

77-30569/239563

10, октябрь 2011

Я. А. Бутко

УДК 517.987.4

МГТУ им. Н.Э. Баумана
yanabutko@yandex.ru

1. Введение

В настоящей работе рассматривается новый метод исследования и описания линейной динамики. Метод основан на представлении соответствующих эволюционных полугрупп (или, что то же самое, решений соответствующих эволюционных уравнений) с помощью формул Фейнмана, то есть в виде пределов конечнократных интегралов при стремлении кратности к бесконечности. Как известно, для многих начально-краевых задач функции Грина неизвестны в явном виде. В то же время для некоторых таких задач удается получить формулы Фейнмана, содержащие конечнократные интегралы только от элементарных функций. Такие формулы Фейнмана позволяют проводить непосредственные вычисления решений эволюционных уравнений, пригодны для аппроксимации переходных вероятностей случайных процессов, полезны для компьютерного моделирования стохастической и квантовой динамики. Термин “формула Фейнмана” был введен в статье [22]; в серии работ [22]–[27] был развит метод получения формул Фейнмана для эволюционных уравнений на основе использования теоремы Чернова [10]. В последнее десятилетие этот метод активно применяется для описания различных типов динамики в областях евклидовых пространств и римановых многообразий, в бесконечномерных линейных и нелинейных пространствах, при исследовании -адических аналогов уравнений математической физики (см., например, [1] — [9], [17] — [21]); а также для построения поверхностных мер на бесконечномерных многообразиях (см., например, [23] — [27]).

В данной работе рассмотрены мультипликативные возмущения генераторов сильно непрерывных полугрупп в банаховом пространстве некоторых непрерывных функций, и получены формулы Фейнмана для полугрупп с возмущенными генераторами. Эта работа обобщает результаты статьи [9], полученные для феллеровских полугрупп.

2. Предварительные сведения

В настоящей работе рассматриваются эволюционные уравнения следующего вида: $\frac{\partial f}{\partial t}(t,q) = Af(t,q)$, где A некоторый линейный оператор, действующий на функцию $f(t,\cdot)$ переменной $q \in Q$, Q — некоторое пространство, которое мы будем называть конфигурационным пространством системы, описываемой этим уравнением, $t \geq 0$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t,q) = Af(t,q), \\ f(0,q) = f_0(q). \end{cases} \tag{1}$$

Если A — это ограниченный оператор на некотором банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$ функций переменной q и $f_0 \in X$, то решение задачи Коши представимо в виде $f(t,q) = (e^{tA}f_0)(q)$, где оператор e^{tA} определяется как сумма ряда $e^{tA} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}A^n$, причем ряд сходится в равномерной операторной топологии. При этом, $\|e^{tA}\| \leq e^{t\|A\|}$, то есть оператор e^{tA} снова является ограниченным для любого $t \geq 0$. Кроме того, как видно из определения e^{tA}, справедливы соотношения $e^{tA} \circ e^{sA} = e^{(t+s)A}$ и $e^{0A} = \mathrm{Id}$, где Id — тождественный оператор на X.

Как правило, однако, оператор A не является ограниченным. В этом случае приведенная выше схема решения задачи Коши (1) обобщается описанным ниже образом. Пусть символ $\mathcal{L}(X)$ обозначает пространство всех непрерывных линейных операторов на X с сильной операторной топологией. Если $Dom(A) \subset X$ — это линейное подпространство и $A : Dom(A) \to X$ — линейный оператор, то $Dom(A)$ означает область определения A. Однопараметрическое семейство $(T_t)_{t\geq 0}$ ограниченных линейных операторов $T_t : X \to X$

называется сильно непрерывной полугруппой, если $T_0 = \mathrm{Id}$, $T_{s+t} = T_s \circ T_t$ для всех $s, t \geq 0$ и $\lim_{t\to 0} \|T_t\phi - \phi\|_X = 0$ для всех $\phi \in X$. Если $(T_t)_{t\geq 0}$ — сильно непрерывная полугруппа на банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$, то генератором этой полугруппы называется оператор A, определенный по формуле

$$A\phi := \lim_{t\to 0} \frac{T_t\phi - \phi}{t}$$

с областью определения

$$Dom(A) := \left\{ \phi \in X \,\middle|\, \quad \lim_{t\to 0} \frac{T_t\phi - \phi}{t} \quad \text{существует как сильный предел} \right\}.$$

