

Операции над ультра- и гиперграфами для реализации процедур анализа и синтеза структур сложных систем

В данной работе описана только часть операций над графами, которые необходимы для реализации проектных операций и процедур анализа и синтеза структур сложных систем по их моделям в виде различного рода графов. Операции проиллюстрированы примерами преобразования объектов автоматизированного схемно-топологического проектирования средств ЭВТ. Перед прочтением данной статьи целесообразно познакомиться с работой [1].

Описание рассмотренных ниже операций ориентировано в основном на ультраграф, поскольку гиперграф, обыкновенные ориентированный и неориентированный графы являются частными случаями ультраграфа [1]. Учитывая, что гиперграф пока не является широко используемой моделью в области прикладных исследований, для каждой операции дается также формальное описание ее выполнения над гиперграфом.

Предполагается, что каждый из объектов операции является одной компонентой связности. Если необходимо выполнить операцию над объектом, модель которого включает несколько компонент связности, аналитическое представление этой модели должно представлять собой конкатенацию соответствующих множеств.

Для всех операций приведена асимптотическая оценка вычислительной сложности. В результате анализа формального описания результата операции и процесса ее выполнения определялось количество операций сравнения и копирования, необходимых для получения всех множеств аналитического представления ультра/гиперграфа. Использовались известные соотношения $O(n) + O(n) = O(n)$, $O(n) \cdot O(n) = O(n^2)$, $O(n) + O(n^2) = O(n^2)$, $O(n) \cdot n =$

$O(n^2)$ и предполагалось, что вычислительная сложность операций сравнения и копирования одинаковы.

Асимптотические оценки приведены как в лучшем, так и в худшем. При определении оценки в лучшем предполагалось, что количество вершин, инцидентных ребру, или количество ребер, инцидентных вершине, количество вершин, из образов которых удаляется некоторое ребро, или количество ребер, из образов которых удаляется некоторая вершина, и т. п. ограничены константой.

Для схем ЭВМ, которые являются основными объектами формализации, эти предположения справедливы. Действительно, для ребра ультраграфа u_j количество инцидентных ему вершин $\rho^+(u_j) = |\Gamma_2 u_j|$ – это нагрузочная способность элемента, который является источником сигнала для цепи $c_j \leftrightarrow u_j$. Для подавляющего большинства элементов схем ЭВМ эта величина редко превышает 10...20 и во всяком случае не зависит от количества элементов схемы n .

Сумма числа ребер, инцидентных вершине x_i , и ребер, которым инцидентна эта вершина, $\rho^+(x_i) + \rho^-(x_i) = |\Gamma_1 x_i| + |\Gamma_2 x_i|$ – это количество выходных и входных контактов элемента $\varepsilon_i \leftrightarrow x_i$. Этот параметр меняется в зависимости от степени интеграции элементов, используемых для представления схемы на данном этапе проектирования. Его значение не зависит от числа элементов и/или цепей схемы и ограничено константой. Таким образом при разработке алгоритмов решения задач схемно-топологического проектирования средств ЭВТ следует ориентироваться на оценку «в лучшем» вычислительной сложности операций над графами.

В других предметных областях значения указанных и аналогичных им параметров могут зависеть от размерности объекта формализации. Поэтому при определении оценки в худшем асимптотического значения вычислительной сложности выполнения операций считалось, что такие параметры ограничены n и/или m .

При описании операций в общем случае предполагалось, что ультра- и гиперграфы задаются аналитически множествами вершин X , ребер U , а также их образами (и прообразами для ультраграфа) относительно предикатов инцидентности $\Gamma_1(X, U)$, $\Gamma_2(U, X)$ и смежности $F_1(X, X)$ и $F_2(U, U)$, т. е. в виде

$H_U(X, U, \Gamma_1 X, \Gamma_2 X, \Gamma_2 U, \Gamma_1 U, F_1 X, F_1^{-1} X, F_2 U, F_2^{-1} U)$ – ультраграф и
 $H(X, U, \Gamma_1 X, \Gamma_2 U, F_1 X, F_2 U)$ – гиперграф.

