УДК 004.3 +519.6

В.А. Овчинников

Операции над ультра- и гиперграфами для реализации процедур анализа и синтеза структур сложных систем

(окончание, начало смотри «Наука и образование. Инженерное образование: Эл. науч. издание. – 2009 – № 10, 11»)

В заключительной части статьи рассмотрены операции свертки множества вершин графов, декомпозиции вершины, т. е. замены её частью графа, дополнения части до графа или его куска, объединения и пересечения графов. Эти операции необходимы для организации процесса проектирования при блочно-иерархическом подходе:

– для получения описания объекта при замене его фрагментов компонентами более высокого уровня иерархии;

– для реализации методов последовательной детализации и выделения частей объекта;

– для объединения фрагментов структуры объекта;

– для выполнения процедур контроля.

Все сказанное является общими замечаниями и не ограничивает возможности применения этих операций.

Свертка (факторизация) множества $X_{св}$ вершин ультраграфа H_U или гиперграфа H – рис. 12. Соответствует проектной операции замены части схемы макроэлементом.

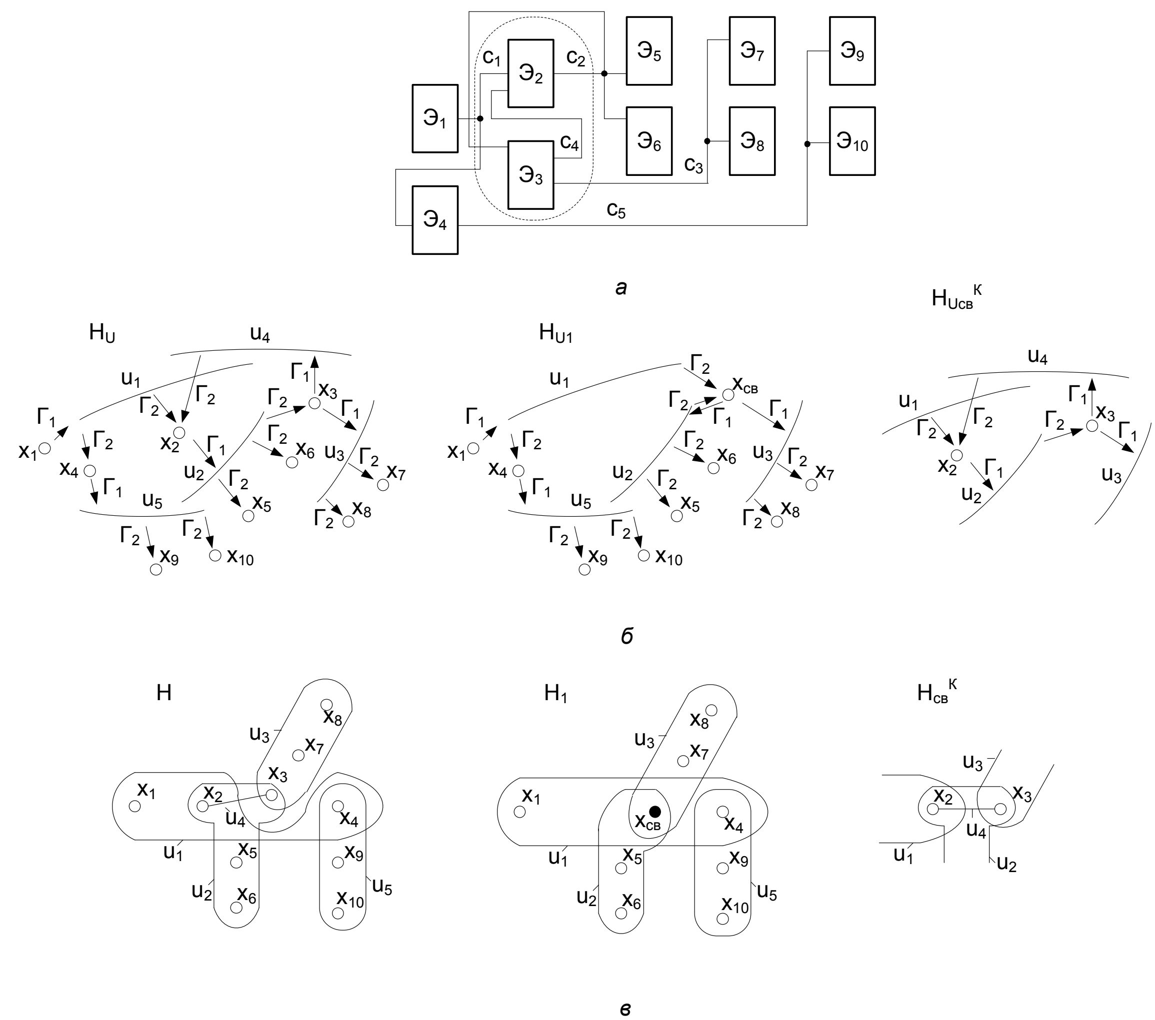


Рисунок 12 – Фрагмент схемы (*а*), ее модель в виде ультраграфа H_U и результат операции ультраграф H_{U1} и кусок ультраграфа $H_{U\text{св}}{}^{\text{к}}$ (*б*), гиперграф $H(X, U)$ и результат операции гиперграф H_1 и кусок $H_{\text{св}}{}^{\text{к}}$ (*в*)

Задается множество сворачиваемых вершин $X_{\text{св}}$.

Обозначение операции: H_U $(X,\ U\,/\,X_{\text{св}} \sim x_{\text{св}})$ и H $(X,\ U\,/\,X_{\text{св}} \sim x_{\text{св}}$ для ультра- и гиперграфа соответственно.

Условие корректности операции: $X_{\text{св}} \subseteq X$.

В результате выполнения операции для случая $X_{\text{св}} \subset X$ получаем:

– ультраграф H_{U1} $(X_1,\ U_1) = H_U$ $(X,\ U\,/\,X_{\text{св}} \sim x_{\text{св}})$ или

– гиперграф H_1 $(X_1,\ U_1) = H$ $(X, U\,/\,X_{\text{св}} \sim x_{\text{св}})$.

В качестве моделей схем соединения элементов, составляющих макроэлемент, формируются также куски ультраграфа $H_{U\text{св}}{}^{\text{к}}$ $(X_{\text{св}}{}^{\text{к}},\ U_{\text{св}}{}^{\text{к}})$ или гиперграфа $H_{\text{св}}{}^{\text{к}}$ $(X_{\text{св}}{}^{\text{к}},\ U_{\text{св}}{}^{\text{к}})$.

Для варианта $X_{св} = X$ операцию обозначим как *factor* $(H_U\ (X,\ U))$ для ультра- и *factor* $(H\ (X,\ U))$ гиперграфа соответственно. Результат операции:

– для ультраграфа $H_U\ (X, U)$ это тривиальный ультраграф

$H_{UF}\ (x_{св}, \varnothing) = factor\ (H_U\ (X, U))$;

– для гиперграфа $H\ (X, U)$ это тривиальный гиперграф

$H_F\ (x_{св}, \varnothing) = factor\ (H\ (X, U))$;

– для куска ультраграфа $H_U^{к}\ (X^{к}, U^{к})$ это одновершинный кусок

$H_{UF}^{к}\ (x_{св}, U^{к}_{ext}) = factor\ (H_U^{к}\ (X^{к}, U^{к}))$, где $U^{к}_{ext}$ – множество внешних ребер преобразуемого куска $H_U^{к}$;

– для куска гиперграфа $H^{к}\ (X^{к}, U^{к})$ это одновершинный кусок

$H_F^{к}\ (x_{св}, U^{к}_{ext}) = factor\ (H^{к}\ (X^{к}, U^{к}))$, где $U^{к}_{ext}$ – множество внешних ребер преобразуемого куска $H^{к}$.

Для всех случаев моделью макроэлемента $H_{Uсв}$ или $H_{Uсв}^{к}$ и $H_{св}$ или $H_{св}^{к}$ будет сам исходный граф или кусок $H_U\ (X, U)$ или $H_U^{к}\ (X^{к}, U^{к})$ и $H\ (X, U)$ или $H^{к}\ (X^{к}, U^{к})$.

Содержательно–формальное описание результата операции в виде ультраграфа $H_{U1}\ (X_1, U_1)$.

1. Формируем множество X_1, исключая из X вершины множества $X_{св}$ и добавляя вершину $x_{св}$:

$X_1 = (X \setminus X_{св}) \bullet x_{св}$, где $x_{св} \sim X_{св}$.

2. Создаем множество рёбер $U_{св}$, включая в него ребра $u_j \in U$, если множество вершин инцидентных ребру и множество вершин, которым оно инцидентно, принадлежит только множеству $X_{св}$:

$U_{св} = \{u_j \in\ U^* : \{\Gamma_2 u_j \cup \Gamma_1 u_j\} \subseteq X_{св} / \Gamma_2 u_j \in\ \Gamma_2 U, \Gamma_1 u_j \in\ \Gamma_1 U\}$,

где: $U^* = \{\Gamma_1 X_{св} \cup \Gamma_2 X_{св}\}$, $\Gamma_1 X_{св} = \bigcup\limits_{x_i \in X_{св}} \Gamma_1 x_i$, $\Gamma_2 X_{св} = \bigcup\limits_{x_i \in X_{св}} \Gamma_2 x_i$.

Примечание: множество $U_{св}$ является множеством внутренних ребер $U_{св}^{к}$ куска ультраграфа $H_{Uсв}^{к}$.

3. Получаем множество U_1, удаляя из множества U множество $U_{св}$:

$U_1 = U \setminus U_{св}$.

4. Формируем множество образов $\Gamma_1 X_1$, исключая из множества $\Gamma_1 X$ образы вершин множества $X_{св}$. После чего в множество $\Gamma_1 X_1$ добавляем образ свернутой вершины $x_{св}$. В образ $\Gamma_1 x_{св}$ входят ребра множества U_1, инцидентные вершинам множества $X_{св}$:

$$\Gamma_1 X_1 = \Gamma_1 X \setminus \{\Gamma_1 x_i \,/\, x_i \in X_{св}, \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X\} \bullet \Gamma_1 x_{св},$$

где $\Gamma_1 x_{св} = \bigcup\limits_{x_i \in X_{св}} \Gamma_1 x_i \setminus U_{св}, \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X$

или $\Gamma_1 x_{св} = \{u_j : \Gamma_1 u_j \cap X_{св} \neq \varnothing / u_j \in U_1, \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U\}$.

5. Создаем множество прообразов $\Gamma_2 X_1$, исключая из множества $\Gamma_2 X$ прообразы вершин множества $X_{св}$. После чего в множество $\Gamma_2 X_1$ добавляем прообраз свернутой вершины $x_{св}$. В $\Gamma_2 x_{св}$ входят ребра множества U_1, которым инцидентны вершины множества $X_{св}$

$$\Gamma_2 X_1 = \Gamma_2 X \setminus \{\Gamma_2 x_i \,/\, x_i \in X_{св}, \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X\} \bullet \Gamma_2 x_{св},$$

где $\Gamma_2 x_{св} = \bigcup\limits_{x_i \in X_{св}} \Gamma_2 x_i \setminus U_{св}, \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X$

или $\Gamma_2 x_{св} = \{u_j : \Gamma_2 u_j \cap X_{св} \neq \varnothing \,/\, u_j \in U_1, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U\}$.

6. Получаем множество образов $\Gamma_2 U_1$, копируя из $\Gamma_2 U$ образы $\Gamma_2 u_j$ рёбер $u_j \in U_1$ и удаляя при этом из образов рёбер, которым инцидентны вершины множества $X_{св}$, вершины, принадлежащие этому множеству, и добавляя вершину $x_{св}$:

$\Gamma_2 U_1 = \{\Gamma_2 u_j \,/\, u_j \in U_1\}$, где

$$\Gamma_2 u_j = \begin{cases} \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U : \Gamma_2 u_j \cap X_{св} = \varnothing, \\ \{\Gamma_2 u_j \setminus X_{св}\} \bullet x_{св} : \Gamma_2 u_j \cap X_{св} \neq \varnothing. \end{cases}$$

7. Формируем множество прообразов $\Gamma_1 U_1$, копируя из $\Gamma_1 U$ прообразы $\Gamma_1 u_j$ рёбер $u_j \in U_1$ и удаляя при этом из прообразов рёбер, инцидентных вершинам множества $X_{св}$, вершины, которые принадлежат этому множеству, и добавляя вершину $x_{св}$:

$\Gamma_1 U_1 = \{\Gamma_1 u_j \,/\, u_j \in U_1\}$, где

$$\Gamma_1 u_j = \begin{cases} \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U : \Gamma_1 u_j \cap X_{св} = \varnothing, \\ \{\Gamma_1 u_j \setminus X_{св}\} \bullet x_{св} : \Gamma_1 u_j \cap X_{св} \neq \varnothing. \end{cases}$$

8. Определяем множество F_1X_1 образов вершин относительно предиката смежности $F_1(X, X)$. Для чего:

– копируем F_1x_i из F_1X, если вершине x_i не инцидентна ни одна из вершин множества $X_{св}$,

–удаляем вершины множества $X_{св}$ из образа $F_1x_i \in F_1X$ и добавляем в него вершину $x_{св}$ в противном случае:

$F_1X_1 = \{ F_1x_i / x_i \in X_1 \}$, здесь для $x_i \neq x_{св}$

$$F_1x_i = \begin{cases} F_1x_i : F_1x_i \cap X_{св} = \varnothing, \\ (F_1x_i \setminus X_{св}) \bullet x_{св} : F_1x_i \cap X_{св} \neq \varnothing, \end{cases}$$

$$F_1x_{св} = \bigcup_{x_i \in X_{св}} F_1x_i \setminus X_{св}, \text{ где } F_1x_i \in F_1X.$$

Вершины, смежные свернутой, получаем объединяя образы вершин множества $X_{св}$ и удаляя из результата вершины множества $X_{св}$.

9. Получаем множество $F_1^{-1}X_1$ прообразов вершин. Для чего:

– копируем $F_1^{-1}x_i$ из $F_1^{-1}X$, если вершина x_i не инцидентна ни одной из вершин множества $X_{св}$,

– удаляем вершины множества $X_{св}$ из прообраза $F_1^{-1}x_i \in F_1^{-1}X$ и добавляем в него вершину $x_{св}$ в противном случае:

$F_1^{-1}X_1 = \{F_1^{-1}x_i / x_i \in X_1\}$, здесь для $x_i \neq x_{св}$

$$F_1^{-1}x_i = \begin{cases} F_1^{-1}x_i : F_1^{-1}x_i \cap X_{св} = \varnothing, \\ (F_1^{-1}x_i \setminus X_{св}) \bullet x_{св} : F_1^{-1}x_i \cap X_{св} \neq \varnothing, \end{cases}$$

$$F_1^{-1}x_{св} = \bigcup_{x_i \in X_{св}} F_1^{-1}x_i \setminus X_{св} \text{ , где } F_1^{-1}x_i \in F_1^{-1}X.$$

Прообраз вершины $x_{св}$ получаем, объединяя прообразы вершин множества $X_{св}$ и удаляя из результата вершины множества $X_{св}$.

10. Формируем множество F_2U_1 образов рёбер, копируя F_2u_j из F_2U, если ребру не инцидентна ни одна из сворачиваемых вершин, и удаляя из него свернутые рёбра в противном случае:

$F_2U_1 = \{F_2u_j \,/\, u_j \in U_1\}$, здесь

$$F_2u_j = \begin{cases} F_2u_j \in F_2U : \Gamma_2u_j \cap X_{\text{св}} = \varnothing, \\ \{F_2u_j \cup U_j'\} \setminus U_{\text{св}} : \Gamma_2u_j \cap X_{\text{св}} \neq \varnothing, \text{ где } F_2u_j \in F_2U, \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U, \end{cases}$$

$$U_j' = \bigcup_{x_i \in X_{\text{св}}} \Gamma_1x_i \setminus u_j,\ \Gamma_1x_i \in \Gamma_1X.$$

11. Получаем множество $F_2^{-1}U_1$ прообразов ребер, копируя $F_2^{-1}u_j$ из $F_2^{-1}U$, если ребро не инцидентно ни одной из сворачиваемых вершин, и удаляя из него свернутые ребра в противном случае:

$F_2^{-1}U_1 = \{F_2^{-1}u_j \,/\, u_j \in U_1\}$, где

$$F_2^{-1}u_j = \begin{cases} F_2^{-1}u_j \in F_2^{-1}U : \Gamma_1u_j \cap X_{\text{св}} = \varnothing, \\ \{F_2^{-1}u_j \cup U_j'\} \setminus U_{\text{св}} : \Gamma_1u_j \cap X_{\text{св}} \neq \varnothing, \text{ где } F_2^{-1}u_j \in F_2^{-1}U, \Gamma_1u_j \in \Gamma_1U, \end{cases}$$

$$U_j' = \bigcup_{x_i \in X_{\text{св}}} \Gamma_2x_i \setminus u_j,\ \Gamma_2x_i \in \Gamma_2X.$$

Формальное описание операции над гиперграфом H_1 (X_1, U_1).

