

Исследование одномерной модели течения струи заряженного газа**77-30569/224791****# 08, август 2011****Кравченко О. В.**

УДК: 51-73

МГТУ им. Н.Э. Баумана
olekravchenko@gmail.com**1. Введение**

Большинство исследуемых в технике нелинейных динамических систем являются неконсервативными. В таких системах энергия может не только диссипировать из-за потерь, но и пополняться из-за неустойчивостей. Для таких систем принципиально новым явлением по сравнению с консервативными системами служит явление *автоколебаний*. То есть таких колебаний, поддерживаемых внешними возмущениями, вид и свойства которых определяются самой системой. Системы или среды в которых могут происходить автоколебательные процессы с точки зрения теории нелинейных волн описываются одним из *модельных* уравнений [1, 2]. Вид такого уравнения определяется характеристиками среды: дисперсией и нелинейностью. Подобное наблюдается в нелинейных консервативных средах, где для одномерных волн основным является нелинейное уравнение переноса

$$L(u) = \partial_t u + u \partial_x u = 0 \quad (1)$$

и уравнение Бюргерса для сред с линейной вязкостью

$$L(u) - \gamma \partial_{xx}^2 u = 0. \quad (2)$$

Если в среде присутствует только консервативная нелинейность, то низкочастотная неустойчивость при учёте вязкости также приводит к автоколебаниям [1], которые в одноволновом приближении описываются уравнением

$$L(u) - \gamma \partial_{xx}^2 u = \gamma u. \quad (3)$$

Уравнение (3) является одним из основных (эталонных) в теории неравновесных волн в нелинейных средах [2]. Такое уравнение (3) называют *модифицированным* уравнением

Бюргерса. Если в уравнении (3) присутствует нагрузка $f(t)$, зависящая от времени, то такое уравнение называют *модифицированным уравнением Бюргерса с нагрузкой*

$$L(u) - \gamma \partial_{xx}^2 u = \gamma u + f(t). \quad (4)$$

На настоящий момент не существует физической модели и теории возникновения молнии в атмосфере. В работе [3] предложена простая модель возникновения молнии, основанная на уравнениях гидродинамики заряженного газа. Нелинейной средой здесь является атмосфера в целом, а в частности – облака, имеющие заряд. От системы гидродинамических уравнений осуществляется переход к более простому уравнению вида (4), для которого при $\gamma = 0$ найдено волновое решение. Вместе с этим, остаётся открытым вопрос об аналитическом решении в общем случае. Кроме того, в силу нелинейности задачи, решающее значение приобретает вопрос о влиянии начальных условий на характер решения.

Работа состоит из трёх частей. В первой части, согласно [3], изложена гидродинамическая модель течения струи заряженного газа. Во второй части представлено решение для уравнения типа (4) в общем случае. В третьей части, для стационарного случая рассмотрено обыкновенное дифференциальное уравнение методом фазовой плоскости, с помощью которого установлены различные типы движений, реализуемые в модели.

2. Одномерная модель течения струи заряженного газа

Исследуемая модель состоит в следующем. Слабоионизированная газовая среда (облако в атмосфере) как единое целое движется под действием разности давлений со скоростью v_0 . Заряженные частицы (или ионизованный газ) движутся с незаряженными частицами как единое целое. Однако, на заряженные частицы помимо гидродинамических сил действует электростатическое поле атмосферы, а также поле самих зарядов. *Задача* состоит в том, чтобы найти пространственное распределение электростатического поля и плотности зарядов. Такая задача сводится к совместному решению уравнений движения для заряженной среды (жидкости или газа), непрерывности и Пуассона, которые можно записать в виде системы

$$\begin{cases} -enE - k_B T \partial_x n - mnv(v - v_0) = 0, \\ \partial_\tau n + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x J = 0, \quad (J = env) \\ \varepsilon_0 \partial_x E = 4\pi e(N_0 - n). \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $[e] = \text{Кл}$ – заряд частицы, $[m] = \text{кг}$ – масса частицы, $[v] = \text{м/с}$ – скорость частицы, n – концентрация частиц, N_0 – концентрация частиц противоположного знака, $[T] = \text{К}$ – температура

среды, $[k_B] = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, $[\varepsilon_0] = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – диэлектрическая проницаемость среды, $[\nu] = 1/\text{с}$ – эффективная частота соударения. Систему (5) можно преобразовать к нелинейному уравнению в частных производных введением безразмерных переменных. Согласно [3] для случая электрически нейтральной среды, когда N_0 и n одного порядка, система (5) переходит в уравнение относительно безразмерной напряжённости

$$\partial_\tau y = \partial_{\xi\xi}^2 y - (1 - \partial_\xi y)(y - y_0) + b(\tau),$$