Таким образом, если A — ограниченный оператор на X, то $T_t = e^{tA}$ — это сильно непрерывная полугруппа на X с генератором A. И в случае, если генератор A — неограниченный оператор, будем иногда использовать обозначение e^{tA} для соответствующей полугруппы.

Для корректно поставленной в банаховом пространстве X задачи Коши (1) ее решение представляется в виде $f(t, q) = T_t f_0(q)$ [12]. И значит решение задачи Коши (1) равносильно построению полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$ с заданным генератором A. Как правило, полугруппу $(T_t)_{t\geq 0}$ не удается получить в явном виде, но удается различными методами ее аппроксимировать. В настоящей работе используется метод приближения, основанный на теореме Чернова (см. [22]).

Теорема 1 (Чернова**).** Пусть X банахово пространство, $F : [0, \infty) \to L(X)$ — (сильно) непрерывное отображение такое, что $F(0) = \mathrm{Id}$ и $\|F(t)\| \leq e^{ct}$ для некоторой константы $c \in [0, \infty)$ и всех $t \geq 0$. Пусть D — это линейное подпространство $D(F'(0))$ такое, что сужение оператора $F'(0)$ на D замыкаемо. Пусть $(A, D(A))$ — соответствующее замыкание. Если $(A, D(A))$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$, то для всех $t_0 > 0$ последовательность операторов $(F(t/n))^n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к $(T_t)_{t\geq 0}$ при $n \to \infty$ в сильной операторной топологии равномерно по $t \in [0, t_0]$, то есть $T_t = \lim_{n\to\infty}(F(t/n))^n$.

Заметим, что производная в нуле функции $F : [0, \epsilon) \to L(X)$, $\epsilon > 0$, — это линейное отображение $F'(0) : D(F'(0)) \to X$ такое, что

$$F'(0)g := \lim_{t\searrow 0} \frac{F(t)g - F(0)g}{t},$$

где $D(F'(0))$ — векторное пространство всех тех элементов $g \in X$, для которых этот предел существует.

Семейство операторов $(F(t))_{t\geq 0}$ называется *эквивалентным по Чернову* полугруппе $(T_t)_{t\geq 0}$ (будем обозначать это так: $F(t) \sim T_t$), если это семейство удовлетворяет всем требованиям теоремы Чернова по отношению к этой полугруппе, то есть по теореме Чернова в пространстве $L(X)$ локально равномерно по t выполняется равенство

$$T_t = \lim_{n\to\infty} (F(t/n))^n. \tag{2}$$

Это равенство мы будем называть *формулой Фейнмана*. Мы используем такую терминологию, так как во многих случаях операторы $F(t)$ оказываются интегральными операторами, то есть в правой части формулы Фейнмана стоит предел кратных интегралов при возрастании кратности к бесконечности, а именно Ричард Фейнман ([13], [14]) впервые рассмотрел конструкцию функционального интеграла как предела обыкновенных многократных интегралов по пространствам неограниченно возрастающей размерности. Любое представление решения начальной (или начально–краевой) задачи для эволюционного уравнения (или, эквивалентно, представление полугруппы, разрешающей данную задачу) в виде предела кратных интегралов при возрастании кратности к бесконечности мы будем называть формулой Фейнмана.

Пределы в формулах Фейнмана совпадают с некоторыми функциональными интегралами по вероятностным мерам или по фейнмановским псевдомерам на множестве траекторий некоторой физической системы. Представление решения начальной (или начально–краевой) задачи для эволюционного уравнения (или, эквивалентно, представление поугруппы, разрешающей данную задачу) в виде функционального интеграла обычно называется *формулой Фейнмана–Каца*. Таким образом, кратные интегралы в формуле Фейнмана для некоторой задачи аппроксимируют функциональный интеграл в формуле Фейнмана–Каца, представляющей решение этой же задачи. Такие аппроксимации во многих случаях представляют собой кратные интегралы только от элементарных функций и, следовательно, могут быть использованы для непосредственных вычислений и моделирования рассматриваемой динамики.