Множества результата операции – гиперграфа H_1 (X_1, U_1) будут:

$X_1 = (X \setminus X_{\text{св}}) \bullet x_{\text{св}}$, где $x_{\text{св}} \sim X_{\text{св}}$;

$U_1 = U \setminus U_{\text{св}}$, где $U_{\text{св}} = \{u_j \in U : \Gamma_2u_j \subseteq X_{\text{св}} \,/\, \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U\}$;

$$\Gamma_1X_1 = \Gamma_1X \setminus \{\Gamma_1x_i \,/ x_i \in X_{\text{св}}, \Gamma_1x_i \in \Gamma_1X\} \bullet \Gamma_1x_{\text{св}}, \text{ где } \Gamma_1x_{\text{св}} = \bigcup_{x_i \in X_{\text{св}}} \Gamma_1x_i \setminus U_{\text{св}},$$

или $\Gamma_1x_{\text{св}} = \{u_j : \Gamma_2u_j \cap X_{\text{св}} \neq \varnothing \,/\, u_j \in U_1, \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U\}$;

$\Gamma_2U_1 = \{\Gamma_2u_j \,/\, u_j \in U_1\}$, где

$$\Gamma_2u_j = \begin{cases} \Gamma_2u_j, \text{ если } \Gamma_2u_j \cap X_{\text{св}} = \varnothing \text{ и } \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U, \\ (\Gamma_2u_j \setminus X_{\text{св}}) \bullet x_{\text{св}}, \text{ если } \Gamma_2u_j \cap X_{\text{св}} \neq \varnothing; \end{cases}$$

$F_1X_1 = \{ F_1x_i \,/\, x_i \in X_1\}$, здесь для $x_i \neq x_{\text{св}}$

$$F_1x_i = \begin{cases} F_1x_i : F_1x_i \cap X_{св} = \varnothing, \\ (F_1x_i \setminus X_{св}) \bullet x_{св} : F_1x_i \cap X_{св} \neq \varnothing, \end{cases}$$

$$F_1x_{св} = \bigcup_{x_i \in X_{св}} F_1x_i \setminus X_{св}, \text{ где } F_1x_i \in F_1X;$$

$F_2U_1 = \{F_2u_j \,/\, u_j \in U_1\}$, здесь

$$F_2u_j = \begin{cases} F_2u_j \in F_2U : \Gamma_2u_j \cap X_{св} = \varnothing, \\ \{F_2u_j \cup U_j'\} \setminus U_{св} : \Gamma_2u_j \cap X_{св} \neq \varnothing, \text{ где } F_2u_j \in F_2U, \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U, \end{cases}$$

$$U_j' = \bigcup_{x_i \in X_{св}} \Gamma_1x_i \setminus u_j, \; \Gamma_1x_i \in \Gamma_1X.$$

Куски ультраграфа $H_{Uсв}^{к}$ ($X_{св}^{к}$, $U_{св}^{к}$) и гиперграфа $H_{св}^{к}$ ($X_{св}^{к}$, $U_{св}^{к}$) определяются так же, как $H_{U1}^{к}$ ($X_1^{к}$, $U_1^{к}$) и $H_1^{к}$ ($X_1^{к}$, $U_1^{к}$) в операции «формирование части ультраграфа H_U или гиперграфа H» [2].

Асимптотическая оценка вычислительной сложности данной операции без учета операций определения образов и прообразов вершин и ребер относительно предикатов смежности равна:

- *в худшем $O(n^2 \cdot m)$, если $|\Gamma_2u_j|$, $|\Gamma_1u_j|$ и $|X_{св}|$ ограничены n;*
- *в лучшем $O(n)$ при $n > m$ и $O(m)$ при $m > n$, если $|\Gamma_2u_j|$, $|\Gamma_1u_j|$, $|\Gamma_1x_i|$, $|\Gamma_2x_i|$ и $|X_{св}|$ ограничены константой.*

Операция применима также к кускам ультра- и гиперграфа, при этом H_{U1} и H_1 будут кусками ультра- и гиперграфа соответственно. Множества внешних ребер этих кусков равны множествам внешних ребер исходных графов.

Пример. Объединим в макроэлемент элементы э$_2$ и э$_3$ схемы, показанной на рис. 12, *а*. В результате операции H_{U1} (X_1, U_1) = H (X, $U / X_{св} \Rightarrow x_{св}$) свертки вершин множества $X_{св} = \{x_2, x_3\}$ ультраграфа H_U получим ультраграф H_{U1} и кусок ультраграфа $H_{Uсв}^{к}$ (смотри рис. 12, *б*). Множества аналитического представления ультраграфа H_{U1} (X_1, U_1) будут:

$X_1 = \{x_1, x_4, x_5, \ldots, x_{10}, x_{св}\}$;

$U_{св} = \{u_4\}$, так как $\Gamma_2u_4 \cup \Gamma_1u_4 = \{x_2\} \cup \{x_3\} = \{x_2, x_3\} = X_{св}$,

$U_1 = U \setminus U_{св} = \{u_1, u_2, u_3, u_5\}$;

$\Gamma_1X_1 = \{\Gamma_1x_1, \Gamma_1x_4, \Gamma_1x_5, \ldots, \Gamma_1x_{10}\} \bullet \Gamma_1x_{св}$, где $\Gamma_1x_{св} = \{\{\Gamma_1x_2 \cup \Gamma_1x_3\} \setminus u_4\} = \{\{u_2, u_3, u_4\} \setminus u_4\} = \{u_2, u_3\}$;

$\Gamma_2X_1 = \{\Gamma_2x_1, \Gamma_2x_4, \Gamma_2x_5, \ldots, \Gamma_2x_{10}\} \bullet \Gamma_2x_{св}$, где $\Gamma_2x_{св} = \{u_1, u_2\}$;

Γ_2U_1: $\Gamma_2u_1 = \{\{x_2, x_4\} \setminus \{x_2, x_3\} \bullet x_{св}\} = \{x_4, x_{св}\}$, $\Gamma_2u_2 = \{\{x_3, x_5, x_6\} \setminus \{x_2, x_3\} \bullet x_{св}\} = \{x_5, x_6, x_{св}\}$, $\Gamma_2u_3 = \{x_7, x_8\}$, $\Gamma_2u_5 = \{x_9, x_{10}\}$;

Γ_1U_1: $\Gamma_1u_1 = \{x_1\}$, $\Gamma_1u_2 = \{\{x_2\} \setminus \{x_2, x_3\} \bullet x_{св} = \{x_{св}\}$, $\Gamma_1u_3 = \{x_3\} \setminus \{x_2, x_3\} \bullet x_{св}\}= \{x_{св}\}$, $\Gamma_1u_5 = \{x_4\}$;

F_1X_1: $F_1x_1 = \{\{x_2, x_4\} \setminus \{x_2, x_3\} \bullet x_{св}\} = \{x_4, x_{св}\}$, $F_1x_4 =\{x_9, x_{10}\}$, $F_1x_5 = F_1x_6 = F_1x_7 = F_1x_8 = F_1x_9 = F_1x_{10} = \varnothing$, $F_1x_{св} = \{\{x_5, x_6, x_3\} \cup \{x_2, x_7, x_8\} \setminus \{x_2, x_3\}\} = \{x_5, x_6, x_7, x_8\}$;

$F_1^{-1}X_1$: $F_1^{-1}x_1 = \varnothing$, $F_1^{-1}x_4 = \{x_1\}$, $F_1^{-1}x_5 = F_1^{-1}x_6 = \{\{x_2\} \setminus \{x_2, x_3\} \bullet x_{св}\} = \{x_{св}\}$, $F_1^{-1}x_7 = F_1^{-1}x_8 = \{\{x_3\} \setminus \{x_2, x_3\} \bullet x_{св}\} = \{x_{св}\}$, $F_1^{-1}x_9 = F_1^{-1}x_{10} = \{x_4\}$,
$F_1^{-1}x_{св} = \{\{x_1, x_3\} \cup \{x_2\} \setminus \{x_2, x_3\}\}= \{x_1\}$;

F_2U_1: $F_2u_1 = \{\{u_2, u_5\} \cup \{\{u_2\}\setminus\{u_1\} \cup \{u_3, u_4\} \setminus \{u_1\}\} \setminus u_4\} = \{u_2, u_3, u_5\}$, $F_2u_2 = \{\{u_3, u_4\} \cup \{\{u_2\} \setminus \{u_2\} \cup \{u_3, u_4\} \setminus \{u_2\}\} \setminus u_4\} = \{u_3\}$, $F_2u_3 = F_2u_5 = \varnothing$;

$F_2^{-1}U_1$: $F_2^{-1}u_1 = \varnothing$, $F_2^{-1}u_2 = \{\{u_1, u_4\} \cup \{\{u_1, u_4\} \setminus \{u_2\} \cup \{u_2\} \setminus \{u_2\}\} \setminus u_4\} = \{u_1\}$, $F_2^{-1}u_3 = \{\{u_2\} \cup \{\{u_1, u_4\} \setminus \{u_3\} \cup \{u_2\} \setminus \{u_3\}\}\setminus u_4\}\} = \{u_2, u_1\}$,
$F_2^{-1}u_5 =\{u_1\}$.

Кусок ультраграфа $H_{Uсв}{}^к$ ($X_{св}{}^к$, $U_{св}{}^к$) получим по формулам для куска ультраграфа $H_{U1}{}^к$ в операции «формирование части ультраграфа H_U или гиперграфа H» [2]. В этих формулах множество $X_1{}^к$ следует заменить на $X_{св}{}^к$, а множество $U_1{}^к$ – на множество $U_{св}{}^к$:

$X_{св}{}^к = \{x_2, x_3\}$,

$U_{св}{}^к = \Gamma_1(X_{св}{}^к) \cup \Gamma_2(X_{св}{}^к)$, $U_{св}{}^к = \{u_2, u_3, u_4, u_1\}$,

$U_{св}{}^к{}_{int} = \{u_j \in U_{св}{}^к : \{\Gamma_2u_j \cup \Gamma_1u_j\} \subseteq X_{св}{}^к / \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U, \Gamma_1u_j \in \Gamma_1U\}$,
$U_{св}{}^к{}_{int} = \{u_4\}$,

$U_{св}{}^к{}_{ext} = U_{св}{}^к \setminus U_{св}{}^к{}_{int}$, $U_{св}{}^к{}_{ext} = \{u_2, u_3, u_1\}$;

$\Gamma_1X_{св}{}^к = \{\Gamma_1x_i \in \Gamma_1X / x_i \in X_{св}{}^к\}$, $\Gamma_1X_{св}{}^к = \{\Gamma_1x_2, \Gamma_1x_3\} = \{\{u_2\}, \{u_3,u_4\}\}$;

$\Gamma_2X_{св}{}^к = \{\Gamma_2x_i \in \Gamma_2X / x_i \in X_{св}{}^к\}$, $\Gamma_2X_{св}{}^к = \{\Gamma_2x_2, \Gamma_2x_3\} = \{\{u_1, u_4\}, \{u_2\}\}$;

$\Gamma_2 U_{св}{}^{к} = \{\Gamma_2 u_j : u_j \in U_{св}{}^{к}{}_{int} \vee \Gamma_2 u_j \cap X_{св}{}^{к} : u_j \in U_{св}{}^{к}{}_{ext} / u_j \in U_{св}{}^{к}, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U\}$;

$\Gamma_2 U_{св}{}^{к}$: $\Gamma_2 u_2 = \{x_3, x_5, x_6\} \cap \{x_2, x_3\} = \{x_3\}$, $\Gamma_2 u_3 = \{x_7, x_8\} \cap \{x_2, x_3\} = \varnothing$, $\Gamma_2 u_4 = \{x_2\}$, $\Gamma_2 u_1 = \{x_2, x_4\} \cap \{x_2, x_3\} = \{x_2\}$;

$\Gamma_1 U_{св}{}^{к} = \{\Gamma_1 u_j : u_j \in U_{св}{}^{к}{}_{int} \vee \Gamma_1 u_j \cap X_{св}{}^{к} : u_j \in U_{св}{}^{к}{}_{ext} / u_j \in U_{св}{}^{к}, \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U\}$;

$\Gamma_1 U_{св}{}^{к}$: $\Gamma_1 u_2 = \{x_2\} \cap \{x_2, x_3\} = \{x_2\}$, $\Gamma_1 u_3 = \{x_3\} \cap \{x_2, x_3\} = \{x_3\}$, $\Gamma_1 u_4 = \{x_3\}$, $\Gamma_1 u_1 = \{x_1\} \cap \{x_2, x_3\} = \varnothing$;

$F_1 X_{св}{}^{к} = \{F_1 x_i \cap X_{св}{}^{к} / x_i \in X_{св}{}^{к}, F_1 x_i \in F_1 X\}$;

$F_1 X_{св}{}^{к}$: $F_1 x_2 = \{x_3, x_5, x_6\} \cap \{x_2, x_3\} = \{x_3\}$, $F_1 x_3 = \{x_2, x_7, x_8\} \cap \{x_2, x_3\} = \{x_2\}$;

$F_1^{-1} X_{св}{}^{к} = \{F_1^{-1} x_i \cap X_{св}{}^{к} / x_i \in X_{св}{}^{к}, F^{-1} x_i \in F_1^{-1} X\}$;

$F_1^{-1} X_{св}{}^{к}$: $F_1^{-1} x_2 = \{x_1, x_3\} \cap \{x_2, x_3\} = \{x_3\}$, $F_1^{-1} x_3 = \{x_2\} \cap \{x_2, x_3\} = \{x_2\}$;

$F_2 U_{св}{}^{к} = \{F_2 u_j \cap U_{св}{}^{к} / u_j \in U_{св}{}^{к}, F_2 u_j \in F_2 U\}$;

$F_2 U_{св}{}^{к}$: $F_2 u_2 = \{u_3, u_4\} \cap \{u_2, u_3, u_4, u_1\} = \{u_3, u_4\}$, $F_2 u_3 = \varnothing$, $F_2 u_4 = \{u_2\} \cap \{u_2, u_3, u_4, u_1\} = \{u_2\}$, $F_2 u_1 = \{u_2, u_5\} \cap \{u_2, u_3, u_4, u_1\} = \{u_2\}$;

$F_2^{-1} U_{св}{}^{к} = \{F_2^{-1} u_j \cap U_{св}{}^{к} / u_j \in U_{св}{}^{к}, F_2^{-1} u_j \in F_2^{-1} U\}$;

$F_2^{-1} U_{св}{}^{к}$: $F_2^{-1} u_2 = \{u_1, u_4\} \cap \{u_2, u_3, u_4, u_1\} = \{u_1, u_4\}$, $F_2^{-1} u_3 = \{u_2\} \cap \{u_2, u_3, u_4, u_1\} = \{u_2\}$, $F_2^{-1} u_4 = \{u_2\} \cap \{u_2, u_3, u_4, u_1\} = \{u_2\}$, $F_2^{-1} u_1 = \varnothing$.

При использовании в качестве модели схемы гиперграфа H результатом операции $H_1 (X_1, U_1, \Gamma_1 X_1, \Gamma_2 U_1) = H (X, U, \Gamma_1 X, \Gamma_2 U / X_{св} \Rightarrow x_{св})$ будет гиперграф H_1 и кусок гиперграфа $H_{св}{}^{к}$.

Гиперграф $H_1 (X_1, U_1, \Gamma_1 X_1, \Gamma_2 U_1)$:

$X_1 = \{x_1, x_4, x_5, \ldots, x_{10}, x_{св}\}$;

$U_{св} = \{u_4\}$, так как $\Gamma_2 u_4 = X_{св}$, $U_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_5\}$;

$\Gamma_1 X_1$: $\Gamma_1 x_1 = \{u_1\}$, $\Gamma_1 x_4 = \{u_1, u_5\}$, $\Gamma_1 x_5 = \Gamma_1 x_6 = \{u_2\}$, $\Gamma_1 x_7 = \Gamma_1 x_8 = \{u_3\}$;

$\Gamma_1 x_9 = \Gamma_1 x_{10} = \{u_5\}$, $\Gamma_1 x_{св} = \{u_1, u_2, u_3\}$;

$\Gamma_2 U_1$: $\Gamma_2 u_1 = \{x_1, x_4, x_{св}\}$, $\Gamma_2 u_2 = \{x_5, x_6, x_{св}\}$,

$\Gamma_2 u_3 = \{x_7, x_8, x_{св}\}$, $\Gamma_2 u_5 = \{x_4, x_9, x_{10}\}$.

Для куска гиперграфа $H_{св}{}^{к} (X_{св}{}^{к}, U_{св}{}^{к}, \Gamma_1 X_{св}{}^{к}, \Gamma_2 U_{св}{}^{к})$ множества его аналитического представления будут:

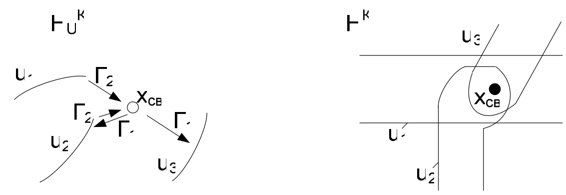
$X_{св}{}^{к} = X_{св} = \{x_2, x_3\}$;

$U_{св}{}^{к} = \{u_2, u_3, u_4, u_1\}$, $U_{св}{}^{к}{}_{int} = \{u_4\}$, $U_{св}{}^{к}{}_{ext} = \{ u_2, u_3, u_1\}$;

$\Gamma_1 X_{св}{}^{к} = \{\Gamma_1 x_2, \Gamma_1 x_3\}$, где $\Gamma_1 x_2 = \{u_1, u_2, u_4\}$, $\Gamma_1 x_3 = \{ u_2, u_3, u_4\}$;

$\Gamma_2 U_{св}{}^{к} = \{\Gamma_2 u_1, \Gamma_2 u_2, \Gamma_2 u_3, \Gamma_2 u_4\}$, где $\Gamma_2 u_1 = \{x_2\}$, $\Gamma_2 u_2 = \Gamma_2 u_4 = \{x_2, x_3\}$, $\Gamma_2 u_3 = \{x_3\}$.

Декомпозиция вершины $x_{св}$ ультраграфа H_{U1} или гиперграфа H_1 – рис. 13 . Реализует проектную операцию замены в схеме макроэлемента его схемой на элементах более высокой степени детализации**.**



а б

Рисунок 13 – Одновершинные куски ультраграфа $H_U{}^{к}$ ($x_{св}$, $U^{к}$) (*а*) и гиперграфа $H^{к}$ ($x_{св}$, $U^{к}$) (*б*)

Выполняется замена одновершинного куска $H_U{}^{к}$ ($x_{св}$, $U^{к}$) – рис. 13, *а* ультраграфа H_{U1} (X_1, U_1) или одновершинного куска – рис. 13, *б* гиперграфа H_1 (X_1, U_1) на многовершинный кусок $H_{Uсв}{}^{к}$ ($X_{св}{}^{к}$, $U_{св}{}^{к}$) или $H_{св}{}^{к}$ ($X_{св}{}^{к}$, $U_{св}{}^{к}$) соответственно. Ультраграф H_{U1} и многовершинный кусок $H_{Uсв}{}^{к}$, гиперграф H_1 и многовершинный кусок $H_{св}{}^{к}$ показаны на рис. 12, *б* и *в* соответственно.

Имеются аналитические представления ультраграфа H_{U1} или гиперграфа H_1 и многовершинных кусков $H_{Uсв}{}^{к}$ или $H_{св}{}^{к}$ соответственно. Куски $H_{Uсв}{}^{к}$ или $H_{св}{}^{к}$ могут быть получены в результате выполнения операции свертки множества вершин либо каким-то другим способом.