заменяя на $u = y - y_0$, получим уравнение вида (4)

$$\partial_\tau u = \partial_{\xi\xi}^2 u + u \partial_\xi u - u + b(\tau). \quad (6)$$

Если среда не является электрически нейтральной (при $n \gg N_0$), то система (5) переходит в уравнение

$$\partial_\tau y = \partial_{\xi\xi}^2 y + (y - y_0) \partial_\xi y + b(\tau),$$

замена $u = y - y_0$ приводит к уравнению

$$\partial_\tau u = \partial_{\xi\xi}^2 u + u \partial_\xi u + b(\tau). \quad (7)$$

В [3] показано, что волновое решение уравнения (7) является разрывным

$$u(\theta) = \frac{2 \cdot \left(C_1 Ai \left(-\frac{c+b_0\theta}{(-b_0)^{2/3}} \right) + C_2 Bi \left(-\frac{c+b_0\theta}{(-b_0)^{2/3}} \right) \right)'}{C_1 Ai \left(-\frac{c+b_0\theta}{(-b_0)^{2/3}} \right) + C_2 Bi \left(-\frac{c+b_0\theta}{(-b_0)^{2/3}} \right)}, \quad \theta = \xi + \gamma\tau,$$

где C_1, C_2, c, b_0 – постоянные интегрирования, а Ai, Bi – функции Эйри. Разрывные решения имеют следующую интерпретацию: в точках разрыва напряжённость поля формально имеет сколь угодно большое значение. Образуется почти периодическая цепочка заряженных сгустков, между которыми расположены незаряженные области. Исследование условий образования подобных сгустков – *заряженных кластеров* представляет физический интерес, а результаты для случая статического поля изложены в [5-7]. Таким образом, возникает необходимость в отыскании аналитического решения уравнения (6), а также в выявлении роли начальных условий, которые определяют поведение решений нелинейного уравнения.

3. Аналитическое решение

Будем искать решение уравнения (6) в виде

$$u(\xi, \tau) = \psi_0(\tau) + \psi_1(\tau)\xi. \quad (8)$$

Для определения функций ψ_0, ψ_1 , подставим (8) в (6)

$$\psi'_0 + \psi'_1 \xi = (\psi_0 + \psi_1 \xi) \psi_1 - \psi_0 - \psi_1 \xi + b.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ξ , получим систему

$$\begin{cases} \psi'_1 = \psi_1^2 - \psi_1, \\ \psi'_0 = \psi_0 \psi_1 - \psi_0 + b. \end{cases} \quad (9)$$

Система (9) является интегрируемой. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что ей удовлетворяют функции

$$\psi_1 = \frac{e^{C_1 - \tau}}{e^{C_1 - \tau} - 1} \text{ и } \psi_0 = (be^\tau - be^{C_1 \tau} + C_2) \frac{e^{C_1 - \tau}}{1 - e^{C_1 - \tau}}.$$

Таким образом, решение уравнения (6) в виде разложения (8) имеет вид

$$u(\xi, \tau) = (be^\tau - be^{C_1 \tau} + C_2) \frac{e^{C_1 - \tau}}{1 - e^{C_1 - \tau}} - \frac{e^{C_1 - \tau}}{e^{C_1 - \tau} - 1} \xi. \quad (10)$$

Формально, решение (10) найдено, но такое решение является вырожденным в силу линейности по координате ξ . Это означает следующее. Будем решать задачу Коши для уравнения (6) на отрезке $[a, b]$. Граничными условиями примем однородные условия Неймана:

$$\partial_\xi u(\xi, \tau) \Big|_{\xi=a} = \partial_\xi u(\xi, \tau) \Big|_{\xi=b} = 0. \quad (10)$$

Продифференцировав решение (10) по координате, в силу структуры решения, получим функцию, зависящую только от времени и не зависящую от координаты ξ . Отсюда, решение (10) является нечувствительным к граничным условиям типа Неймана. По-видимому, можно предложить такое решение уравнения (10), в котором переменные ξ, τ входят нелинейным образом, однако, автору оно в настоящий момент не известно.