В том случае, когда результат операции должен быть получен в виде неполного представления, в обозначениях преобразуемого графа (преобразуемых графов) и графа результата следует указать те множества, которые должны быть заданы и получены. Например, обозначение результата операции добавления вершины x_k в ультраграф, если последний надо получить в форме $H_{U_1}(X_1, U_1, \Gamma_1 X_1, \Gamma_2 U_1)$, должно иметь вид

$$H_{U_1}(X_1, U_1, \Gamma_1 X_1, \Gamma_2 U_1) = H_U(X, U, \Gamma_1 X, \Gamma_2 U) + x_k(U_k^+, U_k^-).$$

Если указаны только множества вершин и ребер

$$H_{U_1}(X_1, U_1) = H_U(X, U) + x_k(U_k^+, U_k^-),$$

то в результате операции будет получено полное аналитическое представление $H_{U_1}(X_1, U_1, \Gamma_1 X_1, \Gamma_2 X_1, \Gamma_2 U_1, \Gamma_1 U_1, F_1 X_1, F_1^{-1} X_1, F_2 U_1, F_2^{-1} U_1)$.

В таблице 1 приведены синтезированные операции над графами, соответствующие им проектные процедуры и примеры их применения.

Таблица 1.

<i>№</i>	<i>Операция</i>	<i>Соответствующая проектная процедура</i>	<i>Пример</i>
1	Добавление вершины x_k в граф	Добавление в структуру объекта нового компонента	Включение в схему элемента и подключение его к существующим цепям
2	Добавление ребра u_k в граф	Подсоединение фрагмента структуры объекта в процессе его последовательного формирования	Введение в схему новой цепи и подключение ее к заданным элементам
3	Удаление вершины x_k из графа	Удаление из структуры объекта существующего компонента	Удаление из схемы элемента с сохранением в ней цепей, подключенных к нему
4	Удаление ребра u_k из графа	Отключение соединения от компонент объекта	Удаление из схемы существующей цепи

5	Стягивание ребер u_f и u_k графа	Замена выбранных соединений одним	Замена двух цепей одной
6	Подразбиение ребра u_k графа	Замена выбранного соединения структуры объекта двумя	Разрыв цепи и подключение двух новых к вводимому элементу.
7	Удаление вершины x_k из образов и прообразов инцидентных ей ребер	Отключение компонента от заданных соединений	Отсоединение элемента от определённых цепей
8	Удаление ребра u_k из образов и прообразов инцидентных ему вершин	Отключение соединения от заданных компонентов	Отсоединение цепи от определённых элементов
9	Формирование части графа	Выделение фрагмента структуры объекта	Локализация части схемы по заданному множеству элементов
10	Свертка (факторизация) множества $X_{св}$ вершин графа	Представление фрагмента структуры объекта одним компонентом	Замена части схемы макроэлементом
11	Декомпозиция вершины $x_{св}$ графа	Замена выбранного элемента структуры объекта фрагментом	Декомпозиция элемента более высокого уровня на множество элементов более низкого уровня
12	Дополнение части до графа или его куска	Удаление из структуры объекта заданного фрагмента	Удаление части схемы
13	Объединение частей графа	Создание одной структуры из двух	Объединение двух схем, имеющих общие элементы и/или цепи.
14	Пересечение графов	Определение общих фрагментов структур объектов при совпадающих индексах их компонент и связей	Выделение в схемах одинаковых частей

В данной части статьи рассмотрены операции добавления и удаления вершин и ребер ультра- и гиперграфов. Указанные операции необходимы для реализации методов последовательного и параллельного формирования структур объектов посредством добавления и удаления его компонентов и связей между ними.

Добавление вершины x_k в ультраграф H_U и гиперграф H – рис. 1. Соответствует проектной операции добавления в структуру объекта нового компонента, например, включение в схему элемента и подключение его к существующим цепям.