Обозначение операции: H_{U1} (X_1, $U_1 / x_{св} \Rightarrow X_{св}{}^{к}$) для ультраграфа и

H_1 (X_1, $U_1 / x_{св} \Rightarrow X_{св}{}^{к}$) для гиперграфа.

Условия корректности операции: $U^{к} = \{\Gamma_1 x_{св} \cup \Gamma_2 x_{св}\} \subseteq U_{св}{}^{к}$ для ультраграфа и $U^{к} = \Gamma_1 x_{св} \subseteq U_{св}{}^{к}$ для гиперграфа, $U^{к} = U_{св}{}^{к}{}_{ext}$.

В результате выполнения операции формируется: ультраграф

H_U (X, U) $= H_{U1}$ (X_1, $U_1 / x_{св} \Rightarrow X_{св}{}^{к}$) или гиперграф

$H(X, U) = H_1(X_1, U_1 / x_{св} \Rightarrow X_{св}{}^{к})$.

Содержательно–формальное описание операции получения ультраграфа $H_U\,(X, U)$.

1. Определяем множество X, исключая из X_1 вершину $x_{\text{св}}$ и добавляя вершины множества $X_{\text{св}}$:

$X = (X_1 \setminus x_{\text{св}}) \bullet X_{\text{св}}{}^{\text{к}}$.

2. Формируем множество рёбер U, добавляя в множество U_1 множество внутренних ребер $U_{\text{св}}{}^{\text{к}}{}_{int}$ куска ультраграфа $H_{U\text{св}}{}^{\text{к}}$:

$U = U_1 \bullet U_{\text{св}}{}^{\text{к}}{}_{int}$.

3. Получаем множества образов $\Gamma_1 X$ и прообразов $\Gamma_2 X$ вершин, удаляя из множеств $\Gamma_1 X_1$ и $\Gamma_2 X_1$ образ и прообраз вершины $x_{\text{св}}$ и добавляя образы и прообразы вершин множества $X_{\text{св}}$ многовершинного куска $H_{U\text{св}}{}^{\text{к}}\,(X_{\text{св}}{}^{\text{к}}, U_{\text{св}}{}^{\text{к}})$:

$\Gamma_1 X = \Gamma_1 X_1 \setminus \Gamma_1 x_{\text{св}} \bullet \Gamma_1 X_{\text{св}}{}^{\text{к}}, \Gamma_1 x_{\text{св}} \in \Gamma_1 X_1,$

$\Gamma_2 X = \Gamma_2 X_1 \setminus \Gamma_2 x_{\text{св}} \bullet \Gamma_2 X_{\text{св}}{}^{\text{к}}, \Gamma_2 x_{\text{св}} \in \Gamma_2 X_1.$

4. Формируем множество образов рёбер $\Gamma_2 U$, занося в него:

– образ ребра u_j из $\Gamma_2 U_1$, если вершина $x_{\text{св}}$ не инцидентна ему;

– образ ребра u_j из $\Gamma_2 U_1$, удаляя из него вершину $x_{\text{св}}$ и добавляя в него образ ребра из $\Gamma_2 U_{\text{св}}{}^{\text{к}}$, если u_j является внешним ребром куска $H_{U\text{св}}{}^{\text{к}}$;

– образ ребра u_j из $\Gamma_2 U_{\text{св}}{}^{\text{к}}{}_{int}$, если это ребро внутреннее в куске $H_{U\text{св}}{}^{\text{к}}$:

$\Gamma_2 U = \{\Gamma_2 u_j \,/\, u_j \in U\}$, где

$$\Gamma_2 u_j = \begin{cases} \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_1 : x_{\text{св}} \notin \Gamma_2 u_j, \\ \Gamma_2 u_j \setminus x_{\text{св}} \bullet X_j^+ : u_j \in U_{\text{св}}{}^{\text{к}}{}_{\text{ext}}, \text{ где } \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_1,\ X_j^+ = \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_{\text{св}}{}^{\text{к}}, \\ \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_{\text{св}}{}^{\text{к}} : u_j \in U_{\text{св}}{}^{\text{к}}{}_{int}. \end{cases}$$

5. Создаем множество прообразов рёбер $\Gamma_1 U$, занося в него:

– прообраз ребра u_j из $\Gamma_1 U_1$, если оно не инцидентно вершине $x_{\text{св}}$;

– прообраз ребра u_j из $\Gamma_1 U_1$, удаляя из него вершину $x_{\text{св}}$ и добавляя в него прообраз ребра из $\Gamma_1 U_{\text{св}}{}^{\text{к}}$, если u_j является внешним ребром куска $H_{U\text{св}}{}^{\text{к}}$;

– прообраз ребра u_j из $\Gamma_1 U_{\text{св}}{}^{\text{к}}$, если это ребро внутреннее в куске $H_{U\text{св}}{}^{\text{к}}$:

$\Gamma_1 U = \{\Gamma_1 u_j \,/\, u_j \in U\}$, где

$$\Gamma_1 u_j = \begin{cases} \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_1 : u_j \notin \Gamma_1 x_{\text{св}}, \text{ где } \Gamma_1 x_{\text{св}} \in \Gamma_1 X_1, \\ \Gamma_1 u_j \setminus x_{\text{св}} \bullet X^- : u_j \in U_{\text{св}}{}^{\text{к}}{}_{ext}, \text{ где } \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_1,\ X_j^- = \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_{\text{св}}{}^{\text{к}}, \\ \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_{\text{св}}{}^{\text{к}} : u_j \in U_{\text{св}}{}^{\text{к}}{}_{int}. \end{cases}$$

6. Определяем множество образов F_1X вершин, для чего:

– копируем образ $F_1x_i \in F_1X_1$, если x_i является вершиной ультраграфа H_{U1} и вершина $x_{\text{св}}$ ей не смежна;

– добавляем к образу $F_1x_i \in F_1X_1$ вершины, инцидентные в куске $H_{U\text{св}}{}^{\text{к}}$ рёбрам $u_j \in \Gamma_1 x_i$ ультраграфа H_{U1}, и удаляем вершину $x_{\text{св}}$, если x_i является вершиной ультраграфа H_{U1} и вершина $x_{\text{св}}$ ей смежна;

– добавляем к образу $F_1x_i \in F_1X_{\text{св}}{}^{\text{к}}$ вершины, инцидентные в ультраграфе H_{U1} ребрам $u_j \in \Gamma_1 x_i$ куска $H_{U\text{св}}{}^{\text{к}}$, и удаляем вершину $x_{\text{св}}$, если x_i является вершиной этого куска:

$F_1X = \{F_1x_i \,/\, x_i \in X\}$, где

$$F_1x_i = \begin{cases} F_1x_i : x_i \in X_1 \ \&\ x_{\text{св}} \notin F_1x_i, \\ \{F_1x_i \underset{u_j \in \Gamma_1 x_i}{\bullet \cup} \Gamma_2 u_j\} \setminus x_{\text{св}} : x_i \in X_1 \ \&\ x_{\text{св}} \in F_1x_i,\ \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X_1,\ \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_{\text{св}}{}^{\text{к}}, \\ \{F_1x_i \underset{u_j \in \Gamma_1 x_i}{\bullet \cup} \Gamma_2 u_j\} \setminus x_{\text{св}} : x_i \in X_{\text{св}}{}^{\text{к}},\ \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X_{\text{св}}{}^{\text{к}},\ \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_1. \end{cases}$$

Для первых двух выражений $F_1x_i \in F_1X_1$, для третьего $F_1x_i \in F_1X_{\text{св}}{}^{\text{к}}$.

7. Формируем множество прообразов $F_1^{-1}X$ вершин, для чего:

– копируем прообраз $F_1^{-1}x_i \in F_1^{-1}X_1$, если x_i является вершиной ультраграфа H_{U1} и вершина $x_{\text{св}}$ не принадлежит этому прообразу;

– добавляем к прообразу $F_1^{-1}x_i \in F_1^{-1}X_1$ вершины, которым инцидентны в куске $H_{U\text{св}}{}^{\text{к}}$ рёбра $u_j \in \Gamma_2 x_i$ ультраграфа H_{U1}, и удаляем вершину $x_{\text{св}}$, если x_i является вершиной ультраграфа H_{U1} и вершина $x_{\text{св}}$ принадлежит прообразу вершины x_i в ультраграф H_{U1};

– добавляем к образу $F_1^{-1}x_i \in F_1^{-1}X_{\text{св}}{}^{\text{к}}$ вершины, которым инцидентны в ультраграфе H_{U1} рёбра $u_j \in \Gamma_1 x_i$ куска $H_{U\text{св}}{}^{\text{к}}$, и удаляем вершину $x_{\text{св}}$, если x_i является вершиной этого куска:

$F_1^{-1}X = \{\, F_1^{-1}x_i \,/\, x_i \in X \,\}$, где

$$F_1^{-1}x_i = \begin{cases} F_1^{-1}x_i : x_i \in X_1 \& x_{\text{св}} \notin F_1^{-1}x_i,\ F_1^{-1}x_i \in F_1^{-1}X_1, \\ \{F_1^{-1}x_i \bullet \bigcup\limits_{u_j \in \Gamma_2 x_i} \Gamma_1 u_j\} \setminus x_{\text{св}} : x_i \in X_1 \ \& \ x_{\text{св}} \in F_1^{-1}x_i, \\ \{F_1^{-1}x_i \bullet \bigcup\limits_{u_j \in \Gamma_2 x_i} \Gamma_1 u_j\} \setminus x_{\text{св}} : x_i \in X_{\text{св}}^{\text{к}}, \end{cases}$$

где для второго выражения $\Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X_1$, $\Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_{\text{св}}^{\text{к}}$ и $F_1^{-1}x_i \in F_1^{-1}X_1$, а для третьего $\Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X_{\text{св}}^{\text{к}}$, $\Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_1$ и $F_1^{-1}x_i \in F_1^{-1}X_{\text{св}}^{\text{к}}$.

8. Создаем множество образов F_2U рёбер, для чего:

– копируем образ F_2u_j из F_2U_1 ультраграфа H_{U1}, если ребро u_j принадлежит множеству его рёбер и вершина $x_{\text{св}}$ не инцидентна этому ребру;

– удаляем из образа $F_2u_j \in F_2U_1$ рёбра, инцидентные в H_{U1} вершине $x_{\text{св}}$, и добавляем рёбра, инцидентные в куске $H_{U\text{св}}^{\text{к}}$ вершинам, которые принадлежат образу ребра u_j в этом куске, если ребро $u_j \in U_1$ ультраграфа H_{U1} и вершина $x_{\text{св}}$ инцидентна этому ребру;

– копируем образ F_2u_j из $F_2U_{\text{св}}^{\text{к}}$ куска ультраграфа $H_{U\text{св}}^{\text{к}}$, если ребро u_j принадлежит множеству его внутренних рёбер:

$F_2U = \{ F_2u_j / u_j \in U\}$, где

$$F_2u_j = \begin{cases} F_2u_j : u_j \in U_1 \ \& \ x_{\text{св}} \notin \Gamma_2 u_j, \\ \{F_2u_j \setminus \Gamma_1 x_{\text{св}}\} \bullet \{\bigcup\limits_{x_i \in X_j^+} \Gamma_1 x_i\} : u_j \in U_1 \ \& \ x_{\text{св}} \in \Gamma_2 u_j, \\ F_2u_j \in F_2U_{\text{св}}^{\text{к}} : u_j \in U_{\text{св}\,int}^{\text{к}}. \end{cases}$$

Здесь: $F_2u_j \in F_2U_1$, $\Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_1$, $\Gamma_1x_{\text{св}} \in \Gamma_1U_1$, $\Gamma_1x_i \in \Gamma_1X_{\text{св}}^{\text{к}}$, $X_j^+ = \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_{\text{св}}^{\text{к}}$.

9. Получаем множество прообразов $F_2^{-1}U$ рёбер, для чего:

– копируем прообраз $F_2^{-1}u_j$ из множества $F_2^{-1}U_1$ ультраграфа H_{U1}, если ребро u_j принадлежит множеству его рёбер и вершина $x_{\text{св}}$ не принадлежит множеству вершин, которым инцидентно это ребро;

– удаляем из прообраза $F_2^{-1}u_j \in F_2^{-1}U_1$ рёбра, которым инцидентна в H_{U1} вершина $x_{\text{св}}$, и добавляем ребра, которым в куске $H_{U\text{св}}^{\text{к}}$ инцидентны вершины, принадлежащие прообразу ребра u_j в этом куске, если ребро $u_j \in U_1$ ультраграфа H_{U1} и вершина $x_{\text{св}}$ инцидентна этому ребру;

– копируем прообраз $F_2^{-1}u_j$ из $F_2^{-1}U_{\text{св}}^{\text{к}}$ куска ультраграфа $H_{U\text{св}}^{\text{к}}$, если ребро u_j принадлежит множеству его внутренних ребер:

$$F_2^{-1}U = \{\, F_2^{-1}u_j \,/\, u_j \in U \,\}, \text{ где}$$

$$F_2^{-1}u_j = \begin{cases} F_2^{-1}u_j : u_j \in U_1 \ \&\ x_{\text{св}} \notin \Gamma_1 u_j, \\ \{F_2^{-1}u_j \setminus \Gamma_2 x_{\text{св}}\} \bullet \{\bigcup\limits_{x_i \in X_j^-} \Gamma_2 x_i\} : u_j \in U_1 \ \&\ x_{\text{св}} \in \Gamma_1 u_j, \\ F_2^{-1}u_j \in F_2^{-1}U_{\text{св}}^{\text{к}} : u_j \in U_{\text{св}\ int}^{\text{к}}, \end{cases}$$

здесь: $F_2^{-1}u_j \in F_2^{-1}U_1$, $\Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_1$, $\Gamma_1 x_{\text{св}} \in \Gamma_1 U_1$, $\Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X_{\text{св}}^{\text{к}}$,

$X_j^- = \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_{\text{св}}^{\text{к}}$.

Формальное описание выполнения операции получения гиперграфа $H\ (X, U)$:

$$X = (X_1 \setminus x_{\text{св}}) \bullet X_{\text{св}}^{\text{к}};\ U = U_1 \bullet U_{\text{св}\ int}^{\text{к}};$$

$$\Gamma_1 X = \Gamma_1 X_1 \setminus \Gamma_1 x_{\text{св}} \bullet \Gamma_1 X_{\text{св}}^{\text{к}},\ \Gamma_1 x_{\text{св}} \in \Gamma_1 X_1;$$

$$\Gamma_2 U = \{\Gamma_2 u_j \,/\, u_j \in U\}, \text{ здесь}$$

$$\Gamma_2 u_j = \begin{cases} \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_1 : x_{\text{св}} \notin \Gamma_2 u_j, \\ \Gamma_2 u_j \setminus x_{\text{св}} \bullet X_j : u_j \in U_{\text{св}\ \text{ext}}^{\text{к}}, \text{ где } \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_1,\ X_j = \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_{\text{св}}^{\text{к}}, \\ \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_{\text{св}}^{\text{к}} : u_j \in U_{\text{св}\ int}^{\text{к}}; \end{cases}$$

$$F_1 X = \{F_1 x_i \,/\, x_i \in X\}, \text{ где}$$

$$F_1 x_i = \begin{cases} F_1 x_i : x_i \in X_1 \ \&\ x_{\text{св}} \notin F_1 x_i, \\ \{F_1 x_i \bullet \bigcup\limits_{u_j \in \Gamma_1 x_i} \Gamma_2 u_j\} \setminus x_{\text{св}} : x_i \in X_1 \&\ x_{\text{св}} \in F_1 x_i,\ \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X_1,\ \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_{\text{св}}^{\text{к}}, \\ \{F_1 x_i \bullet \bigcup\limits_{u_j \in \Gamma_1 x_i} \Gamma_2 u_j\} \setminus x_{\text{св}} : x_i \in X_{\text{св}}^{\text{к}},\ \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X_{\text{св}}^{\text{к}},\ \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_1. \end{cases}$$

Для первых двух выражений $F_1 x_i \in F_1 X_1$, для третьего $F_1 x_i \in F_1 X_{\text{св}}^{\text{к}}$.

$$F_2 U = \{F_2 u_j \,/\, u_j \in U\}, \text{ где}$$

$$F_2 u_j = \begin{cases} F_2 u_j : u_j \in U_1 \ \&\ x_{\text{св}} \notin \Gamma_2 u_j, \\ \{F_2 u_j \setminus \Gamma_1 x_{\text{св}}\} \bullet \{\bigcup\limits_{x_i \in X_j} \Gamma_1 x_i\} \setminus u_j : u_j \in U_1 \ \&\ x_{\text{св}} \in \Gamma_2 u_j, \\ F_2 u_j \in F_2 U_{\text{св}}^{\text{к}} : u_j \in U_{\text{св}\ int}^{\text{к}}. \end{cases}$$

Здесь: $F_2 u_j \in F_2 U_1$, $\Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_1$, $\Gamma_1 x_{\text{св}} \in \Gamma_1 U_1$, $\Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X_{\text{св}}^{\text{к}}$, $X_j = \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_{\text{св}}^{\text{к}}$.

Асимптотическая оценка вычислительной сложности данной операции без формирования образов и прообразов вершин и ребер относительно предикатов смежности равна:

- *в худшем $O(n{\cdot}m)$ при $n > m$, если $|\Gamma_1 x_i|$ или $|\Gamma_2 x_i|$ ограничена m либо $|\Gamma_2 u_j|$ или $|\Gamma_1 u_j|$ ограничена n и $|U_{\text{св}}{}^{\text{к}}{}_{\text{ext}}|$ или $|U_{\text{св}}{}^{\text{к}}{}_{int}|$ ограничена m, и $O(m^2)$ при $m > n$, если $|U_{\text{св}}{}^{\text{к}}{}_{\text{ext}}|$ или $|U_{\text{св}}{}^{\text{к}}{}_{int}|$ ограничена m;*
- *в лучшем $O(n)$ при $n > m$, если $|\Gamma_1 x_i|$, $|\Gamma_2 x_i|$, $|U_{\text{св}}{}^{\text{к}}{}_{\text{ext}}|$ и $|U_{\text{св}}{}^{\text{к}}{}_{int}|$ ограничены константой, и $O(m)$ при $m > n$, если $|U_{\text{св}}{}^{\text{к}}{}_{\text{ext}}|$ и $|U_{\text{св}}{}^{\text{к}}{}_{int}|$ ограничены константой.*

Операция применима к куску ультра- и гиперграфа. Выполнение операции не меняет вид части графа.

