электронное научно-техническое издание
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 30569. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

Условие управляемости аффинной системы
77-30569/236936

10, октябрь 2011
Д. А. Фетисов
УДК 519.71

МГТУ им. Н.Э. Баумана
mathmod@bmstu.ru

1. Введение

Проблема управляемости нелинейных динамических систем составляет значительный раздел современной теории управления. Одно из направлений исследований заключается в преобразовании исходной системы в некоторую эквивалентную систему того или иного специального вида, для которого рассматриваемая задача может быть решена с помощью известных методов. Эта идея использована для исследования управляемости аффинных систем в работах [1]–[3]. В частности, известно, что если аффинная система эквивалентна системе канонического вида, регулярной на всем пространстве состояний, то эта система управляема. В данной работе рассматривается задача исследования управляемости систем, эквивалентных регулярным системам квазиканонического вида. Ранее в статье [4] получены условия управляемости таких систем. В данной работе предложено еще одно условие управляемости для этого класса систем.

2. Основные определения

Рассмотрим аффинную систему со скалярным управлением

$$\dot{x} = G_1(x) + G_2(x)u, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad u \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

$$G_i(x) = (G_{i1}(x), \ldots, G_{in}(x))^{\text{т}}, \quad G_{ij}(x) \in C^\infty(\mathbf{R}), \quad i = 1, 2,\ j = \overline{1, n}$$

и задачу нахождения такого непрерывного управления $u = u(t)$, $t \in [0, t_k]$, которое за время t_k переводит эту систему из начального состояния

$$x(0) = x_0 \tag{2}$$

в конечное

$$x(t_k) = x_k. \tag{3}$$

Будем полагать, что система (1) эквивалентна в $\mathbf{R}^n$ регулярной системе квазиканонического вида:

$$\begin{array}{rcl} \dot{z}_1 & = & z_2 \\ \dot{z}_2 & = & z_3 \\ & \ldots & \\ \dot{z}_{n-1} & = & f(z,\eta) + g(z,\eta)u \\ \dot{\eta} & = & q(z,\eta), \end{array} \tag{4}$$

где $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})^{\text{в}} \in \mathbf{R}^{n-1}$, $\eta \in \mathbf{R}$, $f(z,\eta), g(z,\eta) \in C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$, $g(z,\eta)$ не обращается в нуль в $\mathbf{R}^n$.

Отображение эквивалентности $\Phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ позволяет сформулировать для системы (4) эквивалентную терминальную задачу: найти непрерывное управление $u = u(t)$, $t \in [0, t_k]$, переводящее систему (4) за тот же интервал времени из начального состояния

$$\Phi(x_0) = (z_{10}, z_{20}, \ldots, z_{n-1,0}, \eta_0)^{\text{в}} \tag{5}$$

в конечное состояние

$$\Phi(x_k) = (z_{1k}, z_{2k}, \ldots, z_{n-1,k}, \eta_k)^{\text{в}}. \tag{6}$$

Решение этой терминальной задачи одновременно является и решением исходной задачи (2), (3) для аффинной системы (1), так как при переходе к эквивалентной системе квазиканонического вида управление и время не преобразуются, а отображение Φ^{-1} отображает траектории системы (4) в траектории аффинной системы (1), реализуемые тем же управлением. В работе [4] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для того чтобы существовало непрерывное управление $u = u(t)$, $t \in [0, t_k]$, являющееся решением терминальной задачи (5), (6) для системы (4), необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $B(t) \in C^{n-1}([0, t_k])$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} B(0) &= z_{10}, \quad \dot{B}(0) = z_{20}, \quad \ldots, \quad B^{(n-2)}(0) = z_{n-1,0}, \\ B(t_k) &= z_{1k}, \quad \dot{B}(t_k) = z_{2k}, \quad \ldots, \quad B^{(n-2)}(t_k) = z_{n-1,k} \end{aligned} \tag{7}$$