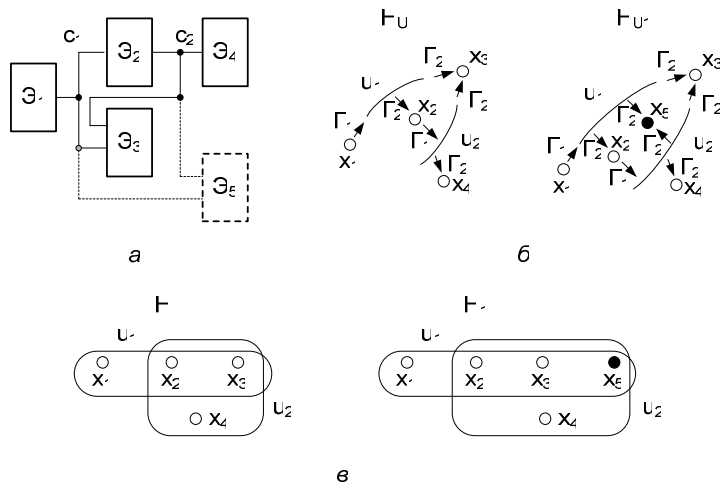


Рис. 1. Фрагмент схемы (а), его модель в виде ультраграфа H_U и результат выполнения операции H_{U1} (б), модель в виде гиперграфа H и результат H_1 (в)

Задается имя добавляемой вершины x_k и множества инцидентных ей ребер $U_k^+ = \Gamma_1 x_k$ и ребер, которым она инцидентна $U_k^- = \Gamma_2 x_k$, – для ультраграфа или множество инцидентных вершине ребер $U_k = \Gamma_1 x_k$ – для гиперграфа.

Обозначение операции: $H_U(X, U) + x_k(U_k^+, U_k^-)$ и $H(X, U) + x_k(U_k)$ для ультра- и гиперграфа соответственно.

Условия корректности операции: $x_k \notin X$, $U_k^+, U_k^-(U_k) \subseteq U$.

Результатом выполнения операции является:

ультраграф $H_{U1}(X_1, U_1) = H_U(X, U) + x_k(U_k^+, U_k^-)$ или гиперграф $H_1(X_1, U_1) = H(X, U) + x_k(U_k)$.

Содержательно-формальное описание выполнения операции над ультраграфом $H_U(X, U)$.

Формируем множества вершин, ребер, их образов и прообразов относительно предикатов инцидентности и смежности ультраграфа $H_{U1}(X_1, U_1)$. Для чего:

1. Создаем множества X_1 , $\Gamma_1 X_1$, и $\Gamma_2 X_1$, добавляя в X вершину x_k , а в $\Gamma_1 X$ и $\Gamma_2 X$ подмножества $\Gamma_1 x_k$ и $\Gamma_2 x_k$ соответственно:

$X_1 = X \bullet x_k$; $\Gamma_1 X_1 = \Gamma_1 X \bullet \Gamma_1 x_k$; $\Gamma_2 X_1 = \Gamma_2 X \bullet \Gamma_2 x_k$, где « $\bullet$ » – символ операции конкатенации.

2. Копируем множество U под именем U_1 : $U_1 = U$.

3. Определяем множество образов ребер $\Gamma_2 U_1$, занося в него $\Gamma_2 u_j$ из множества $\Gamma_2 U$, если ребро u_j не принадлежит множеству ребер, которым инцидентна вершина x_k , и добавляя вершину x_k в образы тех ребер, которым она инцидентна:

$$\Gamma_2 U_1 = \{\Gamma_2 u_j : u_j \notin \Gamma_2 x_k \vee \{\Gamma_2 u_j \bullet x_k\} : u_j \in \Gamma_2 x_k / u_j \in U_1, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U\}.$$

4. Формируем множество прообразов ребер $\Gamma_1 U_1$, занося в него $\Gamma_1 u_j$ из множества $\Gamma_1 U$, если ребро u_j не инцидентно вершине x_k , и добавляя вершину x_k в прообразы тех ребер, которые ей инцидентны:

$$\Gamma_1 U_1 = \{\Gamma_1 u_j : u_j \notin \Gamma_1 x_k \vee \{\Gamma_1 u_j \bullet x_k\} : u_j \in \Gamma_1 x_k / u_j \in U_1, \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U\}.$$