Пример. Выполним декомпозицию вершины $x_{\text{св}}$ ультраграфа H_{U1} (X_1, U_1), заменяя ее куском $H_{\text{св}}{}^{\text{к}}$ $(X_{\text{св}}{}^{\text{к}}, U_{\text{св}}{}^{\text{к}})$, (смотри рис. 12, *б*). Заменяемый кусок ультраграфа $H_{U\text{св}}{}^{\text{к}}$ показан на рис. 13, *а*. Напомним, что $X_{\text{св}}{}^{\text{к}} = \{x_2, x_3\}$. Используя множества аналитического представления ультраграфа H_{U1} и куска $H_{\text{св}}{}^{\text{к}}$ из примера для операции свертки, получим следующие множества аналитического представления ультраграфа H_U:

$X = \{x_1, x_{\text{св}}, x_4, \ldots, x_{10}\} \setminus x_{\text{св}} \bullet \{x_2, x_3\} = \{x_1, x_4, \ldots, x_{10}, x_2, x_3\}$;

$U = \{u_1, u_2, u_3, u_5\} \bullet \{u_4\} = \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_4\}$;

$\Gamma_1 X = \{\Gamma_1 x_1, \Gamma_1 x_{\text{св}}, \Gamma_1 x_4, \ldots, \Gamma_1 x_{10}\} \setminus \Gamma_1 x_{\text{св}} \bullet \{\Gamma_1 x_2, \Gamma_1 x_3\} = \{\Gamma_1 x_1, \Gamma_1 x_4, \ldots, \Gamma_1 x_{10}, \Gamma_1 x_2, \Gamma_1 x_3\}$;

$\Gamma_2 X = \{\Gamma_2 x_1, \Gamma_{2\text{св}}, \Gamma_2 x_4, \ldots, \Gamma_2 x_{10}\} \setminus \Gamma_2 x_{\text{св}} \bullet \{\Gamma_2 x_2, \Gamma_2 x_3\} = \{\Gamma_2 x_1, \Gamma_2 x_4, \ldots, \Gamma_2 x_{10}, \Gamma_2 x_2, \Gamma_2 x_3\}$;

$\Gamma_2 U$: $\Gamma_2 u_1 = \{x_4, x_{\text{св}}\} \setminus x_{\text{св}} \bullet \{x_2\} = \{x_4, x_2\}$, $\Gamma_2 u_2 = \{x_5, x_6, x_{\text{св}}\} \setminus x_{\text{св}} \bullet \{x_3\} = \{x_5, x_6, x_3\}$, $\Gamma_2 u_3 = \{x_7, x_8\}$, $\Gamma_2 u_5 = \{x_9, x_{10}\}$, $\Gamma_2 u_4 = \{x_2\}$;

$\Gamma_1 U$: $\Gamma_1 u_1 = \{x_1\}$, $\Gamma_1 u_2 = \{x_{\text{св}}\} \setminus x_{\text{св}} \bullet \{x_2\} = \{x_2\}$, $\Gamma_1 u_3 = \{x_{\text{св}}\} \setminus x_{\text{св}} \bullet \{x_3\} = \{x_3\}$, $\Gamma_1 u_5 = \{x_4\}$, $\Gamma_1 u_4 = \{x_3\}$;

$F_1 X$: $F_1 x_1 = \{F_1 x_1 \in F_1 X_1 \bullet \Gamma_2 u_1 \in \Gamma_2 U_{\text{св}}{}^{\text{к}}\} \setminus x_{\text{св}} = \{\{x_4, x_{\text{св}}\} \bullet \{x_2\}\} \setminus x_{\text{св}} = \{x_4, x_2\}$, $F_1 x_2 = \{F_1 x_2 \in F_1 X_{\text{св}}{}^{\text{к}} \bullet \Gamma_2 u_1 \in \Gamma_2 U_1\} \setminus x_{\text{св}} = \{\{x_3\} \bullet \{x_5, x_6, x_{\text{св}}\}\} \setminus x_{\text{св}} = \{x_3, x_5,$

$x_6\}$, $F_1x_3 = \{F_1x_3 \in F_1X_{св}^{к} \bullet \Gamma_2u_1 \in \Gamma_2U_1\} \setminus x_{св} = \{\{x_2\} \bullet \{x_7, x_8\}\} \setminus x_{св} = \{x_2, x_7, x_8\}$, $F_1x_4 = \{x_9, x_{10}\}$, $F_1x_5 = F_1x_6 = F_1x_7 = F_1x_8 = F_1x_9 = F_1x_{10} = \varnothing$;

$F_1^{-1}X$: $F_1^{-1}x_1 = \varnothing$, $F_1^{-1}x_2 = \{F_1^{-1}x_2 \in F_1X_{св}^{к} \bullet \Gamma_1u_1 \in \Gamma_1U_1 \cup \Gamma_1u_2 \in \Gamma_1U_1\} \setminus x_{св}$ $= \{\{x_3\} \bullet \{x_1\} \cup \{x_{св}\} \setminus x_{св} = \{x_3, x_1\}$, $F_1^{-1}x_3 = \{F_1^{-1}x_3 \in F_1^{-1}X_{св}^{к} \bullet \Gamma_1u_1 \in \Gamma_1U_1 \cup$ $\Gamma_1u_2 \in \Gamma_1U_1\}\} \setminus x_{св} = \{\{x_2\} \bullet \{x_1\} \cup \{x_{св}\}\} \setminus x_{св} = \{x_2, x_1\}$, $F_1^{-1}x_4 = \{x_1\}$, $F_1^{-1}x_5 =$ $F_1^{-1}x_6 = \{F_1^{-1}x_5 \in F_1^{-1}X_1 \bullet \Gamma_1u_2 \in \Gamma_1U_{св}\} \setminus x_{св} = \{\{x_{св}\} \bullet \{x_2\}\} \setminus x_{св} =\{x_2\}$, $F_1^{-1}x_7 = F_1^{-1}x_8 = \{F_1^{-1}x_7 \in F_1^{-1}X_1 \bullet \Gamma_1u_3 \in \Gamma_1U_{св}\} \setminus x_{св} = \{\{x_{св}\} \bullet \{x_3\}\} \setminus x_{св} = \{x_3\}$, $F_1^{-1}x_9 = F_1^{-1}x_{10} = \{x_2\}$;

F_2U: $F_2u_1 = \{\{u_2, u_3, u_5\} \setminus \{u_2, u_3\} \bullet \{u_2\}\} = \{u_5, u_2\}$,

$F_2u_2 = \{\{u_3\} \setminus \{u_2, u_3\} \bullet \{u_3, u_4\}\} = \{u_3, u_4\}$, $F_2u_3 = \varnothing$, $F_2u_4 = \{u_2\}$, $F_2u_5 = \varnothing$;

$F_2^{-1}U$: $F_2^{-1}u_1 = \varnothing$, $F_2^{-1}u_2 = \{u_1\} \setminus \{u_1, u_2\} \bullet \{u_1, u_4\} = \{u_1, u_4\}$, $F_2^{-1}u_3 = \{u_1, u_2\}$ $\setminus \{u_1, u_2\} \bullet \{u_1, u_2\} = \{u_1, u_2\}$, $F_2^{-1}u_4 = \{u_2\}$, $F_2^{-1}u_5 = \{u_1\}$.

В результате операции $H\ (X,U, \Gamma_1X, \Gamma_2U) = H_1\ (X_1,U_1, \Gamma_1X_1, \Gamma_2U_1 \,/\, x_{св} \Rightarrow X_{св}^{к})$ получим гиперграф H_1 (смотри рис. 12, *в*), множества аналитического представления которого будут:

$X = \{x_1, x_4, \ldots, x_{10}, x_2, x_3\}$;

$U = \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_4\}$;

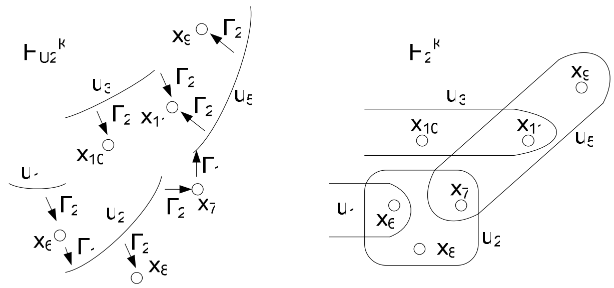
$\Gamma_1X = \{\Gamma_1x_1, \Gamma_1x_4, \ldots, \Gamma_1x_{10}, \Gamma_1x_2, \Gamma_1x_3\}$;

$\Gamma_1x_1 = \{u_1\}$, $\Gamma_1x_4 = \{u_1, u_5\}$, $\Gamma_1x_5 = \Gamma_1x_6 = \{u_2\}$, $\Gamma_1x_7 = \Gamma_1x_8 = \{u_3\}$;

$\Gamma_1x_9 = \Gamma_1x_{10} = \{u_5\}$, $\Gamma_1x_2 = \{u_1, u_2, u_4\}$, $\Gamma_1x_3 = \{u_2, u_3, u_4\}$;

Γ_2U: $\Gamma_2u_1 = \{x_1, x_4, x_{св}\} \setminus x_{св} \bullet \{x_2\} = \{x_1, x_4, x_2\}$, $\Gamma_2u_2 = \{x_5, x_6, x_{св}\} \setminus x_{св} \bullet \{x_2,$ $x_3\} = \{x_5, x_6, x_2, x_3\}$, $\Gamma_2u_3 = \{x_7, x_8, x_{св}\} \setminus x_{св} \bullet \{x_3\} = \{x_7, x_8, x_3\}$, $\Gamma_2u_5 = \{x_4, x_9, x_{10}\}$, $\Gamma_2u_4 = \{x_2, x_3\}$.

Дополнение части до ультраграфа H_U и гиперграфа H соответственно – рис. 14. Реализует проектную операцию удаления части схемы.



а б

Рисунок 14 – Куски ультраграфа $H_{U2}{}^{к}$ и гиперграфа $H_2{}^{к}$ (*а*) и (*б*) соответственно – результат операции дополнения куска $H_{U1}{}^{к}$ до ультраграфа H_U и куска $H_1{}^{к}$ до гиперграфа H, показанных на рисунках 11, *б* и *в* соответственно

Операция имеет две модификации: получение куска $H_{U2}{}^{к}$ ультраграфа H_U или $H_2{}^{к}$ гиперграфа H и получение подграфа H_{U2} ультраграфа или H_2 гиперграфа.

Известен ультраграф H_U или гиперграф H. Задается кусок ультраграфа $H_{U1}{}^{к}$ или гиперграфа $H_1{}^{к}$ для первой модификации операции и подграф ультраграфа H_{U1} или подграф гиперграфа H_1 для второй (смотри рис. 11, *б* и *в* соответственно).

Обозначение операции:

– $H_U\ (X,U) \setminus H_{U1}{}^{к}\ (X_1{}^{к},U_1{}^{к})$ и $H(X,U) \setminus H_1{}^{к}\ (X_1{}^{к},U_1{}^{к})$ для получения кусков ультра- и гиперграфа соответственно или

– $H_U\ (X,U) \setminus H_{U1}\ (X_1,U_1)$ и $H(X,U) \setminus H_1\ (X_1,U_1)$ для определения подграфов ультра- и гиперграфа соответственно.

Условие корректности операции: $H_{U1}{}^{к} \cap H_U \neq \varnothing$, $H_{U1} \cap H_U \neq \varnothing$, $H_1{}^{к} \cap H \neq \varnothing$, $H_1 \cap H \neq \varnothing$.

Результатом выполнения операции является:

– кусок ультраграфа $H_{U2}{}^{к}\ (X_2{}^{к},U_2{}^{к}) = H_U\ (X,U) \setminus H_{U1}{}^{к}\ (X_1{}^{к},U_1{}^{к})$ или

– кусок гиперграфа $H_2{}^{к}\ (X_2{}^{к},U_2{}^{к}) = H(X,U) \setminus H_1{}^{к}\ (X_1{}^{к},U_1{}^{к})$ либо

– подграф ультраграфа $H_{U2}(X_2,U_2) = H_U\ (X,U) \setminus H_{U1}\ (X_1,U_1)$ или

– подграф гиперграфа $H_2(X_2,U_2) = H(X,U) \setminus H_1\ (X_1,U_1)$.

Полученный кусок или подграф может содержать несколько компонент связности. Например, если искать дополнение кусков $H_{U2}{}^{к}$ и $H_2{}^{к}$, показанных на рис. 14, *а* или *б* соответственно, до ультраграфа H_U и гиперграфа H (смотри рис. 11, *б* и *в*), результатом операции будут куски $H_{U1}{}^{к}$ и $H_1{}^{к}$ – показаны на том же рисунке, которые состоят из двух компонент связности. Как и в предыдущей операции здесь не формируется аналитическое представление каждой компоненты связности. Множества вершин, ребер, образов и прообразов (для ультраграфа) формируемой части графа представляют собой конкатенацию соответствующих множеств компонент связности, входящих в эту компоненту.

Содержательно – формальное описание результата операции дополнения куска $H_{U1}{}^{к}$ ($X_1{}^{к}$, $U_1{}^{к}$) до куска ультраграфа $H_U{}^{к}$ ($X^{к}$, $U^{к}$).

Для получения множеств куска $H_{U2}{}^{к}$ ($X_2{}^{к}$, $U_2{}^{к}$):

1. Определяем множество $X_2{}^{к}$ вершин, исключая из $X^{к}$ вершины множества $X_1{}^{к}$: $X_2{}^{к} = X^{к} \setminus X_1{}^{к}$.

2. Формируем множество $U_2{}^{к}{}_{int}$ внутренних рёбер, удаляя из $U^{к}{}_{int}$ рёбра множества $U_1{}^{к}$ куска $H_{U1}{}^{к}$: $U_2{}^{к}{}_{int} = U^{к}{}_{int} \setminus U_1{}^{к}$.

3. Создаем множество $U_2{}^{к}{}_{ext}$, добавляя в $U^{к}{}_{ext}$, те рёбра из $U^{к}{}_{int}$, которые в куске $H_{U1}{}^{к}$ являются внешними, и удаляя те рёбра $U^{к}{}_{ext}$, у которых все вершины образов и прообразов принадлежат множеству $X_1{}^{к}$:

$U_2{}^{к}{}_{ext} = \{U^{к}{}_{ext} \cup U^{к}{}_{int} \cap U_1{}^{к}{}_{ext}\} \setminus U_d$,

где $U_d = \{u_j : \Gamma_2 u_j \subseteq X_1{}^{к}$ & $\Gamma_1 u_j \subseteq X_1{}^{к} / u_j \in U^{к}{}_{ext}, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U^{к}, \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U^{к}\}$.

4. Образуем множество $U_2{}^{к}$, применяя операцию конкатенации к множествам $U_2{}^{к}{}_{int}$ и $U_2{}^{к}{}_{ext}$: $U_2{}^{к} = U_2{}^{к}{}_{int} \bullet U_2{}^{к}{}_{ext}$.

5. Формируем множество $\Gamma_1 X_2{}^{к}$ образов вершин куска $H_{U2}{}^{к}$, исключая из $\Gamma_1 X$ образы $\Gamma_1 X_1{}^{к}$ вершин куска $H_{U1}{}^{к}$:

$\Gamma_1 X_2{}^{к} = \{\Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X^{к} / x_i \in X_2{}^{к}\}$.

6. Формируем множество $\Gamma_2 X_2{}^{к}$ прообразов вершин куска $H_{U2}{}^{к}$, исключая из $\Gamma_2 X$ прообразы $\Gamma_2 X_1{}^{к}$ вершин куска $H_{U1}{}^{к}$:

$\Gamma_2 X_2{}^{к} = \{\Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X^{к} / x_i \in X_2{}^{к}\}$.

7. Создаем множество $\Gamma_2 U_2{}^{к}$ образов рёбер куска $H_{U2}{}^{к}$ так, что образом внутреннего ребра является образ $\Gamma_2 u_j$ одноименного ребра в $\Gamma_2 U^{к}$, а образ

внешнего ребра формируется как $\Gamma_2 u_j \setminus X_1^к$, т. е. удалением вершин, принадлежащих множеству $X_1^к$:

$\Gamma_2 U_2^к = \{\Gamma_2 u_j : u_j \in U_2{}^к{}_{int} \vee \Gamma_2 u_j \setminus X_1^к : u_j \in U_2{}^к{}_{ext} \,/\, u_j \in U_2^к, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U^к\}$.

8. Создаем множество $\Gamma_1 U_2^к$ прообразов рёбер куска $H_{U2}^к$ так, что прообразом внутреннего ребра является прообраз $\Gamma_1 u_j$ одноименного ребра в $\Gamma_1 U^к$, а прообраз внешнего ребра формируется как $\Gamma_1 u_j \setminus X_1^к$, т. е. удалением вершин, принадлежащих множеству $X_1^к$:

$\Gamma_1 U_2^к = \{\Gamma_1 u_j : u_j \in U_2{}^к{}_{int} \vee \Gamma_1 u_j \setminus X_1^к : u_j \in U_2{}^к{}_{ext} \,/\, u_j \in U_2^к, \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U^к\}$.

9. Получаем множества $F_1 X_2^к$ образов и $F_1^{-1} X_2^к$ прообразов вершин $x_i \in X_2^к$, удаляя при копировании из $F_1 x_i \in F_1 X^к$ и $F_1^{-1}\, x_i \in F_1^{-1} X^к$ вершины не принадлежащие $X_2^к$:

$F_1 X_2^к = \{F_1 x_i \setminus x_j \notin X_2^к \,/\, x_i \in X_2^к, F_1 x_i \in F_1 X^к\}$ и

$F_1^{-1} X_2^к = \{F_1^{-1} x_i \setminus x_j \notin X_2^к \,/\, x_i \in X_2^к, F_1^{-1} x_i \in F_1^{-1} X^к\}$.

10. Образуем множества $F_2 U_2^к$ образов и $F_2^{-1} U_2^к$ прообразов рёбер $u_j \in U_2^к$ для чего копируем $F_2 u_j$ из $F_2 U^к$ и $F_2^{-1} u_j$ из $F_2^{-1} U^к$, если u_j является внутренним ребром куска $H_{U2}^к$, и удаляя при копировании из образа и прообраза внутренние ребра $U_1{}^к{}_{int}$ куска $H_{U1}^к$, если u_j является внешним ребром куска $H_{U2}^к$:

$F_2 U_2^к = \{F_2 u_j : u_j \in U_2{}^к{}_{int} \vee F_2 u_j \setminus U_1{}^к{}_{int} : u_j \in U_2{}^к{}_{ext} \,/\, u_j \in U_2^к, F_2 u_j \in F_2 U^к\}$;

$F_2^{-1} U_2^к = \{F_2^{-1} u_j : u_j \in U_2{}^к{}_{int} \vee F_2^{-1} u_j \setminus U_1{}^к{}_{int} : u_j \in U_2{}^к{}_{ext} \,/\, u_j \in U_2^к,$
$F_2^{-1} u_j \in F_2^{-1} U^к\}$.