З а м е ч а н и е 1. Пусть операторы A, B, $A + B$ являются генераторами сильно непрерывных полугрупп e^{tA}, e^{tB} и $e^{t(A+B)}$ на некотором банаховом пространстве X соответственно, причем операторы A и B не коммутируют. Тогда $e^{tA} \circ e^{tB} \neq e^{t(A+B)} \neq e^{tB} \circ e^{tA}$. Тем не менее, можно показать, что

$$e^{tA} \circ e^{tB} \sim e^{t(A+B)}, \qquad e^{tB} \circ e^{tA} \sim e^{t(A+B)},$$

и значит, из теоремы Чернова следует равенство

$$e^{t(A+B)} = \lim_{n\to\infty} \left[e^{\frac{t}{n}A} \circ e^{\frac{t}{n}B}\right]^n = \lim_{n\to\infty} \left[e^{\frac{t}{n}B} \circ e^{\frac{t}{n}A}\right]^n.$$

Последняя формула широко известна как формула Троттера.

З а м е ч а н и е 2. Пусть A — ограниченный оператор. Тогда, можно показать, что $\mathrm{Id} + tA \sim e^{tA}$, и значит, по теореме Чернова

$$e^{tA} = \lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{Id} + \frac{t}{n}A\right)^n.$$

что обобщает классическую формулу анализа $e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

3. Формула Фейнмана для полугрупп с мультипликативно возмущенными генераторами

Пусть Q — некоторое локально компактное отделимое пространство, $(X, \|\cdot\|_X)$ — банахово пространство некоторых непрерывных функций на Q с нормой $\|f\| = \sup\limits_{q\in Q} |f(q)|$. Пусть $(T_t)_{t\geq 0}$ — сильно непрерывная полугруппа на X с генератором A. Пусть функция $a(\cdot) : Q \to [c_1, c_2] \subset (0, \infty)$ непрерывна на Q, $aX \subset X$. Тогда оператор $\widetilde{A}$, определенный по формуле

$$\widetilde{A}\phi(q) = a(q)(A\phi)(q), \quad Dom(\widetilde{A}) = Dom(A),$$

также является (см. [11], [15], [16] и ссылки в них) генератором сильно непрерывной полугруппы, которую мы обозначим символом $(\widetilde{T}_t)_{t\geq 0}$. Оператор $\widetilde{A}$ будем называть мультипликативным возмущением генератора A, а полугруппу $(\widetilde{T}_t)_{t\geq 0}$ — полугруппой с мультипликативно возмущенным функцией $a(\cdot)$ генератором.

Пусть операторы T_t при всех $t \geq 0$ удовлетворяют условию $\|T_t\| \leq e^{tk}$ при некотором $k > 0$. Рассмотрим семейство операторов $(F(t))_{t\geq 0}$ на X, действующих следующим образом:

$$F(t)\phi(q) = (T_{a(q)t}\phi)(q), \quad \forall\, \phi \in X, \quad \forall\, q \in Q.$$

Заметим, что семейство $(F(t))_{t\geq 0}$ уже не является однопараметрической полугруппой.