5. Создаем множество образов $F_1 X_1$ вершин относительно предиката смежности F_1 , занося $F_1 x_i$ из $F_1 X$, если вершина x_k не инцидентна ребрам, которые принадлежат образу $\Gamma_1 x_i$ вершины x_i , и добавляя в $F_1 x_i$ вершину x_k в противном случае. Определяем по выражению (16) из работы [1] вершины, смежные добавляемой, и заносим их в множество $F_1 X_1$:

$$F_1 X_1 = \{\{F_1 x_i \in F_1 X : \Gamma_1 x_i \cap \Gamma_2 x_k = \emptyset \vee F_1 x_i \bullet x_k : \Gamma_1 x_i \cap \Gamma_2 x_k \neq \emptyset / x_i \in X, \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X\} \bullet F_1 x_k\},$$

$$\text{где } F_1 x_k = \cup \Gamma_2 u_j, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U.$$

$$u_j \in \Gamma_1 x_k$$

6. Формируем множество прообразов $F_1^{-1} X_1$, занося в него $F_1^{-1} x_i$ из $F_1^{-1} X$, если вершине x_k не инцидентны ребра прообраза $\Gamma_2 x_i$, и добавляя в $F_1^{-1} x_i$ вершину x_k в противном случае. Определяем по выражению (17) из работы [1] вершины прообраза $F_1^{-1} x_k$ и заносим его в множество $F_1^{-1} X_1$:

$$F_1^{-1} X_1 = \{\{F_1^{-1} x_i \in F_1^{-1} X : \Gamma_2 x_i \cap \Gamma_1 x_k = \emptyset \vee F_1^{-1} x_i \bullet x_k : \Gamma_2 x_i \cap \Gamma_1 x_k \neq \emptyset / x_i \in X, \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X\} \bullet F_1^{-1} x_k\},$$

$$\text{где } F_1^{-1} x_k = \cup \Gamma_1 u_j, \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U.$$

$$u_j \in \Gamma_2 x_k$$

7. Определяем множество образов ребер $F_2 U_1$, копируя в него $F_2 u_j$ из $F_2 U$, если ребро u_j не принадлежит множеству ребер, которым инцидентна вершина x_k . В противном случае добавляем в $F_2 u_j$ не принадлежащие ему ребра множества U_k^+ , инцидентные вершине x_k :

$$F_2U_1 = \{F_2u_j : u_j \notin \Gamma_2x_k \vee F_2u_j \cup U_k^+ : u_j \in \Gamma_2x_k / u_j \in U_1, F_2u_j \in F_2U\}.$$

8. Создаем множество прообразов ребер $F_2^{-1}U_1$, занося в него $F_2^{-1}u_j$ из $F_2^{-1}U$, если ребро u_j не инцидентно вершине x_k . В противном случае добавляем в $F_2^{-1}u_j$ не принадлежащие ему ребра множества U_k^- , которым инцидентна вершина x_k :

$$F_2^{-1}U_1 = \{F_2^{-1}u_j : u_j \notin \Gamma_1x_k \vee F_2^{-1}u_j \cup U_k^- : u_j \in \Gamma_1x_k / u_j \in U_1, F_2^{-1}u_j \in F_2^{-1}U\}.$$