и такая, что задача Коши

$$\dot{\eta} = q(\overline{B}(t), \eta), \quad \eta(0) = \eta_0, \tag{8}$$

$$\overline{B}(t) = (B(t), \dot{B}(t), \ldots, B^{(n-2)}(t))^{\text{в}},$$

имеет решение $\eta(t)$, определенное при $t \in [0, t_k]$ и удовлетворяющее условию

$$\eta(t_k) = \eta_k. \tag{9}$$

Согласно теореме 1, чтобы убедиться в существовании решения терминальной задачи (5), (6) для системы (4), достаточно найти функцию $B(t)$, удовлетворяющую указанным в теореме условиям. В [4] предложено искать $B(t)$ в виде

$$B(t) = b(t) + c\, d(t), \tag{10}$$

где c – пока не известная константа, функция $d(t)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} d(0) &= 0, \quad \dot{d}(0) = 0, \quad \ldots, \quad d^{(n-2)}(0) = 0, \\ d(t_k) &= 0, \quad \dot{d}(t_k) = 0, \quad \ldots, \quad d^{(n-2)}(t_k) = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

функция $b(t) \in C^{n-1}([0, t_k])$ и выполнены условия

$$\begin{aligned} b(0) &= z_{10}, \quad \dot{b}(0) = z_{20}, \quad \ldots, \quad b^{(n-2)}(0) = z_{n-1,0}, \\ b(t_k) &= z_{1k}, \quad \dot{b}(t_k) = z_{2k}, \quad \ldots, \quad b^{(n-2)}(t_k) = z_{n-1,k}. \end{aligned} \tag{12}$$

В качестве $d(t)$ можно взять любой многочлен, для которого выполняются соотношения (11), например,

$$d(t) = t^{n-1}(t_k - t)^{n-1}. \tag{13}$$

В качестве $b(t)$ можно взять интерполяционный многочлен степени $2n - 3$.

При любых значениях c функция $B(t)$ вида (10) удовлетворяет условиям (7). Обозначим

$$\overline{b}(t) = (b(t), \dot{b}(t), \ldots, b^{(n-2)}(t))^{\text{в}}, \qquad \overline{d}(t) = (d(t), \dot{d}(t), \ldots, d^{(n-2)}(t))^{\text{в}},$$

так что $\overline{B}(t) = \overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t)$. Тогда задача Коши (8) с учетом условия (9) преобразуется к граничной задаче

$$\dot{\eta} = q(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t), \eta), \quad \eta(0) = \eta_0, \quad \eta(t_k) = \eta_k. \tag{14}$$

Если удастся найти $c = c_*$, для которого существует решение $\eta(t)$ граничной задачи (14), получим, что функция $B_*(t) = b(t) + c_*\,d(t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 и, следовательно, терминальная задача (5), (6) для системы (4) имеет решение.

Далее будем считать, что в системе (4) функция $q(z, \eta)$ является произведением функций $Q(z)$ и $R(\eta)$, причем $R(\eta)$ не обращается в нуль в $\mathbf{R}$. Такая система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\ldots \\ \dot{z}_{n-1} &= f(z, \eta) + g(z, \eta)u \\ \dot{\eta} &= Q(z)\,R(\eta). \end{aligned} \tag{15}$$

Для системы (15) граничная задача (14) преобразуется к виду

$$\dot{\eta} = Q(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))R(\eta), \quad \eta(0) = \eta_0, \quad \eta(t_k) = \eta_k. \tag{16}$$

Интегрируя это уравнение с разделяющимися переменными на отрезке $[0, t_k]$ и учитывая начальные и конечные значения переменной η, получим

$$\int\limits_{\eta_0}^{\eta_k} \frac{d\eta}{R(\eta)} = \int\limits_0^{t_k} Q(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))dt. \tag{17}$$

Уравнение (17) представляет собой уравнение для определения неизвестной константы c. Пусть это уравнение имеет решение $c = c_*$. Найденному значению $c = c_*$ будет соответствовать решение $\eta(t)$ граничной задачи (16) в том случае, если уравнение

$$\int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{R(\eta)} = \int\limits_0^{t} Q(\overline{b}(t) + c_*\,\overline{d}(t))dt \tag{18}$$

разрешимо относительно η для всех $t \in [0, t_*]$.

