

Воздействие на систему синхронизации гармонических помех и шума

03, март 2011

УДК: 621.396.662

авторы: Сидоркина Ю. А., Ковальчук А. А., Рязанова М. А.

МГТУ им. Н.Э.Баумана.

sidyulia5969@ya.ru

nastia_kov-k@rambler.ru

maria.a.ryazanova@boeing.com

Введение

Помехоустойчивость систем синхронизации до недавнего времени исследовалась лишь при шумовом воздействии [1-8]. При этом на основе теории марковских случайных процессов – уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) и уравнений Понтрягина найдены статистические характеристики фазовой автоподстройки частоты (ФАП) такие, как плотность распределения вероятности (ПРВ) сигнала рассогласования (фазовой ошибки), среднее значение частотного рассогласования, среднее значение частоты срывов синхронизации (перескоков фазы), а также вероятность срывов синхронизации. Следует отметить, что ПРВ сигнала ошибки была получена в общем случае наличия частотного рассогласования как в интегральном виде [1,2], так и в форме быстросходящегося ряда [3,4,8]. Статистическая динамика ФАП исследована при различных характеристиках фазового дискриминатора [4].

С развитием радиотехники, систем связи и космической радионавигации возникла необходимость исследовать системы синхронизации не только при шумовых воздействиях, но и при комбинированных воздействиях, состоящих из аддитивной смеси сигнала, гармонической помехи и шума.

Работы, посвящённые анализу статистических характеристик системы синхронизации при комбинированных воздействиях, исчисляются до настоящего времени единицами [9-13].

В указанных работах рассматриваются, как правило, воздействия на ФАП, наряду с шумом гармонической помехи, причём, статистические характеристики, как правило, находятся в наихудшем случае отсутствия частотной расстройки между сигналом и помехой [9-11], и сами статистические характеристики, получаемые различными авторами, не сравниваются между собой.

В настоящей работе на основе аппарата марковских случайных процессов (уравнения ФПК) путём использования различных приближений получены статистические характеристики фазовой автоподстройки частоты. В первую очередь это ПРВ сигнала рассогласования, частота срывов синхронизации, а также средняя разность между колебаниями управляемого генератора и сигнала при комбинированном воздействии на вход ФАП в виде аддитивной смеси сигнала, суммы нескольких гармонических помех и гауссовского шума.

1. Модель системы ФАП при воздействии на вход системы аддитивной смеси сигнала, гармонической помехи и шума

Допустим, что на вход ФАП поступает аддитивная смесь полезного сигнала (эталонного колебания) $u_{\text{э}}(t)$, гармонической помехи $u_n(t)$ и полосового (белого) гауссовского шума $u_0(t)$ (рис. 1):

$$u_{\text{вх}}(t) = u_{\text{э}}(t) + u_n(t) + u_0(t).$$

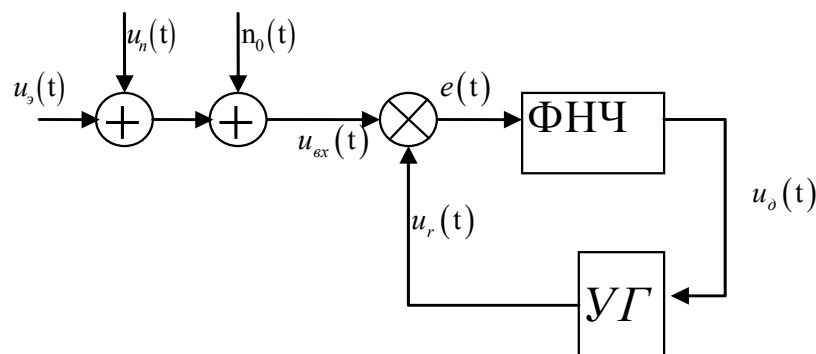


Рис. 1. Структурная схема ФАП

Эталонное колебание

$$u_э(t) = \sqrt{2}A \sin(\omega_э t + \Omega_0 t + \theta_0), \quad (1)$$

где A – среднеквадратическое значение напряжения полезного сигнала;
 $\omega_э$ — частота сигнала, совпадающая с начальной частотой управляемого генератора (УГ); Ω_0 и θ_0 — начальные расстройки по частоте и фазе между эталонным колебанием и сигналом на выходе УГ.

Гармоническую помеху примем в виде

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^N \sqrt{2}A_i \sin(\omega_э t + \Omega_i t + \theta_i), \quad (2)$$

где N – число спектральных составляющих, попадающих в полосу пропускания линейного тракта, предшествующего ФАП; A_i – среднеквадратическое значение напряжения i -ой спектральной составляющей; Ω_i и θ_i начальные расстройки по частоте и фазе i -ой составляющей относительно частоты и фазы на входе УГ.

Полосовой гауссовский шум имеет вид

$$n_0(t) = \sqrt{2}n_c(t) \cos \omega_э t + \sqrt{2}n_s(t) \sin \omega_э t, \quad (3)$$

где $n_c(t)$ и $n_s(t)$ – независимые квадратурные гауссовские случайные процессы. По предположению, двусторонняя спектральная плотность шума равна $N_0/2$ (Вт/Гц).

Фазовый детектор перемножает поступающие на его вход колебания. Напряжение на выходе фазового детектора имеет вид

$$u_{\partial} = k_{\partial} u_{ex}(t) u_z(t).$$

Здесь k_{∂} – коэффициент передачи фазового детектора;

$$u_z(t) = \sqrt{2}A_z \cos[\omega_э t + \varphi_0(t)], \quad \text{– напряжение на выходе УГ,} \quad (4)$$

где A_z – среднеквадратическое значение напряжения на выходе генератора; $\varphi_0(t)$ – медленно меняющаяся фаза колебания УГ в режиме подстройки.

Пренебрегая вторыми гармониками, которые формируются после перемножения колебаний $u_{ex}(t)$ и $u_z(t)$, получим низкочастотную составляющую колебания на выходе фазового детектора.

$$u_{\partial 1} = k_{\partial} A A_z Q,$$

где

$$Q = Q(t) = \sin[\Omega_0 t + \theta_0 - \varphi_0(t)] + \\ + \sum_{i=1}^N (A_i/A) \sin[\Omega_i t + \theta_i - \varphi_0(t)] + (n_c(t)/A) \cos \varphi_0(t) - \\ - (n_s(t)/A) \sin \varphi_0(t).$$

Фильтр низких частот (ФНЧ) описывается операторным коэффициентом передачи (передаточной функцией) $F(p)$, $p = d/dt$.

Сигнал на выходе фильтра описывается в символическом виде

$$u_\phi(t) = F(p)u_{\partial 1}(t) = k_\partial AA_z F(p)Q(t).$$

Управляемый генератор (УГ) преобразует управляющее воздействие $u_\phi(t)$ в изменение фазы генерируемых колебаний $\varphi_0(t)$, так что

$$p\varphi_0(t) = k_z u_\phi(t),$$

где $k_z[\text{рад/с*В}]$ – коэффициент передачи УГ (крутизна модуляционной характеристики УГ).

Таким образом,

$$p\varphi_0(\tilde{t}) = k_z k_\partial AA_z F(p)Q(t) = kAF(p)Q(t),$$

где $k = k_z k_\partial A_z$ – коэффициент усиления разомкнутой цепи регулирования.

Осуществим замену переменной

$$x(t) = \Omega_0 t + \theta_0 - \varphi_0(t).$$

Переменная $x(t)$ называется сигналом рассогласования или сигналом ошибки – это разность фаз эталонного колебания УГ на выходе управляемого генератора.

Обозначим низкочастотный шум, или шум, пересчитанный на выход фазового детектора, в виде

$$n_0(t) = [n_c(t)/A] \cos \varphi_0 t + [n_s(t)/A] \sin \varphi_0 t = 1/A n_u(t).$$

Низкочастотный шум $n_u(t)$ в пределах полосы пропускания ФАП является гауссовским шумом, который моделируется гауссовским белым шумом (ГБШ) с двусторонней спектральной плотностью $N_0/2$ (Вт/Гц).