Если не заданы образы и прообразы вершин и ребер ультраграфа относительно предикатов $F_1(X, X)$ и $F_2(U, U)$, то на основании (16), (17), (18) и (19) из работы [1], они определяются по следующим выражениям:

$$F_1X_1 = \{F_1x_i / x_i \in X_1\},$$

$$\text{где } F_1x_i = \bigcup_{u_j \in \Gamma_1x_i} \Gamma_2u_j, \Gamma_1x_i \in \Gamma_1X_1, \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_1;$$

$$F_1^{-1}X_1 = \{F_1^{-1}x_i \setminus x_i \in X_1\},$$

$$\text{где } F_1^{-1}x_i = \bigcup_{u_j \in \Gamma_2x_i} \Gamma_1u_j, \Gamma_2x_i \in \Gamma_2X_1, \Gamma_1u_j \in \Gamma_1U_1;$$

$$F_2U_1 = \{F_2u_j / u_j \in U_1\},$$

$$\text{где } F_2u_j = \bigcup_{x_i \in \Gamma_2u_j} \Gamma_1x_i, \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_1, \Gamma_1x_i \in \Gamma_1X_1;$$

$$F_2^{-1}U_1 = \{F_2^{-1}u_j / u_j \in U_1\},$$

$$\text{где } F_2^{-1}u_j = \bigcup_{x_i \in \Gamma_1u_j} \Gamma_2x_i, \Gamma_1u_j \in \Gamma_1U_1, \Gamma_2x_i \in \Gamma_2X_1.$$

Формальное описание операции над гиперграфом $H(X, U)$.

Выполнение операции над гиперграфом аналогично операции над ультраграфом с учетом свойств задающих гиперграф предикатов инцидентности и смежности (смотри [1]). Множества аналитического представления гиперграфа $H_1(X_1, U_1)$ будут:

$$X_1 = X \bullet x_k; \Gamma_1X_1 = \Gamma_1X \bullet \Gamma_1x_k;$$

$$U_1 = U;$$

$$\Gamma_2U_1 = \{\Gamma_2u_j : u_j \notin \Gamma_1x_k \vee \{\Gamma_2u_j \bullet x_k\} : u_j \in \Gamma_1x_k / u_j \in U_1, \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U\},$$

$$F_1X_1 = \{\{F_1x_i \in F_1X : \Gamma_1x_i \cap \Gamma_1x_k = \emptyset \vee F_1x_i \bullet x_k : \Gamma_1x_i \cap \Gamma_1x_k \neq \emptyset / x_i \in X, \Gamma_1x_i \in \Gamma_1X\} \bullet F_1x_k\},$$

где $F_1x_k = \bigcup_{u_j \in \Gamma_1x_k} \Gamma_2u_j$, $\Gamma_2u_j \in \Gamma_2U$.

$$F_2U_1 = \{F_2u_j : u_j \notin \Gamma_1x_k \vee F_2u_j \cup \{U_k \setminus u_j\} : u_j \in \Gamma_1x_k / u_j \in U_1, F_2u_j \in F_2U\}.$$

Если не заданы образы вершин и ребер гиперграфа H относительно предикатов $F_1(X, X)$ и $F_2(U, U)$, то на основании (31) и (32) из работы [1] они определяются по следующим выражениям:

$$F_1X_1 = \{F_1x_i / x_i \in X_1\},$$

где $F_1x_i = \bigcup_{u_j \in \Gamma_1x_i} X_j'$, $X_j' = \Gamma_2u_j \setminus x_i$, если $|\Gamma_2u_j| > 1$,

$$\Gamma_1x_i \in \Gamma_1X_1, \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_1;$$

$$F_2U_1 = \{F_2u_j / u_j \in U_1\},$$

где $F_2u_j = \bigcup_{x_i \in \Gamma_2u_j} U_i'$, $U_i' = \Gamma_1x_i \setminus u_j$, если $|\Gamma_2u_j| > 1$,

$$\Gamma_2u_j \in \Gamma_2U_1, \Gamma_1x_i \in \Gamma_1X_1.$$

Асимптотическая оценка вычислительной сложности операции базируется на мерах сложности формирования множеств аналитического представления ультраграфа. Для определения последней подсчитывается количество операций сравнения и копирования в функции от мощности обрабатываемых множеств, считая при этом, что вычислительные сложности этих операций одинаковы. Выполним такой подсчет на примере формирования множества образов ребер

$$\Gamma_2U_1 = \{\Gamma_2u_j : u_j \notin \Gamma_2x_k \vee \{\Gamma_2u_j \bullet x_k\} : u_j \in \Gamma_2x_k / u_j \in U_1, \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U\}:$$