4. Фазовый портрет в стационарном случае

Для ответа на вопрос о роли начальных условий используем методы теории фазового пространства [8],[9]. В стационарном случае уравнение в частных производных (6) перейдёт в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u'' + uu' - u + b = 0 \quad (11)$$

Перенесём начало отсчёта в положение равновесия $u_{ст} = b$, то есть введём новую переменную $y = u - u_{ст}$. Такая замена преобразует уравнение (11) в уравнение вида

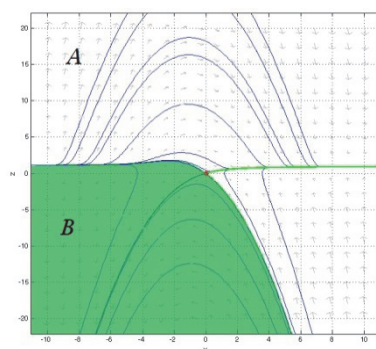
$$y'' + by' + y + yy' = 0.$$

Лин. уравнение Нелин. слагаемое

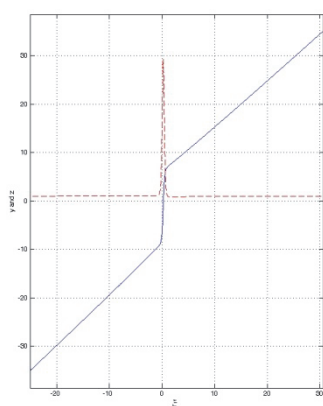
Здесь первые три слагаемых представляют собой линейную колебательную систему, к которой сводится описание системы (11) при достаточно малых вариациях, когда нелинейное слагаемое yy' становится величиной второго порядка малости и им можно пренебречь. Перепишем уравнение (12) в виде системы

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -yz \end{pmatrix}. \quad (12)$$

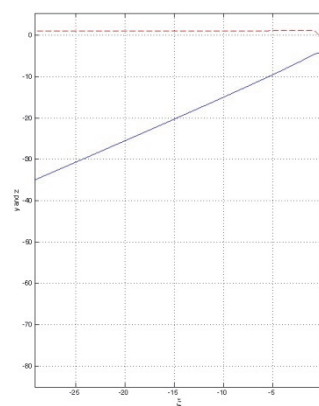
Система (13) имеет следующий фазовый портрет рис. 1 а). Координата ξ играет роль фазового времени, то есть параметра, изменяющего координаты некоторой точки на плоскости (y, z) . Область B является область с такими начальными условиями, для которых временные решения уходят на бесконечность за конечное время. Характерные временные решения для областей A и B представлены на рис. 1 б), в).



а) $b = 1$



б) характерное временное решение области A



в) характерное временное решение области B

Рис.1. а) фазовый портрет на плоскости (y, z) б), в) временные решения $y(\xi), z(\xi)$

5. Заключение

В настоящей работе аналитически исследовалась модель течения струи заряженного газа (в одномерном случае) [3] в виде нелинейного уравнения (6). Представлено аналитическое решение уравнения (6), которое, однако, является вырожденным. Роль начальных условий в стационарном случае удалось определить при помощи метода фазовой плоскости. В зависимости от выбора начальных условий в той или иной области, существенно меняется характер поведения модели. При определённом выборе начальных условий решения модели возрастают очень быстро при малом изменении значений аргумента. Такое поведение нелинейной системы согласуется с наличием в модели разрывных решений.

Автор выражает благодарность своему руководителю – академику РАН, д.ф.-м.н., зав. Каф. РЛЗ МГТУ им. Н.Э. Баумана Владиславу Ивановичу Пустовойту за постановку задачи, а также профессорам Владимиру Георгиевичу Сапогину и Михаилу Владимировичу Капранову за ценные замечания, сделанные автору при выполнении работы.

Список литературы

1. Рабинович М.И. Автоколебания распределённых систем // Известия вузов. 1974. Т.14, №4. С. 477-510.
2. Рабинович М.И., Фабрикант А.Л. Нелинейные волны в неравновесных средах // Известия вузов. 1976. Т.19, №5-6. С. 721-766.
3. Пустовойт В.И. О механизме возникновения молнии // Радиотехника и электроника. 2006. Т.51, №8. С.996-1002.
4. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики: Учеб. Для вузов. 2-е изд. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 368 с.
5. Сапогин В.Г. Механизмы удержания вещества самосогласованным полем. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. 254 с.
6. Сапогин В.Г. Неупругое взаимодействие электронного кластера с плоской поверхностью // Известия ТРТУ. 2001. №1. С. 165-168.
7. Сапогин В.Г. Бесстолкновительный кластер плоской динамической системы зарядов с V-образной потенциальной щелью // Вестник Южного научного центра РАН. 2005. Т. 1, №2. С.9-16.
8. Капранов М.В. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984. 320 с.
9. Краснощёченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 520 с.