Теорема 2. Семейство $(F(t))_{t\geq 0}$ эквивалентно по Чернову полугруппе $(\widetilde{T}_t)_{t\geq 0}$, то есть локально равномерно по $t\geq 0$ в $\mathcal{L}(X)$ справедлива формула Фейнмана

$$\widetilde{T}_t = \lim_{n\to\infty}\left[\widetilde{F}(t/n)\right]^n.$$

◄ Проверим выполнение условий теоремы Чернова. Очевидно, что $F(0) = T_0 = \mathrm{Id}$. Кроме того, $\|F(t)\| \leq e^{c_2kt}$, так как

$$\begin{aligned}
\|F(t)\phi\|_X &= \sup_{q\in Q}|(T_{a(q)t}\phi)(q)| \\
&\leq \sup_{q,q_0\in Q}|(T_{a(q_0)t}\phi)(q)| \\
&\leq \sup_{q_0\in Q}\|(T_{a(q_0)t}\|\cdot\|\phi\|_X \\
&\leq e^{c_2kt}\|\phi\|_X.
\end{aligned}$$

Покажем, что семейство $(F(t))_{t\geq 0}$ сильно непрерывно:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\|F(t)\phi-\phi\|_X &= \lim_{t\to 0}\sup_{q\in Q}|(T_{a(q)t}\phi)(q)-\phi(q)| \\
&\leq \lim_{t\to 0}\sup_{q,q_0\in Q}|(T_{a(q_0)t}\phi)(q)-\phi(q)| \\
&= \lim_{t\to 0}\sup_{q_0\in Q}\|T_{a(q_0)t}\phi-\phi\|_X \\
&\leq \lim_{t\to 0}\sup_{c\in[c_1,c_2]}\|T_{ct}\phi-\phi\|_X \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Далее, для любого $\phi\in Dom(A)$ имеем:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\left\|\tfrac{F(t)\phi-\phi}{t}-\widetilde{A}\phi\right\|_X &= \lim_{t\to 0}\sup_{q\in Q}\left|\tfrac{(T_{a(q)t}\phi)(q)-\phi(q)}{t}-a(q)A\phi(q)\right| \\
&\leq \lim_{t\to 0}\sup_{q,q_0\in Q}\left|\tfrac{(T_{a(q_0)t}\phi)(q)-\phi(q)}{t}-a(q_0)A\phi(q)\right| \\
&\leq \lim_{t\to 0}\sup_{q,q_0\in Q}\left|\tfrac{1}{a(q_0)t}\int\limits_0^{a(q_0)t}a(q_0)A(T_s\phi(q)-\phi(q))ds\right| \\
&\leq \lim_{t\to 0}\tfrac{1}{t}\int\limits_0^{c_2t}\|A(T_s\phi-\phi)\|_X ds \\
&= 0
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались стандарными свойствами сильно непрерывных полугрупп: $T_s\phi \in Dom(A)$ для любого $\phi \in Dom(A)$ и любого $s \geq 0$, а также $T_t\phi - \phi = A\int\limits_0^t T_s\phi ds$ для любого $\phi \in X$.

Таким образом, все условия теоремы Чернова выполнены, а значит, семейство $(F(t))_{t\geq 0}$ эквивалентно по Чернову полугруппе $(\widetilde{T}_t)_{t\geq 0}$. ►

Следствие 1. (ср. с [9]) Пусть $Q = \mathbb{R}^d$, $(T_t)_{t\geq 0}$ — феллеровская полугруппа, т.е. сильно непрерывная сжимающая сохраняющая положительность полугруппа на пространстве $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ непрерывных убывающих на бесконечности к нулю функций. Пусть $P_t(q, dy)$ — переходная вероятность соответствующего феллеровского случайного процесса, то есть $T_t\phi(q) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \phi(y)P_t(q, dy)$. Тогда, по теореме 2, семейство операторов $(F(t))_{t\geq 0}$, действующее по формуле

$$F_t\phi(q) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \phi(y)P_{a(q)t}(q, dy),$$

эквивалентно по Чернову полугруппе $(\widetilde{T}_t)_{t\geq 0}$ с мультипликативно возмущенным функцией $a(\cdot)$ генератором. И значит, справедлива формула Фейнмана

$$\widetilde{T}_t\phi(q_0) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \phi(q_n)P_{a(q_0)t/n}(q_0, dq_1)P_{a(q_1)t/n}(q_1, dq_2)\cdots \\ \cdots P_{a(q_{n-1})t/n}(q_{n-1}, dq_n) \qquad (3)$$

Замечание 3. Мультипликативное возмущение генератора марковского процесса равносильно процедуре случайной замены времени (см. [5]). Отметим, что $P(t, x, dy) = P_{a(x)t}(x, dy)$ в общем случае НЕ является переходной вероятностью какого-либо случайного процесса. Тем не менее, если переходная вероятность $P_t(q, dy)$ исходного процесса известна, то формула (3) позволяет аппроксимировать не выражающуюся в явном виде переходную вероятность модифицированного процесса.