- проверка условия $u_j \notin \Gamma_2x_k$ требует максимум $|\Gamma_2x_k|$ сравнений,
- при благоприятном исходе выполняется копирование $|\Gamma_2u_j|$ элементов,
- количество благоприятных исходов равно $|U_1| - |\Gamma_2x_k|$,
- количество противоположных исходов $|\Gamma_2x_k|$ и при каждом таком исходе происходит копирование $|\Gamma_2u_j|$ элементов.

Отсюда суммарное количество операций будет

$$(|\Gamma_2x_k| + |\Gamma_2u_j|) \times (|U_1| - |\Gamma_2x_k|) + |\Gamma_2x_k| \times |\Gamma_2u_j|.$$

Оценки сложности формирования множеств аналитического представления ультраграфа приведены в таблице 2. В ней использованы обозначения $n = |X|$ и $m = |U|$.

Таблица 2.

N п/п	Формируемые множества	Количество операций сравнения и копирования в функции от мощности обрабатываемых множеств	Мера сложности формирования множества
1.1.	X_1	$ X = n$	$O(n)$
1.2.	$\Gamma_1 X_1$	$ \Gamma_1 X \times \Gamma_1 x_i $	$O(n \cdot m)$, если $ \Gamma_1 x_i \leq m$, $O(n)$, если $ \Gamma_1 x_i \leq const^*$
1.3.	$\Gamma_2 X_1$	$ \Gamma_2 X \times \Gamma_2 x_i $	$O(n \cdot m)$, если $ \Gamma_2 x_i \leq m$, $O(n)$, если $ \Gamma_2 x_i \leq const$
2.	U_1	$ U = m$	$O(m)$
3.	$\Gamma_2 U_1$	$(U_k^- + \Gamma_2 u_j) \times (U_1 - U_k^-) + U_k^- \times \Gamma_2 u_j $	$O(m \cdot n)$, если $ U_k^- \leq m$ и $ \Gamma_2 u_j \leq n$, $O(m)$, если $ U_k^- $ и $ \Gamma_2 u_j \leq const$
4.	$\Gamma_1 U_1$	$(U_k^+ + \Gamma_1 u_j) \times (U_1 - U_k^+) + U_k^+ \times \Gamma_1 u_j $	$O(m \cdot n)$, если $ U_k^+ \leq m$ и $ \Gamma_1 u_j \leq n$, $O(m)$, если $ U_k^+ $ и $ \Gamma_1 u_j \leq const$
5.	$F_1 X_1$	$(\Gamma_1 x_i \times U_k^- + F_1 x_i) \times X $	$O(m^2 \cdot n)$, если $ \Gamma_1 x_i $ и $ U_k^- \leq m$, $O(n)$, если $ \Gamma_1 x_i $, $ U_k^- $ и $ F_1 x_i \leq const$
6.	$F_1^{-1} X_1$	$(\Gamma_2 x_i \times U_k^+ + F_1^{-1} x_i) \times X $	$O(m^2 \cdot n)$, если $ \Gamma_2 x_i $ и $ U_k^+ \leq m$, $O(n)$, если $ \Gamma_2 x_i $, $ U_k^+ $ и $ F_1^{-1} x_i \leq const$
7.	$F_2 U_1$	$(U_k^- + F_2 u_j) \times (U_1 - U_k^-) + (U_k^- + F_2 u_j \times U_k^+) \times U_k^- $	$O(m^3)$, если $ U_k^- $, $ U_k^+ $ и $ F_2 u_j \leq m$, $O(m)$, если $ U_k^- $, $ U_k^+ $ и $ F_2 u_j \leq const$
8.	$F_2^{-1} U_1$	$ U_k^+ + F_2^{-1} u_j \times (U_1 - U_k^+) + (U_k^+ + F_2^{-1} u_j \times U_k^-) \times U_k^+ $	$O(m^3)$, если $ U_k^+ $, $ U_k^- $ и $ F_2^{-1} u_j \leq m$, $O(m)$, если $ U_k^+ $, $ U_k^- $ и $ F_2^{-1} u_j \leq const$

* – т. е. не зависит от размера входа операции n и/или m .