В результате преобразований получим стохастическое дифференциальное уравнение (ДУ) в символической форме

$$\frac{1}{KA} px = \gamma - F(p) \left[\sin x + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sin(x + \Delta\Omega_i t + \Delta\theta_i) + \frac{1}{A} n_{uu}(t) \right], \quad (5)$$

где $\gamma = \Omega_0/KA$ — относительная расстройка по частоте эталонного колебания и сигнала с выхода УГ; $\varepsilon_i = A_i/A$; $\Delta\Omega_i = \Omega_i - \Omega_0$; $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_0$; $i = \overline{1, N}$.

Структурная схема ФАП, соответствующая ДУ (5), изображена на рис. 2.

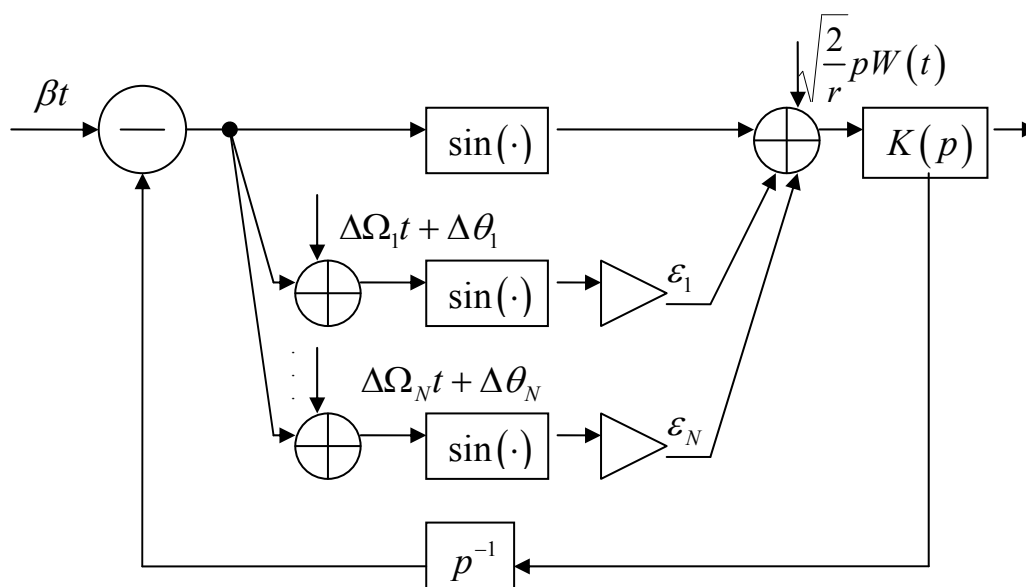


Рис. 2. Структурная схема ФАП

Если вместо параметра A ввести величину $S = A^2$, то стохастическое ДУ в новых обозначениях при наличии одной гармоники в помехе принимает вид

$$\frac{1}{K\sqrt{S}} \frac{d\varphi}{dt} = \gamma - F(p) \left[\sin \varphi + \sqrt{R} \sin(\varphi(t) + \Delta\Omega_i t + \Delta\theta_i) + \frac{1}{\sqrt{S}} N(t) \right], \quad (6)$$

где $\varphi(t) = x(t)$; $N(t) = n_{uu}(t)$; $R = J/S$; $J = A^2$; R — отношение помеха/сигнал (ОПС).

2. Стохастическая модель системы

Рассмотрим воздействие одной гармоники совместно с шумом, когда частота помехи находится за полосой синхронизации.

Запишем ДУ (6) в виде

$$x(t) = \gamma(t - t_0) - \int_{t_0}^t y(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau, \quad (7)$$

где t_0 — момент начала наблюдений;

$$y(t) = F(p)[\sin x(t) + \sqrt{R} \sin[x(t) + \Delta\Omega t + \Delta\theta]];$$

$$v(t) = F(p) \left[\frac{1}{\sqrt{S}} N(t) \right].$$

Если $v(t)=0$, то ДУ (7) соответствует детерминированному случаю, когда решение ДУ (7) можно исследовать методом гармонического баланса [12], положив

$$x(t) = x_0 + x_1 \cos(\Delta\Omega t + \Delta\theta + \psi), \quad (8)$$

где x_0 и x_1 – некоторые константы, причем амплитуда x_1 в первом приближении не зависит от x_0 и имеет вид [12]

$$x_1 = \frac{\sqrt{R}}{d} M(\omega) \Big|_{\omega=d}, \quad (9)$$

где $M(\omega) = |F(p)|_{p=j\omega}$, $d = \Delta\Omega/KA$.

Случайное воздействие $v(t)$ в (7) формируется из ГБШ посредством низкочастотного фильтра и вследствие этого является низкочастотным. На интервале корреляции случайного процесса $v(t)$ при $\Delta\Omega \neq 1$ укладывается значительное число периодов гармонической составляющей фазового рассогласования, поэтому можно считать, что наличие воздействия $v(t)$ приводит лишь к медленному изменению фазовой ошибки, а параметры гармонической составляющей практически не изменяются.

Таким образом, при $v(t) \neq 0$ можно принять решение [8] в виде

$$x(t) = z(t) + x_1 \cos(\Delta\Omega t + \Delta\theta + \psi), \quad (10)$$

где x_1 и ψ — константы, рассчитываемые по (9), а также по формуле

$$\psi = z + P(\omega), \quad P(\omega) = \arg F(\omega). \quad (11)$$

Функция $z(t)$ изменяется медленно по сравнению с $\cos(\Delta\Omega t + \Delta\theta + \psi)$.

Рассмотрим один период гармонической составляющей фазового рассогласования $x(t)$, когда можно приближенно положить $z(t)=const$. Тогда воздействие $y(t)$ оказывается периодическим с периодом $T = 2\pi/\Delta\Omega$ и его можно разложить в ряд Фурье на интервале $[t, t+T]$

$$y(t) = F(p) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Delta\Omega t) + b_n \sin(n\Delta\Omega t) \right].$$

На изменение низкочастотной составляющей фазовой ошибки $z(t)$ влияет главным образом слагаемое вида $\frac{F(p)a_0}{2}$, поэтому на основе (10) можно записать

$$z(t) \approx \gamma(t - t_0) - \int_{t_0}^t \tilde{y}(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau, \quad (12)$$

причем после усреднения находим

$$y(t) = \frac{F(p)a_0}{2} = F(p) \left\{ J_0(x_1) \sin z(t) + J_1(x_1) \sqrt{R} \cos[z(t) - \psi] \right\},$$

где $J_0(x_1)$ и $J_1(x_1)$ — функции Бесселя порядков 0 и 1 соответственно.

Уравнение (1.12) эквивалентно стохастическому ДУ

$$\frac{1}{K\sqrt{S}} \frac{dz}{dt} = \gamma - F(p) \left\{ [J_0(x_1) \sin z(t) + \sqrt{R} J_1(x_1) \sin \psi] \sin z + [\sqrt{R} J_1(x_1) \cos \psi] \cos z + \frac{1}{\sqrt{S}} N(t) \right\}. \quad (13)$$

Данное уравнение описывает изменение во времени усредненной во времени фазовой ошибки (или детерминированной составляющей фазовой ошибки) при одновременном воздействии на систему синхронизации широкополосного шума и узкополосной помехи, частота которой лежит за пределами полосы синхронизации.