Для операции «Дополнение куска до ультраграфа» пункты 2 и 3 будут иметь вид:

2. Формируем множество $U_2{}^к{}_{int}$ внутренних ребер, удаляя из U ребра множества $U_1^к$ куска $H_{U1}^к$: $U_2{}^к{}_{int} = U \setminus U_1^к$.

3. Копируем множество $U_1{}^к{}_{ext}$ под именем $U_2{}^к{}_{ext}$: $U_2{}^к{}_{ext} = U_1{}^к{}_{ext}$.

Формальное описание результата операции в виде куска гиперграфа $H_2^к\,(X_2^к, U_2^к)$:

$X_2^к = X \setminus X_1^к$; $U_2{}^к{}_{int} = U \setminus U_1^к$; $U_2{}^к{}_{ext} = U_1{}^к{}_{ext}$; $U_2^к = U_2{}^к{}_{int} \bullet U_2{}^к{}_{ext}$;

$\Gamma_1 X_2^{к} = \Gamma_1 X \setminus \Gamma_1 X_1^{к} = \{\Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X / x_i \in X_2^{к}\}$;

$\Gamma_2 U_2^{к} = \{\Gamma_2 u_j : u_j \in U_2{}^{к}{}_{int} \vee \Gamma_2 u_j \setminus X_1^{к} : u_j \in U_2{}^{к}{}_{ext} / u_j \in U_2^{к}, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U\}$;

$F_1 X_2^{к} = \{F_1 x_i \setminus x_j \in X_1^{к} / x_i \in X_2^{к}, F_1 x_i \in F_1 X\}$;

$F_2 U_2^{к} = \{F_2 u_j : u_j \in U_2{}^{к}{}_{int} \vee F_2 u_j \setminus U_1{}^{к}{}_{int} : u_j \in U_2{}^{к}{}_{ext} / u_j \in U_2^{к}, F_2 u_j \in F_2 U\}$.

Аналитическое представление подграфа H_{U2} ультраграфа или подграфа H_2 гиперграфа получаем по тем же формулам, что и для подграфа H_{U1} ультраграфа и подграфа H_1 гиперграфа в операции «Формирование части ультраграфа H_{U1} или гиперграфа H_1», определяя $X_2 = X \setminus X_1$ **и** ***заменяя в остальных выражениях X_1 на X_2 и U_1 на U_2.***

Асимптотическая оценка вычислительной сложности данной операции без учета операций формирования образов и прообразов вершин и рёбер относительно предикатов смежности равна:

- *в худшем* $O(n^2 \cdot m)$, *если* $|U_2{}^{к}{}_{ext}|$ *ограничены* m, *а* $|\Gamma_2 u_j|$ *и* $|X_1^{к}|$ *ограничены* n;
- *в лучшем* $O(1)$, *если* $|X_1^{к}|$, $|U_2{}^{к}{}_{ext}|$ *и* $|\Gamma_2 u_j|$ *ограничены константой.*

Вычислительная сложность операции над гиперграфом имеет тот же порядок.

Операция может выполняться и для «дополнения куска до куска».

Пример. В примере предыдущей операции из схемы, показанной на рис. 11, *а*, выделена часть, включающую элементы э$_1$, э$_2$, э$_3$, э$_4$, э$_5$ и сформирован кусок ультраграфа $H_{U1}^{к}$ (смотри рис. 11, *б*).

В результате операции $H_{U2}^{к}(X_2^{к}, U_2^{к}) = H_U(X, U) \setminus H_{U1}^{к}(X_1^{к}, U_1^{к})$ получим кусок ультраграфа $H_{U2}^{к}$, показанный на рис. 14, *а*, в котором:

$X_2^{к} = \{x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}\}$;

$U_2{}^{к}{}_{int} = \{u_2, u_5\}$, $U_2{}^{к}{}_{ext} = \{u_3, u_1\}$; $U_2^{к} = \{u_2, u_5, u_3, u_1\}$;

$\Gamma_1 X_2^{к} = \{\{u_2\}, \{u_5\}, \varnothing, \varnothing, \varnothing, \varnothing\}$;

$\Gamma_2 X_2^{к} = \{\{u_1\}, \{u_2\}, \{u_2\}, \{u_5\}, \{u_3\}, \{u_3, u_5\}\}$;

$\Gamma_2 U_2^{к}$: $\Gamma_2 u_2 = \{x_7, x_8\}$, $\Gamma_2 u_5 = \{x_9, x_{11}\}$, $\Gamma_2 u_3 = \{x_{10}, x_{11}\} \setminus X_1^{к} = \{x_{10}, x_{11}\}$, $\Gamma_2 u_1 = \{x_3, x_6\} \setminus X_1^{к} = \{x_6\}$;

$F_1 X_2^{к}$: $F_1 x_6 = \{x_7, x_8\}$, $F_1 x_7 = \{x_9, x_{11}\}$, $F_1 x_8 = F_1 x_9 = F_1 x_{10} = F_1 x_{11} = \varnothing$;

$F_1^{-1}X_2^к$: $F_1^{-1}x_6 = \{x_4\} \setminus \{x_4\} = \varnothing$, $F_1^{-1}x_7 = \{x_6\}$, $F_1^{-1}x_8 = \{x_6\}$, $F_1^{-1}x_9 = \{x_7\}$, $F_1^{-1}x_{10} = \{x_2\} \setminus \{x_2\} = \varnothing$, $F_1^{-1}x_{11} = \{x_2, x_7\} \setminus \{x_2\} = \{x_7\}$;

$F_2U_2^к$: $F_2u_2 = \{u_5\}$, $F_2u_5 = \varnothing$, $F_2u_3 = \varnothing$, $F_2u_1 = \{u_2\} \setminus \{u_4\} = \{u_2\}$;

$F_2^{-1}U_2^к$: $F_2^{-1}u_2 = \{u_1\}$, $F_2^{-1}u_5 = \{u_2\}$, $F_2^{-1}u_3 = \{u_4\} \setminus \{u_4\} = \varnothing$.

Кусок гиперграфа $H_2^к$ ($X_2^к$, $U_2^к$, $\Gamma_1X_2^к$, $\Gamma_2U_2^к$) – рис. 14, *б*:

$X_2^к = \{x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}\}$;

$U_2{}^к_{int} = \{u_2, u_5\}$, $U_2{}^к_{ext} = \{u_3, u_1\}$, $U_2^к = \{u_2, u_5, u_3, u_1\}$;

$\Gamma_1X_2^к = \{\{u_1, u_2\}, \{u_2,u_5\}, \{u_2\}, \{u_5\}, \{u_3\}, \{u_3, u_5\}\}$;

$\Gamma_2U_2^к$: $\Gamma_2u_2 = \{x_6, x_7, x_8\}$, $\Gamma_2u_5 = \{x_7, x_9, x_{11}\}$;

$\Gamma_2u_3 = \{x_2, x_{10}, x_{11}\} \setminus X_1^к = \{x_{10}, x_{11}\}$, $\Gamma_2u_1 = \{x_3, x_4, x_6\} \setminus X_1^к = \{x_6\}$.

Объединение частей ультраграфа или гиперграфа. Реализует проектную операцию объединения двух схем, имеющих общие элементы и/или цепи. Операция приводит к образованию одной компоненты связности при выполнении указанных в таблице 3 условий, если объекты объединения представляют собой одну компоненту связности каждый. В качестве объектов операции могут выступать куски графов и подграфы. На рис. 15 показан пример объединения двух кусков ультраграфа ($H_{U1}^к$ и $H_{U2}^к$) и гиперграфа ($H_1^к$ и $H_2^к$). Возможные варианты объединения частей графов представлены в таблице 3, в которой $X_1^к$, $X_2^к$, $U_1^к$, $U_2^к$ и X_1, X_2, U_1, U_2 – множества вершин и рёбер куска графа и подграфа соответственно.

Таблица 3

N	Объединяемые части	Возможные варианты	Вид результата
1	Два куска $H_{U1}^к$ и $H_{U2}^к$ ультраграфа H_U (X, U) или $H_1^к$ и $H_2^к$ гиперграфа H (X, U) такие, что $X_1^к \cap X_2^к = X$	$X_1^к \cap X_2^к \neq \varnothing$, $U_1^к \cap U_2^к \neq \varnothing$;	кусок, если $U_1{}^к_{ext} \neq U_2{}^к_{ext}$, граф, если $U_1{}^к_{ext} = U_2{}^к_{ext}$
		$X_1^к \cap X_2^к \neq \varnothing$, $U_1^к \cap U_2^к = \varnothing$;	кусок графа
2	Кусок и подграф тех же абстракций	$X_1^к \cap X_2 \neq \varnothing$, $U_1^к \cap U_2 \neq \varnothing$; $X_1^к \cap X_2 \neq \varnothing$, $U_1^к \cap U_2 = \varnothing$;	кусок графа
3	Два подграфа тех же абстракций	$X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$, $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$; $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$, $U_1 \cap U_2 = \varnothing$;	граф

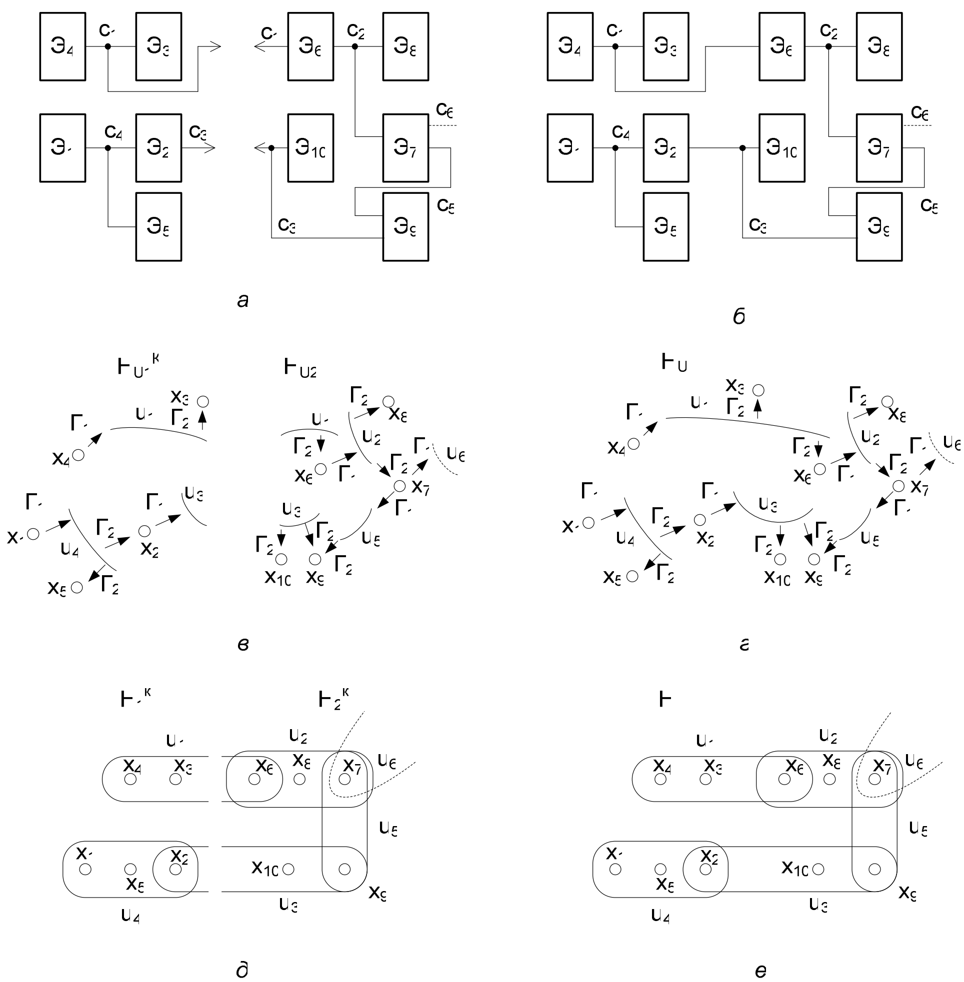


Рисунок 15 – Соединяемые фрагменты (*а*) и полученная схема (*б*), модели фрагментов в виде кусков ультраграфа $H_{U1}{}^{к}$ и $H_{U2}{}^{к}$ (*в*) и ультраграф H_U результата операции (*г*), модели фрагментов в виде кусков гиперграфа $H_1{}^{к}$ и $H_2{}^{к}$(*д*), гиперграф H результата операции (*е*)

Задаются аналитически две части ультраграфа или гиперграфа, например куски $\boldsymbol{H_{U1}{}^{к}}$ $\boldsymbol{(X_1{}^{к}, U_1{}^{к})}$ и $\boldsymbol{H_{U2}{}^{к}}$ $\boldsymbol{(X_2{}^{к}, U_2{}^{к})}$ **или** $\boldsymbol{H_1{}^{к}}$ $\boldsymbol{(X_1{}^{к}, U_1{}^{к})}$ и $\boldsymbol{H_2{}^{к}}$ $\boldsymbol{(X_2{}^{к}, U_2{}^{к})}$. Куски графов (подграфы) могут содержать несколько компонент связности как на рис. 15 кусок ультраграфа $H_{U1}{}^{к}$ или гиперграфа $H_1{}^{к}$. В этом случае множества аналитического задания части графа должны представлять собой конкатенацию соответствующих множеств его компонент связности.

Обозначение операции состоит из символа операции $\cup$, соединяющего имена ее объектов. Например, объединение двух кусков ультраграфа – $H_{U1}{}^{к}$ $(X_1{}^{к}, U_1{}^{к}) \cup H_{U2}{}^{к}$ $(X_2{}^{к}, U_2{}^{к})$ или его куска и подграфа – $H_{U1}{}^{к}$ $(X_1{}^{к}, U_1{}^{к}) \cup H_{U2}$ (X_2, U_2), двух кусков гиперграфа – $H_1{}^{к}$ $(X_1{}^{к}, U_1{}^{к}) \cup H_2{}^{к}$ $(X_2{}^{к}, U_2{}^{к})$ и т. д.

Условие корректности операции: $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing \vee X_1 \cap X_2 = \varnothing$ & $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ (здесь под X_1, X_2, U_1, U_2 следует понимать соответствующие множества объединяемых компонент). В результате выполнения операции получаем одну компоненту связности.

Результат выполнения операции указан в таблице 3. При объединении, например куска и подграфа ультраграфа получим ультраграф

$H_U^{к}(X^{к}, U^{к}) = H_{U1}^{к}(X_1^{к}, U_1^{к}) \cup H_{U2}(X_2, U_2)$.

Общее формальное описание результата операции.

Приведенные ниже формулы получены для общего случая, когда у объединяемых частей графа пересечение множеств вершин не пусто и пересечение множеств рёбер также не пусто и результатом операции является ультра- или гиперграф.

Для ультраграфа $H_U(X, U)$ получим:

$X = X_1 \cup X_2$; $U = U_1 \cup U_2$;

$\Gamma_1 X = \{U_{i1}^{+} \cup U_{i2}^{+} / U_{i1}^{+} = \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X_1, U_{i2}^{+} = \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X_2, x_i \in X\}$;

$\Gamma_2 X = \{U_{i1}^{-} \cup U_{i2}^{-} / U_{i1}^{-} = \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X_1, U_{i2}^{-} = \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X_2, x_i \in X\}$;

$\Gamma_2 U = \{X_{j1}^{+} \cup X_{j2}^{+} / X_{j1}^{+} = \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_1, X_{j2}^{+} = \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_2, u_j \in U\}$;

$\Gamma_1 U = \{X_{j1}^{-} \cup X_{j2}^{-} / X_{j1}^{-} = \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_1, X_{j2}^{-} = \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_2, u_j \in U\}$.

Здесь под X_1, X_2, U_1, U_2 и др. следует понимать соответствующие множества объединяемых компонент для конкретного варианта из рассмотренных в таблице 3. Другие обозначения:

$U_{i1}^{+} = \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X_1$, $U_{i2}^{+} = \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X_2$ и $U_{i1}^{-} = \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X_1$, $U_{i2}^{-} = \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X_2$ – множества рёбер, инцидентных вершине x_i, и рёбер, которым инцидентна эта вершина, в графах H_1 и H_2 соответственно;

$X_{j1}^{+} = \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_1$, $X_{j2}^{+} = \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_2$ и $X_{j1}^{-} = \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_1$, $X_{j2}^{-} = \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_2$ – множества вершин, инцидентных ребру u_j, и вершин, которым инцидентно это ребро, в графах H_1 и H_2 соответственно.

Формальное описание множеств гиперграфа $H(X, U)$:

$X = X_1 \cup X_2$; $U = U_1 \cup U_2$;

$\Gamma_1 X = \{U_{i1} \cup U_{i2} / U_{i1} = \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X_1,\ U_{i2} = \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X_2,\ x_i \in X\}$;

$\Gamma_2 U = \{X_{j1} \cup X_{j2} / X_{j1} = \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_1,\ X_{j2} = \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_2,\ u_j \in U\}$.

В практике автоматизированного проектирования наиболее часто встречающейся процедурой является объединение двух схем, не имеющих общих элементов, внешние цепи которых полностью или частично совпадают. Реализация этой процедуры операцией объединения моделей этих схем в виде ультра- или гиперграфа на основе указанных выше выражений приведет к лишним затратам машинного времени (например $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, а определяется X как $X_1 \cup X_2$). Для таких вариантов целесообразно конкретизировать формальное описание результата операции. Ниже это сделано для операции объединения двух кусков ультраграфа и гиперграфа, у которых
$X_1^{к} \cap X_2^{к} = \varnothing$, $U_1^{к}{}_{ext} = U_2^{к}{}_{ext}$ и $U_1^{к}{}_{int} \cap U_2^{к}{}_{int} = \varnothing$.