Таким образом, для существования решения терминальной задачи достаточно выполнения двух условий:

1) существования решения $c = c_*$ уравнения (17),

2) разрешимости уравнения (18) относительно η при всех $t \in [0, t_*]$.

3. Условие управляемости

Рассмотрим систему (15), в которой функция $Q(z)$ является многочленом нечетной степени:

$$Q(z) = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{n-1}:\\ i_1+\ldots+i_{n-1}\leqslant 2l+1}} a_{i_1,\ldots,i_{n-1}}\, z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_{n-1}^{i_{n-1}}, \tag{19}$$

а слагаемые старшей степени имеют вид

$$z_1^{2l+1} + \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{n-1}:\\ i_1+\ldots+i_{n-1}=2l+1}} a_{i_1,\ldots,i_{n-1}}\, z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_{n-1}^{i_{n-1}}, \tag{20}$$

причем в этой сумме, за исключением z_1^{2l+1}, присутствуют лишь слагаемые, в которых сумма показателей степеней переменных с четными индексами нечетна, т.е.

$$a_{i_1,\ldots,i_{n-1}} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad i_2 + i_4 + i_6 + \ldots = 2k + 1. \tag{21}$$

Теорема 2. Пусть в системе (15) функция $Q(z)$ является многочленом (19) нечетной степени, в котором слагаемые старшей степени имеют вид (20) и удовлетворяют условию (21), функция $R(\eta)$ положительна и ограничена в $\mathbb{R}$:

$$\exists M > 0\ \forall \eta \in \mathbb{R}: \quad 0 < R(\eta) \leqslant M.$$

Такая система управляема в $\mathbb{R}^n$ за любой интервал времени $[0, t_*]$.

◄ Покажем, что если функция $Q(z)$ удовлетворяет условиям теоремы, то существует функция $B(t)$, для которой выполняются условия теоремы 1.

Будем искать $B(t)$ в виде (10), где $b(t)$ – интерполяционный многочлен степени $2n-3$, удовлетворяющий условиям (12), $d(t)$ – многочлен (13). Для любых значений c условие (7) при этом выполняется. Покажем, что, каковы бы ни были начальное и конечное состояния системы (15), существует значение c, для которого граничная задача (16) имеет решение.

Покажем сначала существование решения у уравнения (17). Учитывая вид функции $Q(z)$, получим

$$Q(\bar{b}(t) + c\,\bar{d}(t)) = c^{2l+1}\, d^{2l+1}(t) + \\ + c^{2l+1} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{n-1}:\\ i_1+\ldots+i_{n-1}=2l+1}} a_{i_1,\ldots,i_{n-1}}\, d^{i_1}(t)\, \dot{d}^{i_2}(t) \ldots (d^{(n-2)}(t))^{i_{n-1}} + \tilde{\gamma}(c,t),$$

где $\tilde{\gamma}(c,t)$ содержит слагаемые младших степеней по c. Отсюда следует, что коэффициент при c^{2l+1} в уравнении (17) равен

$$\int\limits_0^{t_*} d^{2l+1}(t)dt + \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{n-1}:\\ i_1+\ldots+i_{n-1}=2l+1}} a_{i_1,\ldots,i_{n-1}} \int\limits_0^{t_*} d^{i_1}(t)\dot{d}^{i_2}(t) \ldots (d^{(n-2)}(t))^{i_{n-1}} dt.$$

Функция $d(t)$ непрерывна и положительна на $(0, t_*)$, поэтому

$$\int\limits_0^{t_*} d^{2l+1}(t)\, dt > 0.$$

Вычислим интеграл

$$\int\limits_0^{t_*} d^{i_1}(t)\dot{d}^{i_2}(t) \ldots (d^{(n-2)}(t))^{i_{n-1}} dt \tag{22}$$