Для расчета параметров гармонической составляющей фазовой ошибки (8) используются соотношения (9) и (11). С учётом (11) стохастическое ДУ (13) принимает вид

$$\frac{dz}{d\tau} = \gamma - K(p) \left\{ J_0(x_1) \sin z(t) + \sqrt{R} J_1(x_1) \cos P(\omega) + \sqrt{\frac{2}{r}} p w(\tau) \right\}, \quad (14)$$

где $\tau = tK\sqrt{S}$; $w(\tau)$ — стандартный винеровский случайный процесс;

$r = \frac{S}{N_0 B_L}$ — ОСШ на выходе линеаризованной ФАП первого порядка;

$B_L = \frac{K\sqrt{S}}{4}$ — шумовая полоса такой ФАП; $K(p) = F(\Omega p)$.

На рис. 3 изображены зависимости от времени решения $x(t)$ и $z(t)$ в системе первого порядка $t \equiv \tau$, $K=S=1$; $R=1$, $d=4$; $\gamma=0,5$; ОСШ $r=30$ дБ.

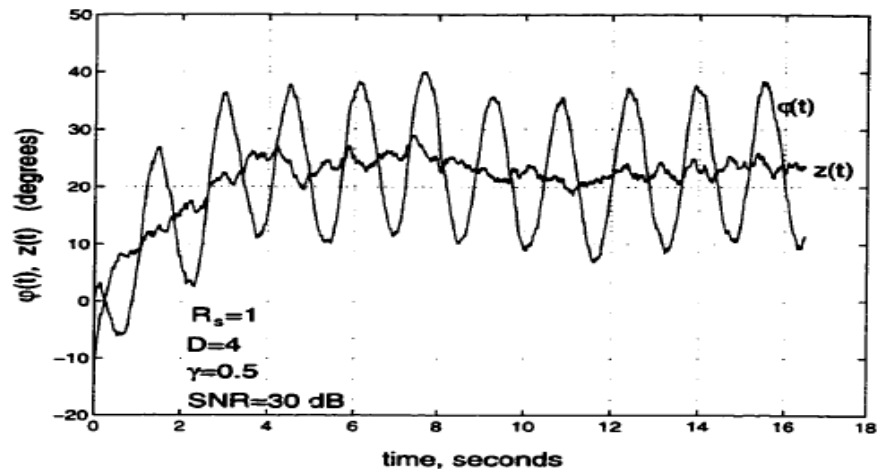


Рис. 3. Траектория фазовой ошибки для первого порядка ФАП

Стохастическое ДУ (13) и (14) имеют независимые от времени коэффициенты и поэтому к ним применима теория марковских случайных процессов и возможен переход от ДУ (13), (14) к уравнению ФПК.

3. Анализ стохастической системы ФАП первого порядка

Стохастическое ДУ в данном случае находится по (14) при $P(\omega) = 0$; $K(p) = 1$.

Тогда по (14) получим

$$\frac{dz}{d\tau} = \left[\gamma - J_0(x_1) \sin z + \sqrt{R} J_1(x_1) \right] + \sqrt{\frac{2}{r}} w(\tau).$$

Этому ДУ соответствует уравнение ФПК

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ W(x, \tau) \left[J_0(x_1) \sin z + \sqrt{R} J_1(x_1) - \gamma \right] \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (15)$$

где $x \equiv z$.

Предположим, что имеет место стационарный режим работы ФАП, тогда

$W(x, \tau) = W(x)$; $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$ и по (15) приходим к ДУ

$$\frac{\partial W}{\partial x} + rh_1(x)W(x) = G_0, \quad (16)$$

где $h_1(x) = J_0(x_1)\sin x - \bar{\gamma}$; $\bar{\gamma} = \gamma - \sqrt{R}J_1(x_1)$.

Решением ДУ (16) является [4, формула (1.38)]

$$W(x) = Ae^{\nu x - \rho G(x)} \int_x^{x+2\pi} e^{-\nu u + \rho G(u)} du, \quad (17)$$

где $A^{-1} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\nu x - \rho G(x)} \left[\int_x^{x+2\pi} e^{\nu u + \rho G(u)} du \right] dx$, $\nu = \bar{\gamma}r$; $\rho = rJ_0(x_1)$; $G(x) = 1 - \cos x$.

Отсюда находим

$$A = A(\bar{\nu}, \rho) = \frac{C(\bar{\nu}, \rho)}{(1 - e^{-2\pi\nu})};$$

$$C(\bar{\nu}, \rho) = \frac{sh\pi\nu}{2\pi^2 |I_{i\bar{\nu}}(\rho)|^2},$$

причём

$$|I_{i\bar{\nu}}(\rho)|^2 = \frac{sh\pi\bar{\nu}}{\pi\bar{\nu}} \left[I_0^2(\rho) + 2\bar{\nu}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n I_n(\rho)}{n^2 + \nu^2} \right] = \frac{sh\pi\bar{\nu}}{\pi\bar{\nu}} R_{\Sigma}.$$

При $\gamma = R = 0$ по (16) следует формула Тихонова [1]. При $R=0$ и $\gamma \neq 0$ получаем видоизмененные стандартные формулы для расчёта ФАП с синусоидальной нелинейностью без учёта гармонической помехи [4]. Наконец, при $R \neq 0$ и $\gamma \neq 0$ можно установить формальную аналогию между (17) и соотношениями для расчёта обычной ФАП с синусоидальной нелинейностью, если ввести приведённую расстройку по частоте $\bar{\gamma} = \gamma - \sqrt{R}J_1(x_1)$ и приведённое ОСШ $\rho = rJ_0(x_1)$.

Справедливо разложение ПРВ $W(x)$ в ряд Фурье [12].

$$W(x) = \frac{e^{\rho \cos x}}{2\pi R_{\Sigma}} \left[\nu^{-1} I_0(\rho) + 2\nu^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \nu^2} (\nu \cos nx - n \sin nx) I_n(\rho) \right].$$

На рис. 4 и рис. 5 изображены ПРВ $W(x)$ при различных значениях r и $\varepsilon = \sqrt{R}$. На рис. 4 $\varepsilon = 0,8$ и $r = 1,4$; 16 $\beta = d = 0$; на рис. 5 $r = 8$; $d = -1,5$; $\varepsilon = 0,6$; $\beta = \text{var}$.

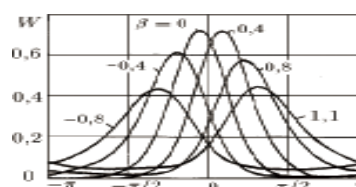
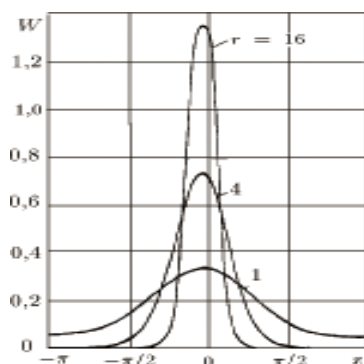


Рис. 4. ПРВ $W(x)$ при $\varepsilon = 0,8$ и $r = 1,4$ Рис. 5. ПРВ $W(x)$ при $r = 8$; $d = -1,5$; $\varepsilon = 0,6$

Среднее время до срыва слежения находится решением уравнения Понтрягина

$$\frac{\partial^2 \gamma_c(x)}{\partial x^2} - r h_1(x) \frac{\partial \gamma_c(x)}{\partial x} + r = 0, \quad (18)$$

где $\gamma_c(x) = K\sqrt{ST_c}$ – нормированное значение среднего времени T_c до срыва синхронизации.

После преобразования решения этого уравнения получим среднее время до срыва слежения в виде

$$\gamma_c = \frac{2\pi th\pi\bar{\nu}}{\bar{\gamma}} R_\Sigma(\rho, \bar{\nu}, \varepsilon). \quad (19)$$

На рис. 6, 7 даны графики зависимостей $\gamma_c = \gamma_c(r)$ при $\gamma = 0,4$ и различных значениях $\varepsilon = \sqrt{R}$ (на рис. 6 при $d = 1,5$; на рис. 7 при $d = -1,5$).