Содержательно – формальное описание результата операции

$$\boldsymbol{H_U (X, U) = H_{U1}^{к} (X_1^{к}, U_1^{к}) \cup H_{U2} (X_2^{к}, U_2^{к}).}$$

Для получения ультраграфа $H_U (X, U)$:

1. Определяем множество вершин X, копируя множества $X_1^{к}$ и $X_2^{к}$ и соединяя их, так как по условию $X_1^{к} \cap X_2^{к} = \varnothing$: $X = X_1^{к} \bullet X_2^{к}$.

2. Формируем множество U ребер, занося в него ребра множеств $U_1^{к}{}_{int}$, $U_2^{к}{}_{int}$ и $U_1^{к}{}_{ext}$:

$U = U_1^{к}{}_{int} \bullet U_2^{к}{}_{int} \bullet U_1^{к}{}_{ext}$.

3. Создаем множество образов $\Gamma_1 X$ и прообразов $\Gamma_2 X$ вершин ультраграфа H_U, соединяя при копировании множества $\Gamma_1 X_1^{к}$ и $\Gamma_1 X_2^{к}$ и $\Gamma_2 X_1^{к}$ и $\Gamma_2 X_2^{к}$ соответственно, так как при $X_1^{к} \cap X_2^{к} = \varnothing$, если $\Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X_1^{к}$, то $\Gamma_1 x_i \notin \Gamma_1 X_2^{к}$ и наоборот, и если $\Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X_1^{к}$, то $\Gamma_2 x_i \notin \Gamma_2 X_2^{к}$ и наоборот:

$\Gamma_1 X^{к} = \Gamma_1 X_1^{к} \bullet \Gamma_1 X_2^{к}$, $\Gamma_2 X^{к} = \Gamma_2 X_1^{к} \bullet \Gamma_2 X_2^{к}$.

4. Формируем множество $\Gamma_2 U$ образов рёбер, занося в него:

– образ $\Gamma_2 u_j$ из множества $\Gamma_2 U_1^{к}$ образов куска $H_{U1}^{к}$, если u_j является его внутренним ребром,

– образ $\Gamma_2 u_j$ из множества $\Gamma_2 U_2^к$ образов куска $H_{U2}^к$, если u_j является его внутренним ребром,

– соединение (конкатенацию) множеств, являющихся образамиребра u_j в $\Gamma_2 U_1^к$ и $\Gamma_2 U_2^к$, если оно принадлежит $U_1{}^к{}_{ext} = U_2{}^к{}_{ext}$:

$\Gamma_2 U = \{\Gamma_2 u_j \,/\, u_j \in U\}$, где

$$\Gamma_2 u_j = \begin{cases} \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_1^к, \text{ если } u_j \in U_1{}^к{}_{int}, \\ \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_2^к, \text{ если } u_j \in U_2{}^к{}_{int}, \\ X_{j1}^+ \bullet X_{j2}^+, \text{ если } u_j \in U_1{}^к{}_{ext}, \text{ где } X_{j1}^+ = \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_1^к,\ X_{j1}^+ \subseteq X_1^к, \end{cases}$$

$X_{j2}^+ = \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_2^к$, $X_{j2}^+ \subseteq X_2^к$.

5. Создаем множество $\Gamma_1 U$ прообразов рёбер, занося в него:

– прообраз $\Gamma_1 u_j$ из множества $\Gamma_1 U_1^к$ прообразов куска $H_{U1}^к$, если u_j является его внутренним ребром,

– прообраз $\Gamma_1 u_j$ из множества $\Gamma_1 U_2^к$ прообразов куска $H_{U2}^к$, если u_j является его внутренним ребром,

– соединение (конкатенацию) множеств, являющихся прообразами ребра u_j в $\Gamma_1 U_1^к$ и $\Gamma_1 U_2^к$, если оно принадлежит $U_1{}^к{}_{ext} = U_2{}^к{}_{ext}$:

$\Gamma_1 U = \{\Gamma_1 u_j \,/\, u_j \in U\}$, где

$$\Gamma_1 u_j = \begin{cases} \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_1^к, \text{ если } u_j \in U_1{}^к{}_{int}, \\ \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_2^к, \text{ если } u_j \in U_2{}^к{}_{int}, \\ X_{j1}^- \bullet X_{j2}^-, \text{ если } u_j \in U_1{}^к{}_{ext}, \text{ где } X_{j1}^- = \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_1^к,\ X_{j1}^- \subseteq X_1^к, \end{cases}$$

$X_{j2}^- = \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_2^к$, $X_{j2}^- \subseteq X_2^к$.

10. Определяем множество $F_1 X$ образов вершин относительно предиката смежности $F_1(X, X)$. Для вершины $x_i \in X_1^к \subset X$ копируем её образ из $F_1 X_1^к$, если ей не инцидентно ни одно из внешних ребер куска $H_{U1}^к$, в противном случае к этому образу добавляем вершины, принадлежащие множеству $X_2^к$, которые инцидентны ребрам подмножества $U_i' = \Gamma_1 x_i \cap U_1{}^к{}_{ext}$. Аналогично определяем образы вершин $x_i \in X_2^к \subset X$:

$F_1 X = \{F_1 x_i \,/\, x_i \in X\}$, где

для $x_i \in X_1^к \subset X$:

$$F_1 x_i = \begin{cases} F_1 x_i : \Gamma_1 x_i \cap U_1{}^к{}_{ext} = \varnothing, \end{cases}$$

$\lfloor F_1x_i \bullet \{\bigcup\limits_{u_j \in U_i'} \Gamma_2u_j\} : \Gamma_1x_i \cap U_1{}^{к}{}_{ext} \neq \varnothing$, где $U_i' = \Gamma_1x_i \cap U_1{}^{к}{}_{ext}$,

здесь: $F_1x_i \in F_1X_1{}^{к}$, $\Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_2{}^{к}$, $\Gamma_1x_i \in \Gamma_1X_1{}^{к}$

и для $x_i \in X_2{}^{к} \subset X$:

$$F_1x_i = \begin{cases} F_1x_i : \Gamma_1x_i \cap U_2{}^{к}{}_{ext} = \varnothing, \\ F_1x_i \bullet \{\bigcup\limits_{u_j \in U_i'} \Gamma_2u_j\} : \Gamma_1x_i \cap U_2{}^{к}{}_{ext} \neq \varnothing, \text{ где } U_i' = \Gamma_1x_i \cap U_2{}^{к}{}_{ext}, \end{cases}$$

здесь: $F_1x_i \in F_1X_2{}^{к}$, $\Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_1{}^{к}$, $\Gamma_1x_i \in \Gamma_1X_2{}^{к}$.

11. Формируем множество $F_1{}^{-1}X$ прообразов вершин. Для вершины $x_i \in X_1{}^{к} \subset X$ копируем ёё прообраз из $F_1{}^{-1}X_1{}^{к}$, если она не инцидентна ни одному из внешних рёбер куска $H_1{}^{к}$, в противном случае к этому прообразу добавляем вершины, принадлежащие множеству $X_2{}^{к}$, которым инцидентны рёбра подмножества $U_i' = \Gamma_2x_i \cap U_1{}^{к}{}_{ext}$. Аналогично определяем образы вершин $x_i \in X_2{}^{к} \subset X$:

$F_1{}^{-1}X = \{ F_1{}^{-1}x_i / x_i \in X \}$, где

для $x_i \in X_1{}^{к} \subset X$:

$$F_1{}^{-1}x_i = \begin{cases} F_1{}^{-1}x_i : \Gamma_2x_i \cap U_1{}^{к}{}_{ext} = \varnothing, \\ F_1{}^{-1}x_i \bullet \{\bigcup\limits_{u_j \in U_i'} \Gamma_1u_j\} : \Gamma_2x_i \cap U_1{}^{к}{}_{ext} \neq \varnothing, \text{ где } U_i' = \Gamma_2x_i \cap U_1{}^{к}{}_{ext}, \end{cases}$$

здесь: $F_1{}^{-1}x_i \in F_1{}^{-1}X_1{}^{к}$, $\Gamma_1u_j \in \Gamma_1U_2{}^{к}$, $\Gamma_2x_i \in \Gamma_2X_1{}^{к}$

и для $x_i \in X_2{}^{к} \subset X$:

$$F_1{}^{-1}x_i = \begin{cases} F_1{}^{-1}x_i : \Gamma_2x_i \cap U_2{}^{к}{}_{ext} = \varnothing, \\ F_1{}^{-1}x_i \bullet \{\bigcup\limits_{u_j \in U_i'} \Gamma_1u_j\} : \Gamma_2x_i \cap U_2{}^{к}{}_{ext} \neq \varnothing, \text{ где } U_i' = \Gamma_2x_i \cap U_2{}^{к}{}_{ext}, \end{cases}$$

здесь: $F_1x_i \in F_1X_2{}^{к}$, $\Gamma_1u_j \in \Gamma_1U_1{}^{к}$, $\Gamma_2x_i \in \Gamma_2X_2{}^{к}$.

12. Создаем множество F_2U образов рёбер относительно предиката смежности $F_2(U, U)$, копируя образ F_2u_j из множества образов куска $H_{U1}{}^{к}$, если ребро u_j является внутренним ребром первого куска, или из множества образов куска $H_2{}^{к}$, если ребро u_j является внутренним ребром второго куска.

Если ребро u_j является внешним, то образ получаем конкатенацией его образов в кусках $H_{U1}{}^{к}$ и $H_{U2}{}^{к}$:

$$F_2U = \{F_2u_j \ / \ u_j \in U \}, \text{ здесь}$$

$$F_2u_j = \begin{cases} F_2u_j : u_j \in U_1{}^{к}{}_{int}, F_2u_j \in F_2U_1{}^{к}, \\ F_2u_j : u_j \in U_2{}^{к}{}_{int}, F_2u_j \in F_2U_2{}^{к}, \\ U_{1j}{}^{+} \bullet U_{2j}{}^{+} : u_j \in U_1{}^{к}{}_{ext}, \end{cases}$$

где $U_{1j}{}^{+} = F_2u_j \in F_2U_1{}^{к}$, $U_{1j}{}^{+} \subseteq U_1{}^{к}$, $U_{2j}{}^{+} = F_2u_j \in F_2U_2{}^{к}$, $U_{2j}{}^{+} \subseteq U_2{}^{к}$.

13. Формируем множество $F_2{}^{-1}U$ прообразов рёбер, копируя прообраз $F_2{}^{-1}u_j$ из множества прообразов куска $H_{U1}{}^{к}$, если ребро u_j является внутренним ребром первого куска, или из множества прообразов куска $H_{U2}{}^{к}$, если ребро u_j является внутренним ребром второго куска. Если ребро u_j является внешним, то прообраз получаем конкатенацией его прообразов в кусках $H_{U1}{}^{к}$ и $H_{U2}{}^{к}$:

$$F_2{}^{-1}U = \{F_2{}^{-1}u_j \ / \ u_j \in U \}, \text{ где}$$

$$F_2{}^{-1}u_j = \begin{cases} F_2{}^{-1}u_j : u_j \in U_1{}^{к}{}_{int}, F_2{}^{-1}u_j \in F_2{}^{-1}U_1{}^{к}, \\ F_2{}^{-1}u_j : u_j \in U_2{}^{к}{}_{int}, F_2{}^{-1}u_j \in F_2{}^{-1}U_2{}^{к}, \\ U_{1j}{}^{-} \bullet U_{2j}{}^{-} : u_j \in U_1{}^{к}{}_{ext}, \text{ где } U_{1j}{}^{-} = F_2{}^{-1}u_j \in F_2{}^{-1}U_1{}^{к}, U_{1j}{}^{-} \subseteq U_1{}^{к}, \end{cases}$$

$U_{2j}{}^{-} = F_2{}^{-1}u_j \in F_2{}^{-1}U_2{}^{к}$, $U_{2j}{}^{-} \subseteq U_2{}^{к}$.

Формальное описание результата операции в виде гиперграфа H (X, U, Γ_1X, Γ_2U) при $X_1{}^{к} \cap X_2{}^{к} = \varnothing$, $U_1{}^{к}{}_{int} \cap U_2{}^{к}{}_{int} = \varnothing$ и $U_1{}^{к}{}_{ext} = U_2{}^{к}{}_{ext}$:

$X = X_1{}^{к} \bullet X_2{}^{к}$; $U = U_1{}^{к}{}_{int} \bullet U_2{}^{к}{}_{int} \bullet U_1{}^{к}{}_{ext}$;

$\Gamma_1X = \Gamma_1X_1{}^{к} \bullet \Gamma_1X_2{}^{к}$;

$\Gamma_2U = \{\Gamma_2u_j / u_j \in U\}$, где

$$\Gamma_2u_j = \begin{cases} \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_1{}^{к}, \text{ если } u_j \in U_1{}^{к}{}_{int}, \\ \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_2{}^{к}, \text{ если } u_j \in U_2{}^{к}{}_{int}, \\ X_{j1} \bullet X_{j2}, \text{ если } u_j \in U_1{}^{к}{}_{ext}, \text{ где } X_{j1} = \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_1{}^{к}, X_{j2} = \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_2{}^{к}; \end{cases}$$

$F_1X = \{ F_1x_i / x_i \in X \}$, где

$$F_1x_i = \begin{cases} F_1x_i : \Gamma_1x_i \cap U_1{}^{к}{}_{ext} = \varnothing, \\ F_1x_i \bullet \{\bigcup\limits_{u_j \in U_i'} \{\Gamma_2u_j \setminus x_i \}\} : \Gamma_1x_i \cap U_1{}^{к}{}_{ext} \neq \varnothing, \text{ где } U_i' = \Gamma_1x_i \cap U_1{}^{к}{}_{ext}, \end{cases}$$

здесь: $F_1x_i \in \{F_1X_1^к, F_1X_2^к\}$, $\Gamma_1x_i \in \{\Gamma_1X_1^к, \Gamma_1X_2^к\}$, $\Gamma_2u_j \in \{\Gamma_2U_1^к, \Gamma_2U_2^к\}$;

$F_2U = \{F_2u_j \,/\, u_j \in U\}$, здесь

$$F_2u_j = \begin{cases} F_2u_j : u_j \in U_1{}^к{}_{int} \vee u_j \in U_2{}^к{}_{int}, \text{ где } F_2u_j \in \{F_2U_1^к, F_2U_2^к\}, \\ U_{1j} \bullet U_{2j} : u_j \in U_1{}^к{}_{ext}, \text{ где } U_{1j} = F_2u_j \in F_2U_1^к, U_{2j} = F_2u_j \in F_2U_2^к. \end{cases}$$

Формальное описание результата операции в виде куска ультраграфа $H_U^к$ ($X^к$, $U^к$).

Кусок ультраграфа получим, если $U_1{}^к{}_{ext} \neq U_2{}^к{}_{ext}$. Так как по условию $X_1^к \cap X_2^к = \varnothing$, $U_1{}^к{}_{int} \cap U_2{}^к{}_{int} = \varnothing$, множества вершин, их образов и прообразов относительно предиката инцидентности $\Gamma_1(X, U)$ куска ультраграфа определяются по тем же формулам, что и для ультраграфа H_U. Остальные множества получаем по формулам:

$U^к = U_1{}^к{}_{int} \bullet U_2{}^к{}_{int} \bullet \{U_1{}^к{}_{ext} \cup U_1{}^к{}_{ext}\}$, $U^к{}_{ext} = U_1{}^к{}_{ext} \,\Delta\, U_2{}^к{}_{ext}$,

$U^к{}_{int} = U_1{}^к{}_{int} \bullet U_2{}^к{}_{int}$;

$\Gamma_2U^к = \{\Gamma_2u_j \,/\, u_j \in U^к\}$, здесь

$$\Gamma_2u_j = \begin{cases} \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_1^к : u_j \in U_1{}^к{}_{int} \vee (u_j \in U_1{}^к{}_{ext} \;\&\; u_j \notin U_2{}^к{}_{ext}), \\ \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_2^к : u_j \in U_2{}^к{}_{int} \vee (u_j \in U_2{}^к{}_{ext} \;\&\; u_j \notin U_1{}^к{}_{ext}), \\ X_{j1}{}^+ \bullet X_{j2}{}^+ : u_j \in \{U_1{}^к{}_{ext} \cap U_2{}^к{}_{ext}\}, \end{cases}$$

где $X_{j1}{}^+ = \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_1^к$, $X_{j2}{}^+ = \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_2^к$;

$\Gamma_1U^к = \{\Gamma_1u_j \,/\, u_j \in U^к\}$, здесь

$$\Gamma_1u_j = \begin{cases} \Gamma_1u_j \in \Gamma_1U_1^к : u_j \in U_1{}^к{}_{int} \vee (u_j \in U_1{}^к{}_{ext} \;\&\; u_j \notin U_2{}^к{}_{ext}), \\ \Gamma_1u_j \in \Gamma_1U_2^к : u_j \in U_2{}^к{}_{int} \vee (u_j \in U_2{}^к{}_{ext} \;\&\; u_j \notin U_1{}^к{}_{ext}), \\ X_{j1}{}^- \bullet X_{j2}{}^- : u_j \in \{U_1{}^к{}_{ext} \cap U_2{}^к{}_{ext}\}, \end{cases}$$

где $X_{j1}{}^- = \Gamma_1u_j \in \Gamma_1U_1^к$, $X_{j2}{}^- = \Gamma_1u_j \in \Gamma_1U_2^к$;

$F_1X = \{F_1x_i / x_i \in X\}$, здесь

$$F_1x_i = \begin{cases} F_1x_i : \Gamma_1x_i \cap U_{ext}{}^п = \varnothing, \text{ где } U_{ext}{}^п = U_1{}^к{}_{ext} \cap U_2{}^к{}_{ext}, \\ F_1x_i \bullet \{\bigcup\limits_{u_j \in U_{ext}{}^п} \Gamma_2u_j\} : \Gamma_1x_i \cap U_{ext}{}^п \neq \varnothing, \end{cases}$$

$F_1x_i \in \{F_1X_1^к, F_1X_2^к\}$, $\Gamma_2u_j \in \{\Gamma_2U_1^к, \Gamma_2U_2^к\}$, $\Gamma_1x_i \in \{\Gamma_1X_1^к, \Gamma_1X_1^к\}$;

$F_1^{-1}X = \{F_1^{-1}x_i \,/\, x_i \in X\}$, здесь

$$F_1^{-1}x_i = \begin{cases} F_1^{-1}x_i : \Gamma_2 x_i \cap U_{ext}^{п} = \varnothing, \\ F_1^{-1}x_i \bullet \{\bigcup\limits_{u_j \in U_{ext}^{п}} \Gamma_1 u_j\} : \Gamma_2 x_i \cap U_{ext}^{п} \neq \varnothing, \end{cases}$$

где $U_{ext}^{п}$ то же, что и выше, $F_1^{-1}x_i \in \{F_1^{-1}X_1^{к}, F_1^{-1}X_2^{к}\}$, $\Gamma_1 u_j \in \{\Gamma_1 U_1^{к}, \Gamma_1 U_2^{к}\}$, $\Gamma_2 x_i \in \{\Gamma_2 X_1^{к}, \Gamma_2 X_1^{к}\}$;

$F_2U^{к} = \{F_2u_j \,/\, u_j \in U^{к}\}$, здесь

$$F_2u_j = \begin{cases} F_2u_j : u_j \notin U_{ext}^{п}, \text{ где } F_2u_j \in \{F_2U_1^{к}, F_2U_1^{к}\}, \\ U_{1j}^{+} \bullet U_{2j}^{+} : u_j \in U_{ext}^{п}, \end{cases}$$

где $U_{ext}^{п}$ – то же, что и выше, $U_{1j}^{+} = F_2u_j \in F_2U_1^{к}$, $U_{2j}^{+} = F_2u_j \in F_2U_2^{к}$;

$F_2^{-1}U^{к} = \{F_2^{-1}u_j \,/\, u_j \in U^{к}\}$, здесь

$$F_2^{-1}u_j = \begin{cases} F_2^{-1}u_j : u_j \notin U_{ext}^{п}, \text{ где } F_2^{-1}u_j \in F_2^{-1}U_1^{к}, F_2^{-1}U_1^{к}\}, \\ U_{1j}^{-} \bullet U_{2j}^{-} : u_j \in U_{ext}^{п}, \end{cases}$$

где $U_{ext}^{п}$ – то же, что и выше, $U_{1j}^{-} = F_2^{-1}u_j \in F_2^{-1}U_1^{к}$, $U_{2j}^{-} = F_2^{-1}u_j \in F_2^{-1}U_2^{к}$.