Пример 1 (формула Фейнмана для диффузии с переменным коэффициентом). Рассмотрим процесс броуновского движения в $\mathbb{R}^d$. Генератор этого процесса — это оператор Лапласа $A = \frac{1}{2}\Delta$. Плотность переходной вероятности задается гауссовской экспонентой

$$p_t(x) = (2\pi t)^{-d/2}\exp\left\{-\frac{|x|^2}{2t}\right\}.$$

Пусть $(\widetilde{T}_t)_{t\geq 0}$ — полугруппа на $C(\mathbb{R}^d)$ с мультипликативно возмущенным функцией $a(\cdot)$ генератором A. Эта полугруппа соответствует диффузионному процессу с переменным коэффициентом диффузии $\sqrt{a}$. Тогда по Теореме 2 для любого $\phi \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$ справедлива формула Фейнмана:

$$\widetilde{T}_t\phi(q_0) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^d} (2\pi a(q_0)t/n)^{-d/2} \exp\left\{ -\frac{|q_0-q_1|^2}{2a(q_0)t/n}\right\} \cdots$$
$$\cdots (2\pi a(q_{n-1})t/n)^{-d/2} \exp\left\{ -\frac{|q_{n-1}-q_n|^2}{2a(q_{n-1})t/n}\right\} \phi(q_n) dq_1 \cdots dq_n$$

Пример 2 (Процесс типа Коши с переменным коэффициентом). Рассмотрим процесс Коши в $\mathbb{R}^d$. Плотность его переходной вероятности задается формулой

$$p_t(x) = \Gamma\left(\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right) \frac{t}{[\pi|x|^2+t^2]^{(d+1)/2}},$$

где $\Gamma(\cdot)$ — это гамма-функция Эйлера. Рассмотрим мультипликативное возмущение генератора процесса Коши функцией $a(\cdot)$. Тогда для соответствующей полугруппы $(\widetilde{T}_t)_{t\geq 0}$ с мультипликативно возмущенным генератором по Теореме 2 имеем:

$$\widetilde{T}_t\phi(q_0) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \left[\Gamma\left(\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]^n \frac{a(q_0)t/n}{[(a(q_0)t/n)^2+(\pi|q_0-q_1|)^2]^{(d+1)/2}} \cdots$$
$$\cdots \frac{a(q_{n-1})t/n}{[(a(q_{n-1})t/n)^2+(\pi|q_{n-1}-q_n|)^2]^{(d+1)/2}} \phi(q_n) dq_1 \cdots dq_n.$$

4. Заключение

В работе получена новая формула для описания возмущенной динамики. Рассмотрены примеры, когда полученная формула дает явные выражения, пригодные для аппроксимации и компьютерного моделирования возмущенной динамики.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации МК-943.2010.1. и гранта РФФИ 10-01-00724-а.