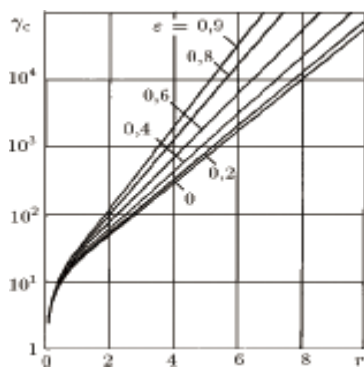


Рис. 6 Зависимость среднего времени до срыва слежения от ОСШ при $d=1,5$

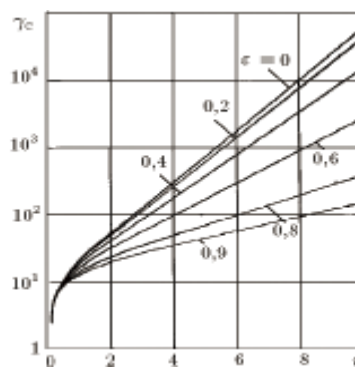


Рис.7 Зависимость среднего времени до срыва слежения от ОСШ при $d=-1,5$

По рис. 6, 7 заметны различия в свойствах системы при $d>0$ и $d<0$, а именно: при $d>0$ увеличение ε приводит к росту (при любых r) среднего времени до срыва слежения; при $d<0$ имеется обратная тенденция.

Это явление подтверждается результатами анализа детерминированной системы [12].

Наличие мощной помехи за пределами полосы синхронизации улучшает слежение, если сигнал и помеха имеют одинаковые по знаку отстройки от частоты собственных колебаний управляемого генератора и ухудшает слежение, если знаки расстроек противоположные.

На рис. 8, 9 иллюстрированы зависимости $\gamma_c = \gamma_c(r)$ при различных значениях γ , если имеет место положительная ($d=1,5$, рис. 8) и отрицательная ($d=-1,5$, рис. 9) отстройка помехи от частоты собственных колебаний управляемого генератора.

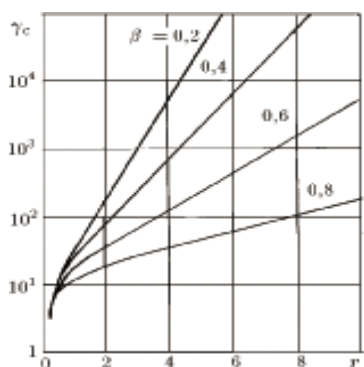


Рис. 8 Зависимость среднего времени до срыва слежения от ОСШ при $\beta=0,4$

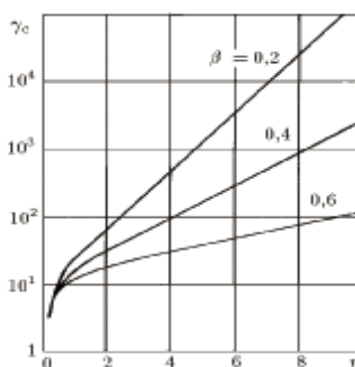


Рис. 9 Зависимость среднего времени до срыва слежения от ОСШ при $\varepsilon = 0,6$

Наконец найдем среднее значение частотного рассогласования. Можно показать, что справедливо соотношение [12]

$$\beta_c = \left(\frac{2\pi}{\gamma_c} \right) th \pi \bar{v}, \quad (20)$$

где $\beta_c = \omega_c / \Omega$, ω_c — среднее значение частотного рассогласования между частотой сигнала и частотой управляемого генератора.

На рис. 10-13 даны графики зависимостей $\beta_c = \beta_c(r)$ при $\varepsilon = \text{var}$ и соответственно при $d=1,5$ и $d=-1,5$.

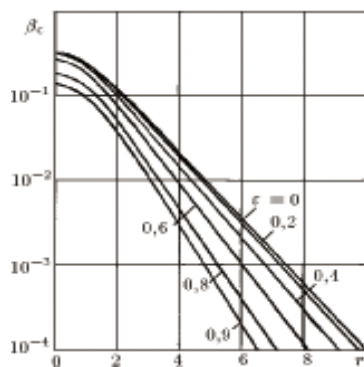


Рис. 10. Зависимость среднего значения частотного рассогласования $\beta_c(r)$ при $\beta_c = 0,8$

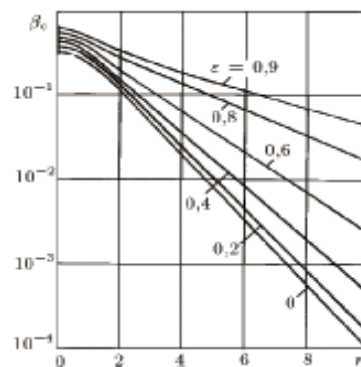


Рис. 11. Зависимость $\beta_c(r)$ при $\beta_c = 0,6$

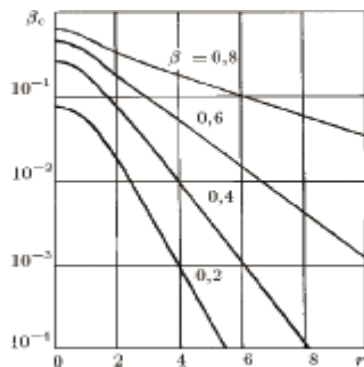


Рис. 12. Зависимость $\beta_c(r)$ при $\varepsilon = 0,8$

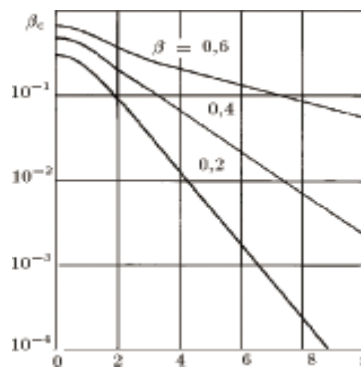


Рис. 13. Зависимость $\beta_c(r)$ при $\varepsilon = 0,6$

4. Стохастические характеристики ФАП при воздействии прицельной помехи

В этом случае расстройка $\Delta\Omega = 0$ ($d = 0$) и уравнение ФПК для ФАП первого порядка имеет вид [12]

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ W(x, \tau) \left[h(x) + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sin(x + \tau d_i + \Delta \theta_i) \right] \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (1.21)$$

где $h(x) = \sin x - \gamma$.

Пусть $N=1$; $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $d_i = 0$; $\Delta \theta_i = \Delta \theta$ и имеет место стационарный режим работы ФАП. Тогда $W(x, \tau) = W(x)$, $\frac{\partial W}{\partial \tau} = 0$ и ДУ ФПК принимает вид

$$\frac{d^2 W}{dx^2} + r \frac{dW}{dx} [q_1(x) W(x)] = 0, \quad (22)$$

где $q_1(x) = h(x) + \varepsilon \sin(x + \Delta \theta)$.

Введем обозначение

$$P_0 = r q_1(x) W(x) + dW(x)/dx \quad (23)$$

Решение уравнения (22) записывается в виде [4]

$$W(x) = e^{-b(x)} \left[C_1 + \int_0^x P_0 e^{b(u)} du \right], \quad (24)$$

где $b(z) = r \int_0^z q_1(x) dx = r \left[H(z) + \varepsilon \int_0^z \sin(v + \Delta \theta) dv \right]$; $H(z) = \int_0^z h(u) du = G(z) - \beta z$;

$G(z) = 1 - \cos z$; $C_1 = const$; $P_0 = const$, $b(z) = -vz + r G_0(z)$; $v = \gamma r$,

$G_0(z) = G(z) + \varepsilon \int_0^z \sin(v + \Delta \theta) dv$, причем условие $P_0 = const$ означает

стационарность потока вероятности P_0 .

Функция $W(x)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{-\pi}^{\pi} W(x) dx = 1; \quad W(-\pi) = W(\pi). \quad (25)$$

Тогда [4,14]

$$W(x) = A_0 e^{vx - rG(x)} \int_x^{x+2\pi} e^{-vu + rG(u)} du, \quad (26)$$

где $A_0 = A_0(v, r, \varepsilon, \Delta \theta)$;

$$A_0^{-1} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\nu x - rG(x)} dx \int_x^{x+2\pi} e^{\nu x + rG(x)} du = 4\pi^2 e^{-\pi\nu} |I_{iv}(rq_\varepsilon)|^2,$$

где $q_\varepsilon = \sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \Delta\theta}$.