в предположении, что выполнено условие (21). Сделаем в этом интеграле замену переменной $\tau = t - t_*/2$. Тогда $t = \tau + t_*/2$, $\tau \in [-t_*/2, t_*/2]$, и функция $d(t)$ преобразуется к виду

$$d(t) = \left(\tau + \frac{t_*}{2}\right)^{n-1} \left(t_* - \tau - \frac{t_*}{2}\right)^{n-1} = \left(\tau + \frac{t_*}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{t_*}{2} - \tau\right)^{n-1} = \\ = \left(\frac{t_*^2}{4} - \tau^2\right)^{n-1}, \quad \tau \in [-t_*/2, t_*/2]. \tag{23}$$

Заметим, что функция

$$\tilde{d}(\tau) = \left(\frac{t_*^2}{4} - \tau^2\right)^{n-1}$$

четная. Следовательно, ее производные нечетных порядков нечетны, производные четных порядков четны.

$$\dot{d}\left(\tau + \frac{t_*}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\tilde{d}(\tau)\right) = \tilde{d}\,'(\tau)\,\frac{d\tau}{dt} = \tilde{d}\,'(\tau),$$

так как $d\tau/dt = 1$. Аналогично показывается, что

$$d^{\,(j)}\left(\tau + \frac{t_*}{2}\right) = \tilde{d}^{\,(j)}(\tau), \quad j = \overline{2, n-2}.$$

Таким образом, интеграл (22) преобразуется к виду

$$\int\limits_{-t_*/2}^{t_*/2} \tilde{d}^{i_1}(\tau)[\tilde{d}\,'(t)]^{i_2} \ldots [\tilde{d}^{(n-2)}(\tau)]^{i_{n-1}} d\tau. \tag{24}$$

Подынтегральная функция в интеграле (24) представляет собой произведение $i_1 + i_3 + i_5 + \ldots$ четных функций и $i_2 + i_4 + i_6 + \ldots$ нечетных. По условию $i_2 + i_4 + i_6 + \ldots = 2k + 1$. Следовательно, в этом произведении нечетных функций нечетное число, поэтому подынтегральная функция нечетна и интеграл от нее в симметричных пределах от $-t_*/2$ до $t_*/2$ равен нулю.

Таким образом, интеграл (22) равен нулю. Тогда коэффициент при c^{2l+1} в уравнении (17) равен

$$\int\limits_0^{t_*} d^{2l+1}(t)\, dt \neq 0.$$

Следовательно, при выполнении условий теоремы 2 уравнение (17) – алгебраическое уравнение нечетной степени. Такое уравнение всегда имеет действительное решение $c = c_*$.

Покажем теперь, что при выполнении условий теоремы уравнение (18) разрешимо относительно η при всех $t \in [0, t_*]$. Рассмотрим левую часть этого уравнения. При выполнении условий теоремы для всех $\eta \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{R(\eta)} \geqslant \frac{1}{M}.$$

Тогда если $\eta \geqslant \eta_0$, то

$$\int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{R(\eta)} \geqslant \frac{\eta - \eta_0}{M}$$

и, следовательно,

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{R(\eta)} = +\infty.$$

Аналогично при $\eta < \eta_0$:

$$\int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{R(\eta)} \leqslant \frac{\eta - \eta_0}{M},$$

поэтому

$$\lim_{\eta \to -\infty} \int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{R(\eta)} = -\infty.$$