Список литературы

1. Бутко Я.А. Формулы Фейнмана и функциональные интегралы для диффузии со сносом в области многообразия // Мат. Заметки. 2008. Т. 83, N. 3. С. 333-349.
2. Бутко Я.А., Гротхаус М., Смолянов О.Г. Формула Фейнмана для параболического уравнения второго порядка в области // Доклады РАН. 2008. Т. 421, N. 6. С. 727-732.
3. Бутко Я.А., Смолянов О.Г. Формулы Фейнмана в квантовой и стохастической динамике // Современные проблемы математики и механики. 2011. Т. 6, N. 1. С. 61-75.
4. Бутко Я.А., Смолянов О.Г., Шиллинг Р.Л. Формулы Фейнмана для феллеровских полугрупп // Доклады РАН. 2010. Т. 434, N. 1. С. 7-11.
5. Портенко Н.И., Скороход А.В., Шуренков В.М. Марковские процессы // Итоги науки и техники. Серия Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 46. Теория вероятностей-4. М.: ВИНИТИ, 1989г. 248с.
6. Butko Ya. A. Function integrals corresponding to a solution of the Cauchy-Dirichlet problem for the heat equation in a domain of a Riemannian manifold // J. of Math. Sci. 2008. Vol. 151, no. 1. Pp. 2629-2638.
7. Butko Ya., Grothaus M., Smolyanov O.G. Lagrangian Feynman Formulae for Second Order Parabolic Equations in Bounded and Unbounded Domains // IDAQP. 2010. Vol. 13, no. 3. Pp. 377-392.
8. Butko Ya. A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Hamiltonian Feynman-Kac and Feynman formulae for dynamics of particles with position-dependent mass // Int. J. Theor. Phys. 2011. Vol. 50. Pp. 2009-2018.
9. Butko Ya. A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Lagrangian and Hamiltonian Feynman formulae for some Feller semigroups and their perturbations // IDAQP. 2011, to appear.
10. Chernoff P. Product formulas, nonlinear semigroups and addition of unbounded operators // Mem. Am. Math. Soc. 1974. Vol. 140.

11. Dorroh J.R. Contraction semi-groups in a function space // Pacific J.Math. 1966. Vol. 19, no. 1. Pp. 35–38.
12. Engel K. J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. Springer, 1995. 586 Pp.
13. Feynman R. P. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics // Rev. Mod. Phys. 1948. Vol. 20. Pp. 367–387.
14. Feynman R.P. An Operator Calculus Having Applications in Quantum Electrodynamics // 1951. Phys. Rev. Vol. 84. Pp. 108-128.
15. Gustafson K, Lumer G. Multiplicative perturbation of semigroup generators // Pacific J. Math. 1972. Vol. 41, no. 3. Pp. 731-742.
16. Lumer G. Perturbation de générateurs infinitésimaux du type “changement de temps” // 1974. Ann. Inst. Fourier. Vol. 23, N. 4. Pp. 271-279.
17. Obrezkov O.O. The Proof of the Feynman-Kac Formula for Heat Equation on a Compact Riemannian Manifold // IDAQP. 2003. Vol. 6, no. 2. Pp. 311-320.
18. Obrezkov O., Smolyanov O.G., Truman A. The Generalized Chernoff Theorem and Randomized Feynman Formula // Doklady Math. 2005. Vol. 71, no. 1. Pp. 105-110.
19. Sakbaev V. G., Smolyanov O. G. Dynamics of a Quantum Particle with Discontinuous Position-Dependent Mass // Dokl. Math. 2010. Vol. 82, no. 1. Pp. 630–634.
20. Smolyanov O.G. Feynman type formulae for quantum evolution and diffusion on manifolds and graphs // Quant. Bio-Informatics, World Sc. 2010. Vol. 3. Pp. 337–347.
21. Smolyanov O.G., Shamarov N.N. Feynman and Feynman-Kac formulae for evolution equations with Vladimirov operator // Doklady Math. 2008. Vol. 77, no. 3. Pp. 345–349.
22. Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula // J. Math. Phys. 2002. Vol. 43, no. 10. Pp. 5161-5171.
23. Smolyanov O.G., Weizsäcker H.v. and Wittich O., Diffusion on compact Riemannian manifolds, and surface measures // Doklady Math. 2000. Vol. 61. Pp. 230–234.