Для практических вычислений можно использовать три альтернативных подхода: во-первых, таблицы; во-вторых, интегральное представление через модифицированную функцию Бесселя нулевого порядка [14]

$$A_0^{-1} = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\nu z} I_0(2rq_\varepsilon \cos \frac{z}{2}) dz;$$

в-третьих, разложение в ряд [3,4]

$$A_0^{-1} = \frac{4\pi e^{-\pi\nu} sh\pi\nu}{\nu} R_\Sigma^1, \quad (27)$$

где

$$R_\Sigma^1 = \left[I_0^2(rq_\varepsilon) + 2\nu^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \nu^2} I_n^2(rq_\varepsilon) \right].$$

В частном случае при $\beta = 0$ (т.е. при отсутствии расстройки по частоте между эталонным колебанием и сигналом на выходе генератора) справедливо равенство $\Pi_\theta = 0$, поэтому

$$W(x) = C_{00} e^{r \cos x + r\varepsilon \cos(x + \Delta\theta)}, \quad (28)$$

где $C_{00}^{-1} = 2\pi I_0(rq_\varepsilon)$.

Отсюда при $\varepsilon = 0$ (т.е. при отсутствии помехи) получаем формулу Тихонова

$$W(x) = [2\pi I_0(r)]^{-1} e^{r \cos x}.$$

На рис. 14-17 приведены графики ПРВ $W(x)$ при $\gamma = 0$ и разных значения параметров r и ε : на рис. 14 $r=12$, на рис. 15 $r=16$, на рис. 16 $\varepsilon = 0,8$, на рис. 17 $r=16$, $\gamma = 0,4$.

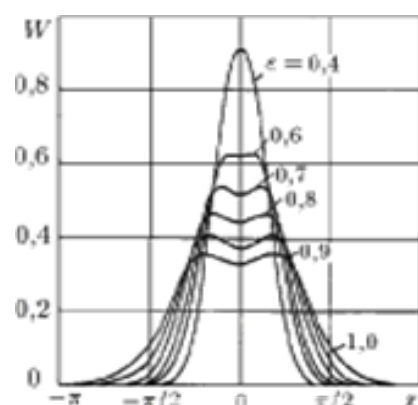


Рис.14

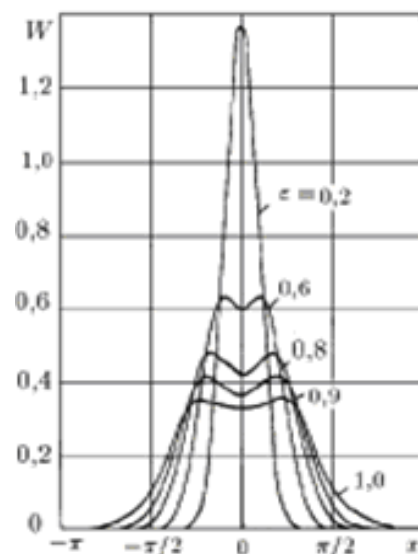


Рис.15

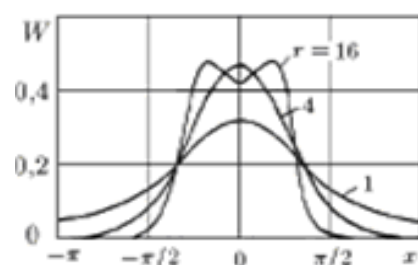


Рис.16

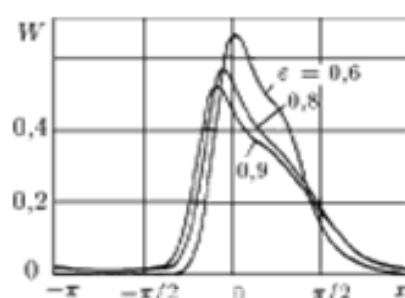


Рис.17

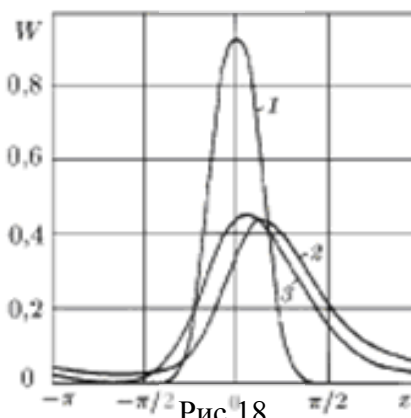


Рис.18

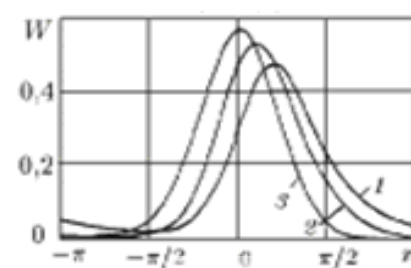


Рис.19

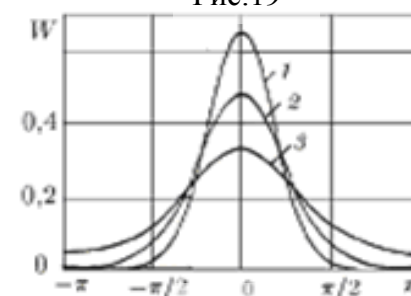


Рис.20

Плотность распределения вероятности $W(x)$ была усреднена по $\Delta\theta$ в предположении, что $\Delta\theta$ распределено равномерно в интервале $[-\pi, \pi]$. Поскольку точное значение $\Delta\theta$ на практике, как правило, неизвестно, усреднение оправдано.

По рис. 14-16 замечаем бимодальность ПРВ $W(x)$ при ε , близких к единице [9].

На рис. 18-20 приводятся графики ПРВ $W(x)$ при следующих параметрах:
на рис. 18: $1 - \varepsilon = 0,4$; $\gamma = 0$; $r = 16$; $2 - \varepsilon = 0,8$; $\gamma = 0,8$; $r = 4$; $3 - \varepsilon = 0,8$;
 $\gamma = 0,4$; $r = 4$;

на рис. 19: $\varepsilon = 0,6$; $r = 4$; $1 - \gamma = 0,8$; $2 - \gamma = 0,4$; $3 - \gamma = 0$;

на рис. 20: $\varepsilon = 0,4$; $\gamma = 0$; $1 - r = 4$; $2 - r = 2$; $3 - r = 1$.

Ранее предполагалось, что в полосе пропускания ФАС присутствует только одна спектральная составляющая ($N = 1$). Это ограничение на самом деле не является существенным.

Пусть $N > 1$, но частота всех спектральных составляющих помехи практически одинакова и совпадает с частотой входного сигнала: $\Delta\Omega_i = 0$; $i = \overline{1, N}$. Тогда уравнение ФПК принимает вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ W(x, t) \left[h(x) + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sin(x + \Delta\theta_i) \right] \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (29)$$

Используя свойства тригонометрических функций, получаем

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sin(x + \Delta\theta_i) = \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i \cos \Delta\theta_i \right) \sin x + \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sin \Delta\theta_i \right) \cos x = \bar{\varepsilon} \sin(x + \Delta\bar{\theta}),$$

где
$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i \cos \Delta\theta_i \right)^2 \sin^2 x + \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sin \Delta\theta_i \right)^2 \cos^2 x}; \quad \operatorname{tg} \Delta\bar{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sin \Delta\theta_i}{\sum_{i=1}^N \varepsilon_i \cos \Delta\theta_i}.$$

Таким образом, заменяя ε на $\bar{\varepsilon}$ и $\Delta\theta$ на $\Delta\bar{\theta}$, можно распространить полученные результаты на случай $N > 1$.