Таким образом, интеграл в левой части уравнения (18), являясь непрерывной функцией η, имеет при $\eta \to \pm\infty$ бесконечные пределы разных знаков. Следовательно, область значений этого интеграла – все множество действительнх чисел. Это означает, что, каким бы ни было c_*, уравнение (18) имеет решение при всех $t \in [0, t_*]$. Это означает, что при $c = c_*$ существует решение граничной задачи (16). Следовательно, функция $B_*(t) = b(t) + c_*\, d(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, и терминальная задача имеет решение для любого начального и конечного состояния системы (15). В соответствии с определением системы, управляемой за данный интервал времени, заключаем, что система (15) с функцией $Q(z)$ вида (19) управляема в $\mathbb{R}^n$ за любой интервал $[0, t_*]$. ▶

4. Пример

Рассмотрим систему третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= z_2 \\ \dot z_2 &= f(z,\eta) + g(z,\eta)u, \\ \dot\eta &= (z_1^3 + z_2^3 - z_2^2)/\operatorname{ch}\eta, \end{aligned}$$

где $g(z,\eta) \neq 0$ в $\mathbb{R}^3$. Функция $Q(z) = z_1^3 + z_2^3 - z_2^2$ является многочленом третьей степени. Слагаемые старшей степени имеют вид $z_1^3 + z_2^3$. Переменная z_2 во все слагаемые, за исключением z_1^3, входит в нечетной степени. Следовательно, условие (21) выполнено. Функция $R(\eta) = 1/\operatorname{ch}\eta$ положительна и ограничена в $\mathbb{R}$:

$$\forall\eta \in \mathbb{R}: \quad 0 < R(\eta) \leqslant 1.$$

Согласно теореме 2, эта система управляема в $\mathbb{R}^3$ за любой интервал времени $[0, t_*]$.

5. Заключение

Задача исследования управляемости нелинейной динамической системы сформулирована как задача исследования существования решения соответствующих терминальных задач. Для аффинной системы, эквивалентной в $\mathbf{R}^n$ регулярной системе квазиканонического вида, получено достаточное условие управляемости.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ N 11-01-00733 и Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-4144.2010.1).

Список литературы

1. Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. — М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. — 520 с.

2. Крищенко А.П. Исследование управляемости и множеств достижимости нелинейных систем управления // Автоматика и телемеханика. — 1984. — N6. — С.30–36.

3. Жевнин А.А., Крищенко А.П. Управляемость нелинейных систем и синтез алгоритмов управления // Докл. АН СССР. — 1981. — Т.258. — N4. — С.805–809.

4. Фетисов Д.А. Исследование управляемости регулярных систем квазиканонического вида // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. – 2006. – N3. – С.12–30.

electronic scientific and technical periodical
SCIENCE and EDUCATION
El № FS77 - 30569. №0421100025. ISSN 1994-0408

Affine System Controllability Condition

77-30569/236936

10, October 2011

D A. Fetisov

Bauman Moscow State Technical University
mathmod@bmstu.ru

This note deals with a controllability condition for affine systems with scalar control on all space of states for any final interval of time. Research is based on system transformation to a quasicanonical form and the further analysis of terminal problem solution existence for the transformed system. It is shown that for system with the right part of a special form the terminal problem has the solution for any initial and final states of system and any interval of time. Thereby, it is proved that such system is controlled on all space of states for any final interval of time. A possible scope of the received results is the solution of technical systems control problems.

References

1. Krasnochshechenko V.I., Krishchenko A.P. Nelinejnye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza. - M.: Izdatel'stvo MGTU im. N.Je. Baumana, 2005. 520 s.
2. Krishchenko A.P. Issledovanie upravljaemosti i mnozhestv dostizhimosti nelinejnyh sistem upravlenija // Avtomatika i telemehanika. 1984. N 6. S.30-36.
3. Zhevnin A.A., Krishchenko A.P. Upravljaemost' nelinejnyh sistem i sintez algoritmov upravlenija // Dokl. AN SSSR. 1981. T.258. N 4. S.805-809.
4. Fetisov D.A. Issledovanie upravljaemosti reguljarnyh sistem kvazikanonicheskogo vida // Vestnik MGTU im. N.Je. Baumana. Estestvennye nauki. 2006. N 3. S.12-30.