24. Smolyanov O.G., Weizsäcker H. v., Wittich O. Brownian Motion on a Manifold as Limit of Stepwise Conditioned Standard Brownian Motions // Stochastic Proceses, Physics and Geometry: New Interplays. II: A Volume in Honor of Sergio Albeverio. Ser. Conference Proceedings. Canadian Math. Society. Providence: AMS. 2000. Vol. 29. Pp. 589-602.
25. Smolyanov O. G., Weizsäcker H. v., Wittich O. Chernoff's theorem and the construction of semigroups // Evolution Equations: Applications to Physics, Industry, Life Sciences and Economics. Birkhäuser, Prog. Nonlinear Differ. Eq. Appl. 2003. Vol. 55. Pp. 349–358.
26. Smolyanov O.G., Weizsäcker H.v., Wittich O. Surface Measures and Initial Boundary Value Problems Generated by Diffusions with Drift // Doklady Math. 2007. Vol. 76, no. 1. Pp. 606-610.
27. Smolyanov O.G., Weizsäcker H. v., Wittich O. Chernoff's Theorem and Discrete Time Approximations of Brownian Motion on Manifolds // Potent. Anal. 2007. Vol. 26, no. 1. Pp. 1-29.

electronic scientific and technical periodical
SCIENCE and EDUCATION
El № FS77 - 30569. №0421100025. ISSN 1994-0408

Feynman formula for semigroups with multiplicatively perturbed generators

77-30569/239563

10, October 2011

Ya. A.Butko

Bauman Moscow State Technical University
yanabutko@yandex.ru

A new method to describe linear dynamics is considered. This method is based on representations of corresponding evolution semigroups (or, what is the same, representations of solutions of corresponding evolution equations) by Feynman formulae, i.e. by limits of n-fold iterated integrals when n tends to infinity. Green functions of many initial-boundary value problems are not known explicitly, whereas it is possible to obtain Feynman formulae containing only elementary functions as integrands for some of these problems. Such Feynman formulae allow to calculate solutions of evolution equations directly, to approximate transition probabilities of stochastic processes, are useful for computer modeling of quantum and stochastic dynamics. The notion "Feynman formula" (in this context) and the method to obtain such formulae were introduced in works of Smolyanov and his coauthors in the late nineties. In the last decade it has been actively applied to describe different types of dynamics in domains of Euclidean spaces and Riemannian manifolds, in infinite dimensional linear and non-linear spaces. In the present note the multiplicative perturbations of generators of strongly continuous semigroups on a Banach space of some continuous functions are considered. A Feynman formula is obtained for the semigroups with perturbed generators. Therefore, a new formula is given for the description and the investigation of the perturbed dynamics. Also some particular examples, when the obtained Feynman formula contains only elementary functions as integrands, are considered in this note. Keywords: Feynman formula, approximation of semigroups, approximation of transitional probabilities, multiplicative perturbations.

References

1. Butko Ya. A. Feynman Formulas and Functional Integrals for Diffusion with Drift in a Domain on a Manifold // Math. Notes. 2008. Vol. 83, no. 3. Pp. 301-316.