Предположим, что ФАП безинерционна, т.е. $K(p)=1$; ($F(p) = 1$); число спектральных составляющих помехи $N=1$; расстройка по частоте между гармонической помехой и эталонным колебанием отсутствует: $\Delta\Omega_1 = 0$. Обозначим фазовую расстройку $\Delta\theta_1 = \Delta\theta$ и относительную интенсивность помехи $\varepsilon_1 = \varepsilon$.

Уравнение Понтрягина запишем в виде [4]

$$\frac{d^2 \gamma_1(x)}{dx^2} - r q_1(x) \frac{d\gamma_1(x)}{dx} + r = 0,$$

где $q_1(x) = h(x) + \varepsilon \sin(x + \Delta\theta)$; $x \in [-s, s]$; $\gamma_1(x)$ — нормированное среднее время; x имеет другой физический смысл, чем в уравнение ФПК: в данном

случае это начальное значение фазовой ошибки в некоторый фиксированный момент времени t_0 .

Общее решение уравнения Понтрягина имеет вид

$$\gamma_1(x) = C_1 \int_0^x f_1(u) du + \int_0^x F_1(u) du + C_2,$$

где $f_1(u) = e^{\delta(u)}$; $F_1(u) = -rf_1(u) \int_0^x e^{-\delta(v)} dv$; $\delta(x) = -vx + rG_0(x)$; $C_1 = const$; $C_2 = const$.

Функция $\gamma_1(x)$ должна удовлетворять граничным условиям

$$\gamma_1(s) = \gamma_1(-s) = 0,$$

следовательно

$$(\alpha_1 r)^{-1} \gamma_1(x) = \int_{-s}^x f_1(u) du \int_{-s}^s F_1(u) du - \int_{-s}^x F_1(u) du \int_{-s}^s f_1(u) du,$$

где $\alpha_1^{-1} = \int_{-s}^s f_1(u) du$.

После преобразований, аналогичных [4, гл.1], при $s = 2\pi$ находим

$$\gamma_c = 2\pi^2 |I_{iv}(rq_\varepsilon)|^2 / ch\pi v.$$

Используя [4, формула (3.1)], получаем

$$\gamma_c = \frac{2\pi}{\gamma} \left[I_0^2(rq_\varepsilon) + 2v^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n I_n^2(rq_\varepsilon)}{n^2 + v^2} \right] th\pi v = \frac{2\pi}{\gamma} R_\Sigma^1 th\pi v.$$

Отсюда, при $\varepsilon = 0$ получаем известный результат [4, формула (3.2)]

$$\gamma_c = 2\pi^2 |I_{iv}(r)|^2 / ch\pi v.$$

На рис. 21-23 даны графики зависимостей $\gamma_1 = \gamma_1(r)$ при различных значениях параметров γ и ε . На рис. 21 $\gamma = 0$; на рис. 22 $\gamma = 0,4$; на рис. 23 $\varepsilon = 0,6$. Зависимости усреднены в предположении, что $\Delta\theta$ распределено равномерно в интервале $[-\pi, \pi]$.

Пусть, как и ранее, $K(p)=1$; $N=1$; $\Delta\Omega_1 = 0$; $\Delta\theta_1 = \Delta\theta$; и $\varepsilon_1 = \varepsilon$. Вычислим среднее значение разности частот двух сигналов: эталонного, поступающего на вход ФАС в смеси с помехой, и опорного, вырабатываемого управляемым генератором в установившемся режиме.

С учётом приведённых условий после усреднения правой и левой частей ДУ (5) получаем

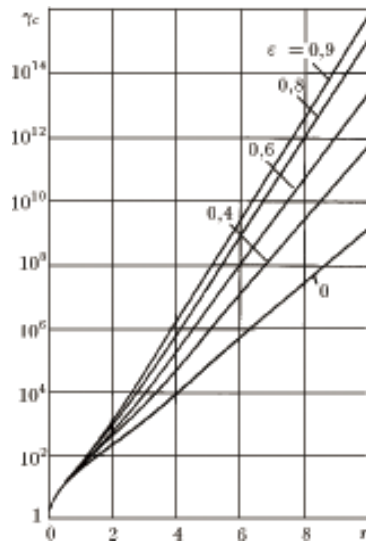


Рис. 21. Зависимость $\gamma_1 = \gamma_1(r)$ при $\gamma=0$

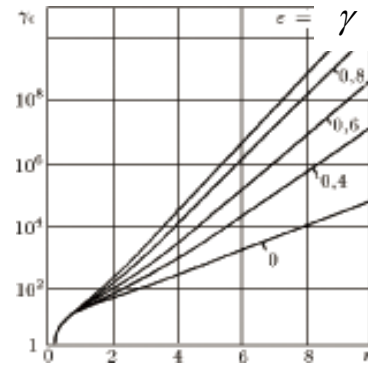


Рис. 22. Зависимость $\gamma_1 = \gamma_1(r)$ при $\gamma=0,4$

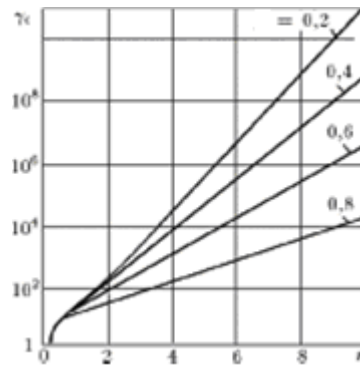


Рис. 23. Зависимость $\gamma_1 = \gamma_1(r)$ при $\varepsilon=0,6$

$$\beta_c = \gamma - \int_{-\pi}^{\pi} [\sin x + \varepsilon \sin(x + \Delta\theta)] W(x) dx,$$

где β_c — среднее значение производной фазового рассогласования в системе.

Интегрируя (23) в пределах $[-\pi, \pi]$, найдём

$$2\pi\Pi_0 = r \int_{-\pi}^{\pi} [\sin x + \varepsilon \sin(x + \Delta\theta)] W(x) dx - v,$$

так как в силу гармонических условий, накладываемых на $W(x)$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dW}{dx} dx = W(\pi) - W(-\pi) = 0.$$

Таким образом,

$$\beta_c = 2\pi\Pi_0/r.$$

Но, с другой стороны, по (26)

$$W(x) = A_0 e^{\nu x - rG(x)} \int_x^{x+2\pi} e^{-\nu u + rG(u)} du.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{dW(x)}{dx} &= A_0 \left\{ e^{\nu x - rG(x)} [\nu - rG'_0(x)] \int_x^{x+2\pi} e^{\nu u + rG(u)} du + e^{-2\pi\nu} - 1 \right\} = \\ &= -rq_1(x)W(x) + (e^{-2\pi\nu} - 1)A_0. \end{aligned}$$

Сравнивая это выражение для $\frac{dW(x)}{dx}$ с уравнением ФПК, получаем

$$\Pi_0 = (e^{-2\pi\nu} - 1)A_0.$$

Тогда

$$\beta_c = \frac{2\pi}{r} (e^{-2\pi\nu} - 1)A_0. \quad (30)$$

Используя (27), получим окончательный результат:

$$\beta_c = \frac{1}{\pi r} sh\pi\nu |I_{iv}(rq_\varepsilon)|^{-2} = \frac{\gamma}{R_\Sigma^1}. \quad (31)$$

При $\varepsilon=0$, (т.е. при отсутствии помехи) средняя разность частот эталонного и опорного сигналов в ФАС с синусоидальной нелинейностью имеет вид [4, формула 4.3]

$$\beta_c = \frac{1}{\pi r} sh\pi\nu |I_{iv}(r)|^{-2} = \frac{\gamma}{R_\Sigma}. \quad (32)$$

Сравнивая (29) и (31) замечаем, что выполняется равенство

$$\gamma_c = (2\pi/\beta_c)th\pi\nu. \quad (33)$$

На рис. 24-25 даны графики зависимостей $\beta_c = \beta_c(r)$ при различных значениях параметров ε и γ : на рис. 24 $\gamma=0,8$; на рис. 25 $\varepsilon=0,6$.