Формальное описание результата операции в виде куска гиперграфа $H^{к}(X^{к}, U^{к})$ при $X_1^{к} \cap X_2^{к} = \varnothing$, $U_1^{к}{}_{int} \cap U_2^{к}{}_{int} = \varnothing$ и $U_1^{к}{}_{ext} \neq U_2^{к}{}_{ext}$.

Множества вершин и их образов относительно предиката инцидентности $\Gamma_1(X^{к}, X^{к})$ куска гиперграфа определяются по тем же формулам, что и для гиперграфа H. Остальные множества получаем по формулам:

$U^{к} = U_1^{к}{}_{int} \bullet U_2^{к}{}_{int} \bullet \{U_1^{к}{}_{ext} \cup U_1^{к}{}_{ext}\}$,

$U^{к}_{ext} = U_1^{к}{}_{ext} \,\Delta\, U_2^{к}{}_{ext}$, $U^{к}_{int} = U_1^{к}{}_{int} \bullet U_2^{к}{}_{int}$;

$\Gamma_2U^{к} = \{\Gamma_2u_j \,/\, u_j \in U^{к}\}$, здесь

$$\Gamma_2u_j = \begin{cases} \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_1^{к} : u_j \in U_1^{к}{}_{int} \vee (u_j \in U_1^{к}{}_{ext} \,\&\, u_j \notin U_2^{к}{}_{ext}), \\ \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_2^{к} : u_j \in U_2^{к}{}_{int} \vee (u_j \in U_2^{к}{}_{ext} \,\&\, u_j \notin U_1^{к}{}_{ext}), \\ X_{j1} \bullet X_{j2} : u_j \in U_{ext}^{п}, \end{cases}$$

где $U_{ext}^{п} = U_1^{к}{}_{ext} \cap U_2^{к}{}_{ext}$, $X_{j1} = \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_1^{к}$, $X_{j2} = \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_2^{к}$;

$F_1X = \{F_1x_i \,/\, x_i \in X^{к}\}$, здесь

$$F_1x_i = \begin{cases} F_1x_i : \Gamma_1 x_i \cap U_{ext}{}^{\text{п}} = \varnothing, \\ F_1x_i \bullet \cup \{\Gamma_2 u_j \setminus x_i\} : \Gamma_1 x_i \cap U_{ext}{}^{\text{п}} \neq \varnothing, \\ \quad u_j \in U_{ext}{}^{\text{п}} \end{cases}$$

где $U_{ext}{}^{\text{п}}$ – то же, что и выше, $F_1x_i \in \{F_1X_1{}^{\text{к}}, F_1X_2{}^{\text{к}}\}$, $\Gamma_2 u_j \in \{\Gamma_2 U_1{}^{\text{к}}, \Gamma_2 U_2{}^{\text{к}}\}$, $\Gamma_1 x_i \in \{\Gamma_1 X_1{}^{\text{к}}, \Gamma_1 X_1{}^{\text{к}}\}$;

$F_2U^{\text{к}} = \{F_2u_j / u_j \in U^{\text{к}}\}$, здесь

$$F_2u_j = \begin{cases} F_2u_j : u_j \notin U_{ext}{}^{\text{п}}, \text{ где } F_2u_j \in \{F_2U_1{}^{\text{к}}, F_2U_1{}^{\text{к}}\}, \\ U_{1j} \bullet U_{2j} : u_j \in U_{ext}{}^{\text{п}}, \end{cases}$$

где $F_2u_j \in \{F_2U_1{}^{\text{к}}, F_2U_1{}^{\text{к}}\}$, $U_{ext}{}^{\text{п}}$ – то же, что и выше, $U_{1j} = F_2u_j \in F_2U_1{}^{\text{к}}$, $U_{2j} = F_2u_j \in F_2U_2{}^{\text{к}}$.

Асимптотическая оценка вычислительной сложности данной операции, если результатом является ультраграф H_U или гиперграф H, равна $O(m \cdot n)$ при $n > m$ или $O(m^2)$ при $m > n$.

Пример. Результатом операции объединения двух кусков ультраграфа $H_{U1}{}^{\text{к}}$ $(X_1{}^{\text{к}}, U_1{}^{\text{к}})$ и $H_{U2}{}^{\text{к}}$ $(X_2{}^{\text{к}}, U_2{}^{\text{к}})$, изображенных на рис. 15, *в* , если считать, что у куска $H_{U2}{}^{\text{к}}$ нет ребра u_6, будет ультраграф H_U (X, U), показанный на рис.15, *г*, так как $U_1{}^{\text{к}}{}_{ext} = U_2{}^{\text{к}}{}_{ext} = \{u_1, u_3\}$. В соответствии с приведенными выше выражениями получим:

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{10}\}$; $U = \{u_4\} \bullet \{u_2, u_5\} \bullet \{u_1, u_3\} = \{u_4, u_2, u_5, u_1, u_3\}$;

$\Gamma_1 X$: $\Gamma_1 x_1 = \{u_4\}$, $\Gamma_1 x_2 = \{u_3\}$, $\Gamma_1 x_3 = \varnothing$, $\Gamma_1 x_4 = \{u_1\}$, $\Gamma_1 x_5 = \varnothing$, $\Gamma_1 x_6 = \{u_2\}$, $\Gamma_1 x_7 = \{u_5\}$, $\Gamma_1 x_8 = \Gamma_1 x_9 = \Gamma_1 x_{10} = \varnothing$;

$\Gamma_2 X$: $\Gamma_2 x_1 = \varnothing$, $\Gamma_2 x_2 = \{u_4\}$, $\Gamma_2 x_3 = \{u_1\}$, $\Gamma_2 x_4 = \varnothing$, $\Gamma_2 x_5 = \{u_4\}$, $\Gamma_2 x_6 = \{u_1\}$, $\Gamma_2 x_7 = \Gamma_2 x_8 = \varnothing$, $\Gamma_1 x_9 = \{u_3, u_5\}$, $\Gamma_1 x_{10} = \{u_3\}$;

$\Gamma_2 U$: $\Gamma_2 u_4 = \{x_2, x_5\}$, $\Gamma_2 u_2 = \{x_7, x_8\}$, $\Gamma_2 u_5 = \{x_9\}$, $\Gamma_2 u_1 = \{x_3\} \bullet \{x_6\} = \{x_3, x_6\}$, $\Gamma_2 u_3 = \varnothing \bullet \{x_9, x_{10}\} = \{x_9, x_{10}\}$;

$\Gamma_1 U$: $\Gamma_1 u_4 = \{x_1\}$, $\Gamma_1 u_2 = \{x_6\}$, $\Gamma_1 u_5 = \{x_7\}$, $\Gamma_1 u_1 = \{x_4\} \bullet \varnothing = \{x_4\}$, $\Gamma_1 u_3 = \{x_2\} \bullet \varnothing = \{x_2\}$;

F_1X: $F_1x_1 = \{x_2, x_5\}$, $F_1x_2 = \varnothing \bullet \Gamma_2u_3 = \{x_9, x_{10}\}$, $F_1x_3 = \varnothing$, $F_1x_4 = \{x_3\} \bullet \Gamma_2u_1 = \{x_3, x_6\}$, $F_1x_5 = \varnothing$, $F_1x_6 = \{x_7, x_8\}$, $F_1x_7 = \{x_9\}$, $F_1x_8 = F_1x_9 = F_1x_{10} = \varnothing$;

$F_1^{-1}X$: $F_1^{-1}x_1 = \varnothing$, $F_1^{-1}x_2 = \{x_1\}$, $F_1^{-1}x_3 = \{x_4\} \bullet \varnothing = \{x_4\}$, $F_1^{-1}x_4 = \varnothing$, $F_1^{-1}x_5 = \{x_1\}$, $F_1^{-1}x_6 = \varnothing \bullet \{x_4\} = \{x_4\}$, $F_1^{-1}x_7 = F_1^{-1}x_8 = \{x_6\}$, $F_1^{-1}x_9 = F_1^{-1}x_{10} = \varnothing \bullet \Gamma_1u_3 = \{x_2\}$;

F_2U: $F_2u_4 = \{u_3\}$, $F_2u_2 = \{u_5\}$, $F_2u_5 = \varnothing$, $F_2u_1 = \varnothing \bullet \{u_2\} = \{u_2\}$, $F_2u_3 = \varnothing$;

$F_2^{-1}U$: $F_2^{-1}u_4 = \varnothing$, $F_2^{-1}u_2 = \{u_1\}$, $F_2^{-1}u_5 = \{u_2\}$, $F_2^{-1}u_1 = \varnothing$, $F_2^{-1}u_3 = \{u_4\} \bullet \varnothing = \{u_4\}$.

При объединении кусков гиперграфа, показанных на рис. 15, *д*, (считаем, что у куска $H_2^{к}$ нет ребра u_6), получаем в результате операции
$H\ (X, U, \Gamma_1X, \Gamma_2U) = H_1^{к}\ (X_1^{к}, U_1^{к}, \Gamma_1X_1^{к}, \Gamma_2U_1^{к}) \cup H_2^{к}\ (X_2^{к}, U_2^{к}, \Gamma_1X_2^{к}, \Gamma_2U_2^{к})$, гиперграф $H\ (X, U, \Gamma_1X, \Gamma_2U)$, у которого:

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{10}\}$; $U = \{u_4, u_2, u_5, u_1, u_3\}$;

Γ_1X: $\Gamma_1x_1 = \Gamma_1x_5 = \{u_4\}$, $\Gamma_1x_2 = \{u_3, u_4\}$, $\Gamma_1x_3 = \Gamma_1x_4 = \{u_1\}$, $\Gamma_1x_6 = \{u_1, u_2\}$, $\Gamma_1x_7 = \{u_2, u_5\}$, $\Gamma_1x_8 = \{u_2\}$, $\Gamma_1x_9 = \{u_3, u_5\}$, $\Gamma_1x_{10} = \{u_3\}$;

Γ_2U: $\Gamma_2u_4 = \{x_1, x_2, x_5\}$, $\Gamma_2u_2 = \{x_6, x_7, x_8\}$, $\Gamma_2u_5 = \{x_7, x_9\}$, $\Gamma_2u_1 = \{x_3, x_4\} \bullet \{x_6\} = \{x_3, x_4, x_6\}$, $\Gamma_2u_3 = \{x_2\} \bullet \{x_9, x_{10}\} = \{x_2, x_9, x_{10}\}$.

Объединение кусков, изображенных на рис. 15, *д*, если у куска $H_2^{к}$ будет ребро u_6, дает кусок гиперграфа $H^{к}\ (X^{к}, U^{к}, \Gamma_1X^{к}, \Gamma_2U^{к})$, у которого:

$X^{к} = X$; $U^{к} = \{u_4, u_2, u_5, u_1, u_3, u_6\}$– в куске $H_2^{к}$ появилось внешнее ребро u_6; в $\Gamma_1X^{к}$ по сравнению с Γ_1X изменится образ вершины $x_7 - \Gamma_1x_7 = \{u_2, u_5, u_6\}$ и в $\Gamma_2U^{к}$ по сравнению с Γ_2U появится образ ребра $u_6 - \Gamma_2u_6 = \{x_7\}$. Множество внешних ребер куска $U^{к}_{ext} = \{u_1, u_3\}\ \Delta\ \{u_1, u_3, u_6\} = \{u_6\}$, множество внутренних ребер очевидно.

Пересечение ультраграфов H_{U1} и H_{U2} или гиперграфов H_1 и H_2 – рис. 16. Реализует проектную операцию проверки идентичности двух представлений схемы или определения одинаковых частей схем при совпадающих идентификаторах их элементов и цепей.

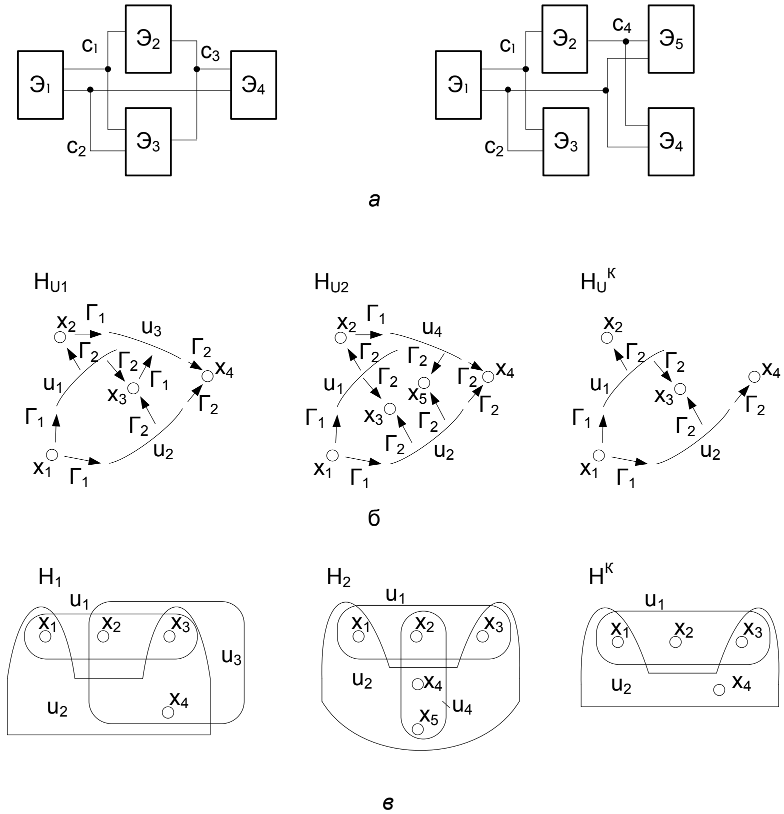


Рисунок 16 – Фрагменты схем *а*, их модели в виде ультраграфов H_{U1} и H_{U2} и результат H_U операции их пересечения (*б*); модели фрагментов в виде гиперграфов H_1 и H_2 и результат H операции их пересечения (*в*)

Задаются в аналитической форме два ультраграфа H_{U1} и H_{U2} или гиперграфа H_1 и H_2.

Обозначение операции: $H_{U1}\ (X_1, U_1) \cap H_{U2}\ (X_2, U_2)$ для ультраграфов и

$H_1\ (X_1, U_1) \cap H_2\ (X_2, U_2)$ для гиперграфов.

Условие корректности операции $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$, $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, а также:

– для ультраграфа $\exists\, u_j \in \{U_1 \cap U_2\}\ (X_{j1}^{+} \cap X_{j2}^{+} \neq \varnothing \vee X_{j1}^{-} \cap X_{j2}^{-} \neq \varnothing)$,

где аналогично операции объединения частей графов $X_{j1}^{+} = \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_1$ и $X_{j2}^{+} = \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_2$ вершины, инцидентные ребру u_j в ультраграфе H_{U1} и H_{U2} соответственно, $X_{j1}^{-} = \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_1$ и $X_{j2}^{-} = \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_2$ вершины, которым инцидентно ребро u_j в ультраграфе H_{U1} и H_{U2} соответственно,

– для гиперграфа $\exists\, u_j \in \{U_1 \cap U_2\}\ (X_{j1} \cap X_{j2} \neq \varnothing)$, где $X_{j1} = \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_1$, $X_{j2} = \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_2$.

Результатом выполнения операции может быть ультраграф, кусок ультраграфа или несколько компонент связности: ультраграфы, куски ультраграфов, их сочетание (сказанное справедливо и по отношению к гиперграфам). Полагая отдельной задачу определения количества компонент связности, дадим описание операции для одной компоненты в виде ультраграфа $H_U (X, U)$ или его куска $H_U^{\text{к}} (X^{\text{к}}, U^{\text{к}}, \Gamma_1 X^{\text{к}}, \Gamma_2 U^{\text{к}})$, а также гиперграфа $H (X, U)$ или его куска $H^{\text{к}} (X^{\text{к}}, U^{\text{к}}, \Gamma_1 X^{\text{к}}, \Gamma_2 U^{\text{к}})$.