2. Butko Ya.A., Grothaus M., Smolyanov O.G. Feynman Formula for a Class of Second-Order Parabolic Equations in a Bounded Domain // Doklady Math. 2008. Vol. 78, No. 1. Pp. 590-595.
3. Butko Ya.A., Smolyanov O.G. Formuly Fejnmana v kvantovoj i stohasticheskoj dinamike // Sovremennye problemy matematiki i mehaniki. 2011. Vol. 6, no. 1. Pp. 61-75.
4. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G., Feynman formulae for Feller semigroups // Doklady Math. 2010. Vol. 82, no. 2. Pp. 679-683.
5. Portenko N.I., Skorohod A.V., Shurenkov V.M. Markovskie processy // Itogi nauki i tehniki. Serija Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravlenija. Vol. 46. Teorija verojatnostej-4. M.: VINITI, 1989. 248 p.
6. Butko Ya. A. Function integrals corresponding to a solution of the Cauchy-Dirichlet problem for the heat equation in a domain of a Riemannian manifold // J. of Math. Sci. 2008. Vol. 151, no. 1. Pp. 2629-2638.
7. Butko Ya., Grothaus M., Smolyanov O.G. Lagrangian Feynman Formulae for Second Order Parabolic Equations in Bounded and Unbounded Domains // IDAQP. 2010. Vol. 13, no. 3. Pp. 377-392.
8. Butko Ya. A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Hamiltonian Feynman-Kac and Feynman formulae for dynamics of particles with position-dependent mass // Int. J. Theor. Phys. 2011. Vol. 50. Pp. 2009-2018.
9. Butko Ya. A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Lagrangian and Hamiltonian Feynman formulae for some Feller semigroups and their perturbations // IDAQP. 2011, to appear.
10. Chernoff P. Product formulas, nonlinear semigroups and addition of unbounded operators // Mem. Am. Math. Soc. 1974. Vol. 140.
11. Dorroh J.R. Contraction semi-groups in a function space // Pacific J.Math. 1966. Vol. 19, no. 1. Pp. 35–38.
12. Engel K. J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. Springer, 1995. 586 Pp.
13. Feynman R. P. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics // Rev. Mod. Phys. 1948. Vol. 20. Pp. 367–387.
14. Feynman R.P. An Operator Calculus Having Applications in Quantum Electrodynamics // 1951. Phys. Rev. Vol. 84. Pp. 108-128.
15. Gustafson K, Lumer G. Multiplicative perturbation of semigroup generators // Pacific J. Math. 1972. Vol. 41, no. 3. Pp. 731-742.
16. Lumer G. Perturbation de générateurs infinitésimaux du type "changement de temps" // 1974. Ann. Inst. Fourier. Vol. 23, N. 4. Pp. 271-279.
17. Obrezkov O.O. The Proof of the Feynman-Kac Formula for Heat Equation on a

Compact Riemannian Manifold // IDAQP. 2003. Vol. 6, no. 2. Pp. 311-320.

18. Obrezkov O., Smolyanov O.G., Truman A. The Generalized Chernoff Theorem and Randomized Feynman Formula // Doklady Math. 2005. Vol. 71, no. 1. Pp. 105-110.
19. Sakbaev V. G., Smolyanov O. G. Dynamics of a Quantum Particle with Discontinuous Position-Dependent Mass // Dokl. Math. 2010. Vol. 82, no. 1. Pp. 630–634.
20. Smolyanov O.G. Feynman type formulae for quantum evolution and diffusion on manifolds and graphs // Quant. Bio-Informatics, World Sc. 2010. Vol. 3. Pp. 337–347.
21. Smolyanov O.G., Shamarov N.N. Feynman and Feynman-Kac formulae for evolution equations with Vladimirov operator // Doklady Math. 2008. Vol. 77, no. 3. Pp. 345–349.
22. Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula // J. Math. Phys. 2002. Vol. 43, no. 10. Pp. 5161-5171.
23. Smolyanov O.G., Weizsäcker H.v. and Wittich O., Diffusion on compact Riemannian manifolds, and surface measures // Doklady Math. 2000. Vol. 61. Pp. 230–234.
24. Smolyanov O.G., Weizsäcker H. v., Wittich O. Brownian Motion on a Manifold as Limit of Stepwise Conditioned Standard Brownian Motions // Stochastic Proceses, Physics and Geometry: New Interplays. II: A Volume in Honor of Sergio Albeverio. Ser. Conference Proceedings. Canadian Math. Society. Providence: AMS. 2000. Vol. 29. Pp. 589-602.
25. Smolyanov O. G., Weizsäcker H. v., Wittich O. Chernoff's theorem and the construction of semigroups // Evolution Equations: Applications to Physics, Industry, Life Sciences and Economics. Birkhäuser, Prog. Nonlinear Differ. Eq. Appl. 2003. Vol. 55. Pp. 349–358.
26. Smolyanov O.G., Weizsäcker H.v., Wittich O. Surface Measures and Initial Boundary Value Problems Generated by Diffusions with Drift // Doklady Math. 2007. Vol. 76, no. 1. Pp. 606-610.
27. Smolyanov O.G., Weizsäcker H. v., Wittich O. Chernoff's Theorem and Discrete Time Approximations of Brownian Motion on Manifolds // Potent. Anal. 2007. Vol. 26, no. 1. Pp. 1-29.