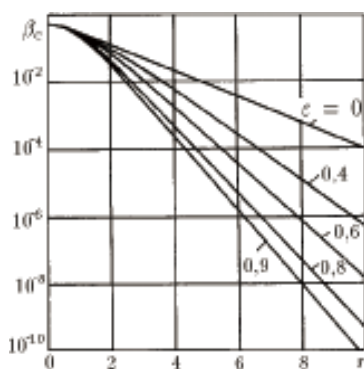


Рис. 24 Зависимость $\beta_c = \beta_c(r)$ при $\gamma=0,8$

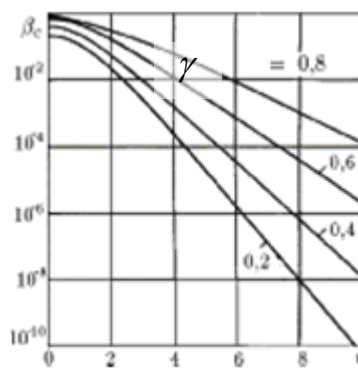


Рис. 25 Зависимость $\beta_c = \beta_c(r)$ при $\varepsilon=0,6$

Следует иметь ввиду, что величина β_c при построении графиков была усреднена по $\Delta\theta$ в предположении равномерного распределения этого параметра, поэтому формула (33), связывающая β_c с γ_c при фиксированном $\Delta\theta$ для графических зависимостей $\beta_c = \beta_c(r)$ и $\gamma_c = \gamma_c(r)$ не выполняется [9].

5. Плотность распределения вероятностей сигнала рассогласования при наличии прицельной (коканальной) помехи (альтернативный подход) [10, 15]

Если принять воздействующий на ФАП сигнал в виде $s(t) = A\sin(\omega_1 t + \theta_1)t$, а помеху в общем случае в виде $u_n(t) = \alpha A\sin[(\omega_1 + \Delta\Omega)t + \theta(t) + \theta_1]$, где α — это ОПС, $\Delta\Omega$ — разность частот сигнала и помехи, $\theta(t)$ — разность фаз сигнала и помехи. Тогда по (5) придем к следующему стохастическому ДУ [10]

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Omega_0 - KF(p) \left[A\sin\Phi + \alpha A\sin[\Delta\Omega t + \Phi + \theta(t)] + n(t) \right], \quad (34)$$

где $n(t)$ — ГБШ, имеющий двустороннюю спектральную плотность $N_0/2$ (Вт/Гц).

В случае прицельной помехи $\Delta\Omega=0$, а также полагая $\Omega = 0$ получим стохастическое ДУ ФАП первого порядка

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = -K \left\{ A\sin\Phi + \alpha A\sin[\Phi + \theta(t)] + n(t) \right\}. \quad (35)$$

Это ДУ можно привести к виду [10]

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = -a(t)K \sin[\Phi + \psi(t)] - Kn(t), \quad (36)$$

где

$$a(t) = A \left\{ [1 + \alpha \cos \theta(t)]^2 + [\alpha \sin \theta(t)]^2 \right\}^{1/2}, \quad (37)$$

$$\psi(t) = \arctg \left\{ \frac{\alpha \sin \theta(t)}{1 + \alpha \cos \theta(t)} \right\}. \quad (38)$$

Следует отметить, что изменение во времени сигнала рассогласования $\Phi(t)$ в режиме слежения определяется двумя возмущающими факторами: $n(t)$ и $\theta(t)$, причем $\theta(t)$ является медленно меняющейся функцией по сравнению с широкополосным гауссовским шумом $n(t)$. Вследствие этого новые переменные $a(t)$ и $\psi(t)$ также будут медленно изменяться по сравнению с $n(t)$ и в результате можно пренебречь производной $d\psi / dt$ по сравнению с $d\Phi / dt$.

Для того, чтобы получить ПРВ $W(\Phi)$ по (36) необходимо заменить $a(t)$ и $\psi(t)$ на их мгновенные значения, так как $a(t)$ и $\psi(t)$ изменяются значительно медленнее по сравнению с $\Phi(t)$.

Используя стандартный переход от (36) к уравнению ФПК и решая это уравнение, получим условную ПРВ $W(\Phi|\alpha, \psi) \cdot W(\alpha, \psi)$, а после интегрирования по всем значениям a и ψ получим совместную ПРВ $W(\Phi|\alpha, \psi)$, в результате получим искомую ПРВ $W(\Phi)$.

Совместная ПРВ $W(\alpha, \psi)$ при a и ψ , определяемых по (37), (38), может быть найдена, если известна ПРВ СВ θ .

Используя [15], получим совместную ПРВ $W(\alpha, \psi)$ в виде

$$W(a, \psi) = \frac{a}{2\pi B} \delta(B - \alpha A), \quad (39)$$

где $B = (a^2 + A^2 - 2aA \cos \psi)^{1/2}$, a и ψ находятся в диапазоне

$$A(1 - \alpha) < a < A(1 + \alpha), \quad (40)$$

$$\arcsin(-\alpha) < \psi < \arcsin \alpha \quad (41)$$

и, кроме того, $W(\alpha, \psi) = 0$ в другой области, в (39) $\delta(x)$ – дельта-функция.

Для удобства дальнейших преобразований целесообразно ПРВ (39) представить в виде

$$W\left(\frac{a}{A}, \psi\right) = \frac{a/A}{2\pi C} \delta(C - \alpha), \quad (42)$$

где $C = [1 + (a/A)^2 - 2(a/A)\cos\psi]^{1/2}$, где диапазон (40) преобразуем к виду

$$1 - \alpha < a/A < 1 + \alpha.$$

На основе стохастического ДУ (36), переходя к уравнению ФПК и решая его, приходим к аналогу формулы Тихонова [4]

$$W(\Phi | a, \psi) = \frac{\exp[\nu \cos(\Phi + \psi)]}{2\pi I_0(\nu)}; \quad -\pi \leq \Phi \leq \pi, \quad (43)$$

где $I_0(\nu)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, а параметр ν — это ОСШ, определяемое равенством

$$\nu = 4a/KN_0. \quad (44)$$

Заменяя величину ν на произведение $(a/A)r$, где $r = 4A/KN_0$ — ОСШ в отсутствии помехи, то по (43) получим

$$W\left(\Phi | \frac{a}{A}, \psi\right) = \frac{\exp[(ra/A)\cos(\Phi + \psi)]}{2\pi I_0(ra/A)}. \quad (45)$$

Используя (42) и (45) получим искомую ПРВ $\Phi(t)$ в виде

$$W(\Phi) = \int \int_{\psi, a/A} W\left(\Phi | \frac{a}{A}, \psi\right) W\left(\frac{a}{A}, \psi\right) d\left(\frac{a}{A}\right) d\psi. \quad (46)$$

Используя фильтрующее свойство дельта – функции, получим

$$W(\Phi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{\exp\{r \cos(\Phi + \psi) [\cos\psi \pm f(\psi)]\}}{I_0\{r [\cos\psi \pm f(\psi)]\}} \left[\frac{\cos\psi}{f(\psi)} \pm 1 \right] d\psi, \quad (47)$$

где

$$f(\psi) = [\cos^2\psi - (1 - \alpha^2)]^{1/2}, \quad (48)$$

$$\psi_1 = \arcsin(-\alpha); \quad \psi_2 = \arcsin\alpha.$$

По (47) видно, что ПРВ $\Phi(t)$ является суммой двух интегралов: один при положительном знаке при функции $f(\psi)$, а другой при отрицательном знаке. По результатам расчета получены графики рис. 26, 27.