В результате выполнеия операции получим:

– ультраграф $H_U (X, U) = H_{U1} (X_1, U_1) \cap H_{U2} (X_2, U_2)$, если

$\forall u_j \in \{U_1 \cap U_2\} (X_{j1}^+ = X_{j2}^+ \ \& \ X_{j1}^- = X_{j2}^-)$ (16),

– кусок ультраграфа $H_U^{\text{к}} (X^{\text{к}}, U^{\text{к}}) = H_{U1} (X_1, U_1) \cap H_{U2} (X_2, U_2)$, если

$\exists\, u_j \in \{U_1 \cap U_2\} (X_{j1}^+ \neq X_{j2}^+ \vee X_{j1}^- \neq X_{j2}^-)$, где X_{j1}^+, X_{j2}^+, X_{j1}^-, X_{j2}^- то же, что и выше;

– гиперграф $H (X, U) = H_1 (X_1, U_1) \cap H_2 (X_2, U_2)$, если

$\forall\, u_j \in \{U_1 \cap U_2\} (X_{j1} = X_{j2})$,

– кусок гиперграфа $H^{\text{к}} (X^{\text{к}}, U^{\text{к}}) = H_1 (X_1, U_1) \cap H_2 (X_2, U_2)$, если

$\exists\, u_j \in \{U_1 \cap U_2\} (X_{j1} \neq X_{j2})$, где X_{j1} и X_{j2} – то же, что и выше.

Содержательно – формальное описание результата операции над ультраграфами H_{U1} (X_1, U_1) и H_{U2} (X_2, U_2).

Для получения множеств ультраграфа H_U (X, U):

1. Определяем множества вершин X и ребер U, находя общие элементы множеств X_1, X_2 и U_1, U_2 соответственно:

$X = X_1 \cap X_2$; $U = U_1 \cap U_2$.

2. Создаем множества образов $\Gamma_1 X$ и прообразов $\Gamma_2 X$ вершин ультраграфа, занося в образ и прообраз каждой вершины общие ребра ее образов и прообразов в ультраграфах H_{U1} и H_{U2}:

$\Gamma_1 X = \{\Gamma_1 x_i = U_{i1}^+ \cap U_{i2}^+ / x_i \in X, U_{i1}^+ = \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X_1, U_{i2}^+ = \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X_2\}$;

$\Gamma_2 X = \{\Gamma_2 x_i = U_{i1}^- \cap U_{i2}^- / x_i \in X, U_{i1}^- = \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X_1, U_{i2}^- = \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X_2\}$, где аналогично операции объединения частей графа $U_{i1}^{+} = \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X_1$, $U_{i2}^{+} = \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X_2$ и $U_{i1}^{-} = \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X_1$, $U_{i2}^{-} = \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X_2$ – множества ребер, инцидентных вершине x_i, и множества ребер, которым инцидентна этавершина, в ультраграфах H_{U1} и H_{U2} соответственно.

3. Формируем множество образов $\Gamma_2 U$ и прообразов $\Gamma_1 U$ рёбер, определяя общие вершины их образов и прообразов соответственно в ультраграфах H_{U1} и H_{U2}:

$\Gamma_2 U = \{X_{j1}^{+} \cap X_{j2}^{+} / u_j \in U\}$, где X_{j1}^{+} и X_{j2}^{+} – то же, что и выше;

$\Gamma_1 U = \{X_{j1}^{-} \cap X_{j2}^{-} / u_j \in U, \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_1\}$,где X_{j1}^{-} и X_{j2}^{-}– то же, что и выше.

4. Находим образы $F_1 x_i$ вершин как объединение общих вершин образов рёбер, инцидентных вершине x_i как в ультраграфе H_{U1}, так и в ультраграфе H_{U2}:

$F_1 X = \{ \bigcup\limits_{u_j \in U_i^{п+}} X_{j1}^{+} \cap X_{j2}^{+} / x_i \in X \}$, где $U_i^{п+} = U_{i1}^{+} \cap U_{i2}^{+}$ и U_{i1}^{+}, U_{i2}^{+}, X_{j1}^{+}, X_{j2}^{+} – то же, что и выше.

5. Определяем прообразы $F_1^{-1} x_i$ вершин как объединение общих вершин прообразов ребер, котрым инцидентна вершина x_i как в ультраграфе H_{U1}, так и в ультраграфе H_{U2}:

$F_1^{-1} X = \{ \bigcup\limits_{u_j \in U_i^{п-}} X_{j1}^{-} \cap X_{j2}^{-} / x_i \in X\}$, где $U_i^{п-} = U_{i1}^{-} \cap U_{i2}^{-}$ и U_{i1}^{-}, U_{i2}^{-}, X_{j1}^{-}, X_{j2}^{-} – то же, что и выше.

6. Формируем образы $F_2 u_j$ рёбер как объединение общих ребер образов вершин, инцидентных ребру u_j как в ультраграфе H_{U1}, так и в ультраграфе H_{U2}:

$F_2 U = \{ \bigcup\limits_{x_i \in X_j^{п+}} U_{i1}^{+} \cap U_{i2}^{+} / u_j \in U\}$, где $X_j^{п+} = X_{i1}^{+} \cap X_{i2}^{+}$ и X_{j1}^{+}, X_{j2}^{+}, U_{i1}^{+}, U_{i2}^{+} – то же, что и выше.

7. Находим прообразы $F_2^{-1} u_j$ как объединение общих рёбер прообразов вершин, которым инцидентно ребро u_j как в ультраграфе H_{U1}, так и в ультраграфе H_{U2}:

$$F_2^{-1}U = \{ \bigcup_{x_i \in X_j^{п-}} U_{i1}^- \cap U_{i2}^- / u_j \in U\},$$ где $X_j^{п-} = X_{i1}^- \cap X_{i2}^-$ и X_{j1}^-, X_{j2}^-, U_{i1}^-, U_{i2}^- – то же, что и выше.

Кусок ультраграфа $H_U^к$ ($X^к$, $U^к$). Множества вершин, ребер, их образов и прообразов куска ультраграфа определяются по тем же формулам, что и для ультраграфа H_U (X, U). В множество внутренних $U^к_{int}$ ребер куска включаем те его ребра, у которых совпадают образы и прообразы в ультраграфах H_{U1} и H_{U2}. Множество внешних $U^к_{ext}$ ребер определяем, исключая внутренние из $U^к$.

$U^к_{int} = \{u_j \in U : X_{j1}^+ = X_{j2}^+ \ \&\ X_{j1}^- = X_{j2}^-\}$, где X_{j1}^+, X_{j2}^+, X_{j1}^-, X_{j2}^- – то же, что и выше, $U^к_{ext} = U^к \setminus U^к_{int}$.

Формальное описание результата выполнения операции над гиперграфами H_1 (X_1, U_1) и H_{U2} (X_2, U_2).

Гиперграф H (X, U):

$X = X_1 \cap X_2$; $U = U_1 \cap U_2$;

$\Gamma_1X = \{\Gamma_1x_i = U_{i1} \cap U_{i2} / x_i \in X, U_{i1} = \Gamma_1x_i \in \Gamma_1X_1, U_{i2} = \Gamma_1x_i \in \Gamma_1X_2\}$;

$\Gamma_2U = \{X_{j1} \cap X_{j2} / u_j \in U\}$, где X_{j1} и X_{j2} – то же, что и выше;

$$F_1X = \{ \bigcup_{u_j \in U_i^п} X_{j1}' \cap X_{j2}' / x_i \in X \},$$ где $U_i^п = U_{i1} \cap U_{i2}$ и U_{i1}, U_{i2} – то же, что и выше, и $X_{j1}' = \{\Gamma_2u_j \setminus x_i : |\Gamma_2u_j| > 1 \vee \Gamma_2u_j : |\Gamma_2u_j| = 1\}$, $\Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_1$,

$X_{j2}' = \{\Gamma_2u_j \setminus x_i : |\Gamma_2u_j| > 1 \vee \Gamma_2u_j : |\Gamma_2u_j| = 1\}$, $\Gamma_2u_j \in \Gamma_2 U_2$;

$$F_2U = \{ \bigcup_{x_i \in X_j^п} U_{i1}' \cap U_{i2}' / u_j \in U\},$$ где $X_j^п = X_{i1} \cap X_{i2}$ и X_{j1}, X_{j2}– то же, что и выше, и $U_{i1}' = \{\Gamma_1x_i \setminus u_j : |\Gamma_2u_j| > 1 \vee \Gamma_1x_i : |\Gamma_2u_j| = 1\}$, $\Gamma_1x_i \in \Gamma_1X_1$,

$U_{i2}' = \{\Gamma_1x_i \setminus u_j : |\Gamma_2u_j| >1 \vee \Gamma_1x_i : |\Gamma_2u_j| = 1\}$, $\Gamma_1x_i \in \Gamma_1X_2$.

Кусок гиперграфа $H^к$ ($X^к$, $U^к$). Множества вершин, ребер и образов вершин куска гиперграфа определяются по тем же формулам, что и для гиперграфа ***H*** (***X***, ***U***). Множества внутренних и внешних ребер будут:

$U^к_{int} = \{u_j \in U : X_{j1} = X_{j2} / X_{j1} = \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_1, X_{j1} = \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_2\}$,

$U^к_{ext} = U^к \setminus U^к_{int}$.

Асимптотическая оценка вычислительной сложности операции для ультра- и гиперграфов равна:

- *в худшем* $O(m^2 \cdot n)$ *,если* $|U_{i1}^+|$ *и* $|U_{i2}^+|$ *или* $|U_{i1}^-|$ *и* $|U_{i2}^-|$ *ограничены* m*;*
- *в лучшем* $O(n^2)$ *при* $n > m$ *и* $O(m^2)$ *при* $m > n$*, если* $|U_{i1}^+|$*,* $|U_{i2}^+|$*,* $|U_{i1}^-|$ *и* $|U_{i2}^-|$ *ограничены константой.*

Объектами операции могут быть два куска или кусок и подграф ультраграфа или гиперграфа.

При пересечении кусков ультраграфа $H_{U1}^к$ $(X_1^к, U_1^к)$ и $H_{U2}^к$ $(X_2^к, U_2^к)$ результатом будет подграф, если $U_1^к{}_{ext} \cap U_2^к{}_{ext} = \varnothing$ и выполняется условие (16), в котором $X_{j1}^+ = \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_1^к$, $X_{j2}^+ = \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_2^к$, $X_{j1}^- = \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_1^к$ и $X_{j2}^- = \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_2^к$. В противном случае результатом будет кусок ультраграфа, у которого

$U^к{}_{int} = \{u_j \in U^к : X_{j1}^+ = X_{j2}^+ \ \&\ X_{j1}^- = X_{j2}^- \ \&\ u_j \notin U_1^к{}_{ext} \ \&\ u_j \notin U_2^к{}_{ext}\}$ и

$U^к{}_{ext} = U^к \setminus U^к{}_{int}$.

При пересечении куска $H_{U1}^к$ $(X_1^к, U_1^к)$ и подграфа H_{U2} (X_2, U_2) ультраграфа результатом будет подграф, если $U_1^к{}_{ext} \cap U_2 = \varnothing$ и выполняется условие (16), в котором $X_{j1}^+ = \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_1^к$, $X_{j2}^+ = \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U_2$, $X_{j1}^- = \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_1^к$ и $X_{j2}^- = \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U_2$. В противном случае результатом будет кусок ультраграфа, у которого

$U^к{}_{int} = \{u_j \in U^к : u_j \notin U_1^к{}_{ext} \ \&\ X_{j1}^+ = X_{j2}^+ \ \&\ X_{j1}^- = X_{j2}^-\}$ и

$U^к{}_{ext} = U^к \setminus U^к{}_{int}$.

Автор надеется, что читатель сможет самостоятельно распространить эти выкладки на соответсвующие части гиперграфа.

Пример. Определим совпадающие части двух схем, изображенных на рис. 16, *а*. При представлении схем ультраграфами H_{U1} и H_{U2}, показанными на рис.16, *б*, результатом операции H_{U1} $(X_1, U_1) \cap H_{U2}$ (X_2, U_2) будет кусок ультраграфа $H_U^к$, так как в H_{U1} образ ребра u_2 – $\Gamma_2 u_2 = \{x_3, x_4\}$, а в H_{U2} – $\Gamma_2 u_2 = \{x_3, x_4, x_5\}$. Используя приведенные выше формулы, получим следующие множества аналитического представления куска ультраграфа $H_U^к$:

$X^{к} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \cap \{x_1, x_2, .., x_5\} = \{x_1, x_2, . . ., x_4\}$;

$U^{к} = \{u_1, u_2, u_3\} \cap \{u_1, u_2, u_4\} = \{u_1, u_2\}$, $U^{к}{}_{int} = \{u_1\}$, $U^{к}{}_{ext} = \{u_2\}$;

$\Gamma_1 X^{к} : \Gamma_1 x_1 = \{u_1, u_2\} \cap \{u_1, u_2\} = \{u_1, u_2\}$, $\Gamma_1 x_2 = \{u_3\} \cap \{u_4\} = \varnothing$, $\Gamma_1 x_3 = \{ u_3\} \cap \varnothing = \varnothing$, $\Gamma_1 x_4 = \varnothing$;

$\Gamma_2 X^{к} : \Gamma_2 x_1 = \varnothing$, $\Gamma_2 x_2 = \{u_1\} \cap \{u_1\} = \{u_1\}$, $\Gamma_1 x_3 = \{u_1, u_2\} \cap \{u_1, u_2\} = \{u_1, u_2\}$, $\Gamma_1 x_4 =\{u_2, u_3\} \cap \{u_2, u_4\} = \{u_2\}$;

$\Gamma_2 U^{к} : \Gamma_2 u_1 = \{x_2, x_3\} \cap \{x_2, x_3\} = \{x_2, x_3\}$, $\Gamma_2 u_1 = \{x_3, x_4\} \cap \{x_3, x_4, x_5\} = \{x_3, x_4\}$;

$\Gamma_1 U^{к} : \Gamma_1 u_1 = \{ x_1\} \cap \{x_1\} = \{x_1\}$, $\Gamma_2 u_2 = \{ x_1\} \cap \{x_1\} = \{x_1\}$;

$F_1 X^{к}$: так как $U_1^{п+} = \{u_1, u_2\}$, то $F_1 x_1 = \{\{x_2, x_3\} \cap \{x_2, x_3\} \cup \{x_3, x_4\} \cap \{x_3, x_4, x_5\}\} = \{x_3, x_4\}$, так как $U_2^{п+} = U_3^{п+} = U_4^{п+} = \varnothing$, то $F_1 x_2 = F_1 x_3 = F_1 x_4 = \varnothing$;

$F_1^{-1} X^{к}$: так как $U_1^{п-} = \varnothing$, то $F_1^{-1} x_1 = \varnothing$, $U_2^{п-} = \{u_1\} - F_1^{-1} x_2 = \{\{x_1\} \cap \{x_1\}\} = \{x_1\}$, $U_3^{п-} = \{u_1, u_2\} - F_1^{-1} x_3 = \{\{x_1\} \cap \{x_1\} \cup \{x_1\} \cap \{x_1\}\} = \{x_1\}$, $U_4^{п-} = \{u_2\} - F_1^{-1} x_4 = \{\{x_1\} \cap \{x_1\}\} = \{x_1\}$;

$F_2 U^{к}$: так как $X_1^{п+} = \{x_2, x_3\}$, то $F_2 u_1 = \{\{u_3\} \cap \{u_4\} \cup \{u_3\} \cap \varnothing\} = \varnothing$,

$X_2^{п+} = \{x_3, x_4\} - F_2 u_2 = \{\{u_3\} \cap \varnothing \cup \varnothing \cap \varnothing\} = \varnothing$;

$F_2^{-1} U^{к} : X_1^{п-} = X_2^{п-} = \{x_1\}$ и $F_2^{-1} u_1 = F_2^{-1} u_2 = \varnothing$.

При описании операций были рассмотрены только два варианта аналитического представления ультра- и гиперграфов: полное и в некоторых примерах неполное – без образов (и прообразов для ультраграфов) вершин и рёбер относительно предикатов смежности. При решении задач структурного синтеза нередко возникает необходимость в получении других видов неполного представления графов, содержащих существенно меньший объем информации по сравнению с полным представлением. Анализируя выражения, приведенные в описаниях выполнения операций, нетрудно сформулировать обозначение операции для других вариантов неполного представления и определить используемые формализмы.

Рассмотрим в качестве примера операцию объединения частей графа. Пусть результатом операции объединения двух кусков ультраграфа $H_{U1}{}^{к}$ и $H_{U2}{}^{к}$ является ультраграф, который необходимо получить в виде $H_U\ (X,\ F_1X)$. В результате анализа содержательно-формального описания операции

$H_U\ (X,\ U) = H_{U1}{}^{к}\ (X_1{}^{к},\ U_1{}^{к}) \cup H_{U2}\ (X_2{}^{к},\ U_2{}^{к})$ нетрудно определить, что в качестве исходных данных необходимо задать для куска $H_{U1}{}^{к}$ множества $X_1{}^{к}$, $U_1{}^{к}{}_{ext}$, $\Gamma_1X_1{}^{к}$, $F_1X_1{}^{к}$ и аналогичные множества для куска $H_{U2}{}^{к}$. Для получения результата в виде $H_U\ (X,\ F_1X)$ достаточно выполнить преобразования, описанные в п. п. 1 и 6. Обозначение результата операции должно иметь вид:

$$H_U\ (X,\ F_1X) = H_{U1}{}^{к}\ (X_1{}^{к},\ U_1{}^{к}{}_{ext},\ \Gamma_1X_1{}^{к},\ F_1X_1{}^{к}) \cup H_{U2}\ (X_2{}^{к},\ U_2{}^{к}{}_{ext},\ \Gamma_1X_2{}^{к},\ F_1X_2{}^{к}).$$

Рассмотренные операции применимы к обыкновенным ориентированным и неориентированным графам. Особенности выполнения операций над такими графами связаны с тем, что их ребра инцидентны не более чем двум вершинам , что определяется истинностью условия – $\forall\ u_j \in\ U\ (|\Gamma_1u_j| = |\Gamma_2u_j| = 1$ для графа $G^{\rightarrow}(X,\ U)$ и – $\forall\ u_j \in\ U\ |\Gamma_2u_j| = 2$, если u_j не является петлей, и $|\Gamma_2u_j| = 1$ в противном случае для графа $G^{\sim}(X,\ U)$. Выражения, описывающие результат выполнения операций над обыкновенными графами, могут быть получены из формул для ультра- и гиперграфов, используя аналитику, приведенную в [1].

Литература

1. Овчинников В.А. Математические модели объектов задач структурного синтеза: Наука и образование. Инженерное образование: Эл. науч. издание. – 2009. – № 4.

2. Овчинников В.А. Операции над ультра- и гиперграфами: Наука и образование. Инженерное образование: Эл. науч. издание. – 2009 – № 10-11.