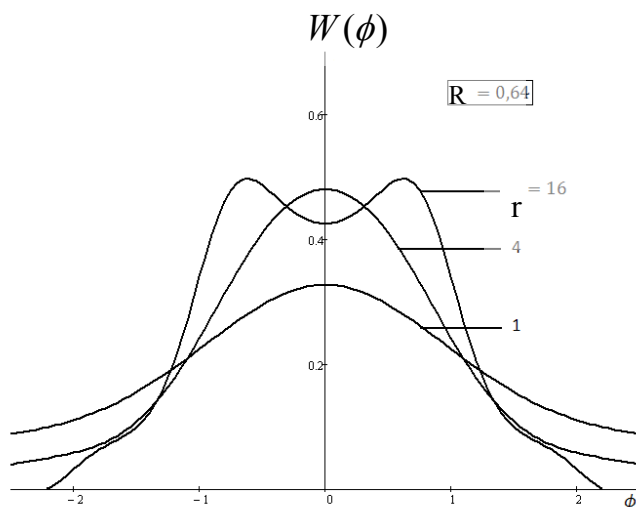


Рис. 26. Зависимость $W(\phi)$ при $R = 0,64$

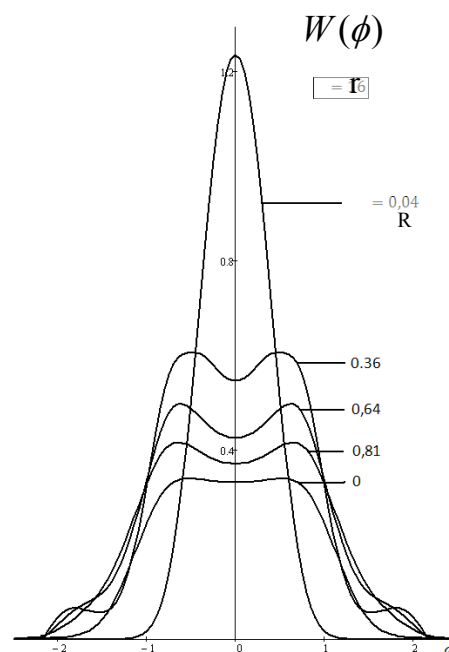


Рис. 27. Зависимость $W(\phi)$
при $\gamma = 0,04$

Дисперсия фазовой ошибки находится по известной формуле (рис. 28)

$$\sigma_{\phi}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi^2 W(\Phi) d\Phi. \quad (49)$$

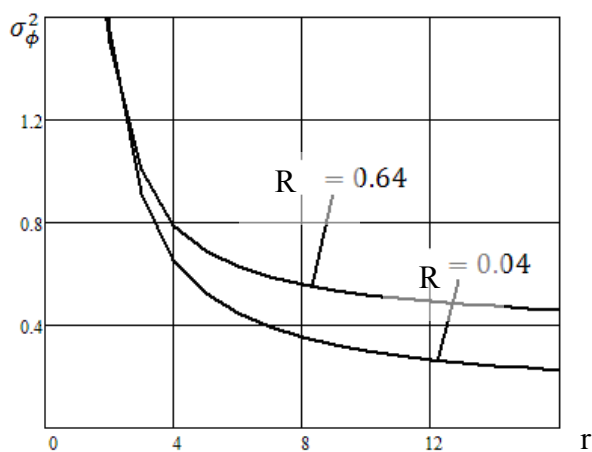


Рис. 28. Зависимость $\sigma_{\phi}^2(\phi)$

По результатам анализа ПРВ $W(\Phi)$ при наличии прицельной помехи (рис. 14-16, а также рис. 26, 27) можно сделать следующие выводы:

1. Из-за наличия помехи на частоте сигнала на графике ПРВ $W(x)$ [или $W(\Phi)$] возникает двумодальность ПРВ, а следовательно и провалы в графике при $x=0$ ($\Phi=0$).

2. При некоторых значениях ОСШ график ПРВ уплощается с уменьшением максимального значения при увеличении мощности помехи.

3. Наличие помехи увеличивает дисперсию сигнала рассогласования при любом значении ОСШ (см. рис. 28), причем характер зависимости $\sigma_{\phi}^2(r)$ монотонный несмотря на проявляющуюся бимодальность ПРВ при $\varepsilon \approx 1$.

Далее, если сравнивать действие прицельной помехи и помехи с частотой, лежащей вне полосы синхронизации, то следует заметить, что дисперсия фазовой ошибки с ростом ε сигнала увеличивается, а затем уменьшается, но одновременно растет установившееся значение фазовой ошибки.

В случае прицельной помехи установившееся значение фазовой ошибки при $\gamma = 0$ независимо от величины ОПС ε равна нулю.

Сравнивая рис. 6 (помеха за полосой синхронизации) и рис. 22 (помеха внутри полосы синхронизации) замечаем важное различие между свойствами системы: помеха за пределами полосы синхронизации существенно ухудшает качество системы, снижая среднее время до срыва синхронизации на несколько порядков при одних и тех же значениях ОПС ε , ОСШ γ и γ .

Отмечается асимметрия свойств ФАП при наличии гармонической помехи за пределами полосы синхронизации, если расстройки по частоте полезного сигнала и помехи относительно частоты собственных колебаний управляемого генератора имеют одинаковый и разный знаки. В первом случае увеличение интенсивности помехи приводит к улучшению синхронизма, растет среднее время до срыва слежения и падает среднее значение частотного рассогласования; во втором случае тенденция обратная.

Литература

1. Тихонов В.И. Влияние шумов на работу схемы фазовой автоподстройки частоты // Автоматика и телемеханика. 1959. №9. С. 1188-1196.

2. Тихонов В.И. Работа фазовой автоподстройки частоты при наличии шумов // Автоматика и телемеханика. 1960. №3. С.301-309.

3. Шахтарин Б.И. Анализ асимптотических значений статистических характеристик системы ФАПЧ // Радиотехника и электроника. 1986, №2. С. 246-258.
4. Шахтарин Б.И. Анализ систем синхронизации при наличии помех. - М.: ИПРЖР, 1996. 252 с.
5. Витерби А. Исследование динамики систем фазовой автоподстройки частоты в присутствии шумов с помощью уравнения Фоккера-Планка // ТИИЭР. М., 1963. Т. 51. №12. С. 1704-1722.
6. Витерби Э.Д. Принципы когерентной связи. М.: Сов. радио, 1970. 350 с.
7. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении: Пер. с англ. / Под ред. Ю.Н. Бакаева и М.В. Капранова. М.: Сов. Радио, 1978. 600 с.
8. Шахтарин Б.И. Спектральный анализ фазовой автоподстройки частоты при наличии шума // Автоматика и телемеханика. М., 1997. №2. С.118-129.
9. Yoon C.Y., Lindsey W.C. Phase – locked loop performance in the presence of CW interference and additive noise // IEEE Trans. On communications 1982. V. COM -30. N10. PP. 2305-2311.
10. Sarcar B.C. Phase error dynamics of a first order phase-locked loop in the presence of co-channel tone interference and additive noise // IEEE Trans. M., 1990. V. COM-38. № 7. PP. 962-965.
11. Hasan P. Multiple co channel interference effects in a first order phase – locked loop // ETТМ., 1994. V. 5. N3. PP. 319-326.
12. Шахтарин Б.И. Статистическая динамика систем синхронизации. М.: Радио и связь, 1998. 488 с.
13. Karsi M.F., Lindsey W.C. Effects of CW interference on carrier tracking // Proc. IEEE Conf. M., 1994. PP. 301-305.
14. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуации в радиотехнике. М.: Советское радио, 1961. 210 с.
15. Sarcar B.C. On the joint statistics of amplitude and phase of a signal with co-channel interference // Proc. IEEE. M., 1988. V. 76. N 3. PP. 298-299.
16. Журавлев А.Г. Работа системы фазовой автоподстройки частоты при гармонических помехах// Радиотехника. М., 1963 Т. 18. № 9. С. 38-46.