Асимптотическая оценка вычислительной сложности данной операции над ультраграфом равна:

- в худшем $O(m^3)$ при $m > n$, если $|U_k^-|$, $|U_k^+|$ и $|F_2 u_j|$ или $|U_k^+|$, $|U_k^-|$ и $|F_2^{-1} u_j|$ ограничены m , и $O(m^2 \cdot n)$ при $n > m$, если $|\Gamma_1 x_i|$ и $|U_k^-|$ или $|\Gamma_2 x_i|$ и $|U_k^+|$ ограничены величиной m ;

- в лучшем $O(t)$ при $t > n$ или $O(n)$ при $n > t$, если мощности образов и прообразов вершин и ребер ограничены константой.

Без учета операций формирования образов и прообразов вершин и ребер относительно предикатов смежности асимптотическая оценка вычислительной сложности операции будет равна:

- в худшем $O(t \cdot n)$, если $|\Gamma_1 x_i|$ или $|\Gamma_2 x_i|$ ограничены величиной t либо $|\Gamma_2 u_j|$ или $|\Gamma_1 u_j|$ – величиной n ;

- в лучшем $O(n)$ при $n > t$ или $O(t)$ при $t > n$, если $|\Gamma_1 x_i|$, $|\Gamma_2 x_i|$, $|\Gamma_2 u_j|$ и $|\Gamma_1 u_j|$ ограничены константой.

Асимптотическая оценка вычислительной сложности этой операции над гиперграфом имеет тот же порядок.

Операция применима к куску ультра- или гиперграфа.

Особенности выполнения операции.

При добавлении вершины x_k к куску $H_U^k (X^k, U^k)$ ультраграфа $H_U (X, U)$ ребро $u_t \in U_{ext}^k$ становится внутренним, если выполняется одно из следующих условий:

$$\begin{aligned}
 & - u_t \in U_k^+ \ \& \ u_t \notin U_k^- \ \& \ X_t^{+k} \cdot x_k = X_t^+ \ \& \ X_t^{-k} = X_t^-, \\
 & - u_t \notin U_k^+ \ \& \ u_t \in U_k^- \ \& \ X_t^{+k} = X_t^+ \ \& \ X_t^{-k} \cdot x_k = X_t^-, \\
 & - u_t \in U_k^+ \ \& \ u_t \in U_k^- \ \& \ X_t^{+k} \cdot x_k = X_t^+ \ \& \ X_t^{-k} \cdot x_k = X_t^-,
 \end{aligned}$$

где $X_t^{+k} = \Gamma_2 u_t \in \Gamma_2 U^k$, $X_t^+ = \Gamma_2 u_t \in \Gamma_2 U$,
 $X_t^{-k} = \Gamma_1 u_t \in \Gamma_1 U^k$, $X_t^- = \Gamma_1 u_t \in \Gamma_1 U$.

При выполнении одного из этих условий для всех внешних ребер куска результатом операции будет ультраграф.

Для куска $H^k (X^k, U^k)$ гиперграфа $H (X, U)$ ребро $u_t \in U_{ext}^k$ становится внутренним, если

$$u_t \in U_k \ \& \ X_t^k \cdot x_k = X_t^-, \text{ где } X_t^k = \Gamma_2 u_t \in \Gamma_2 U^k, X_t = \Gamma_2 u_t \in \Gamma_2 U.$$

При выполнении этого условия для всех $u_t \in U_{ext}^k$ результатом операции будет гиперграф.

Вырожденный случай операции: при $U_k^+ = U_k^- = \emptyset$ для ультраграфа и

$U_k = \emptyset$ для гиперграфа операция приводит к увеличению количества компонент связности за счет тривиального $H_U(x_k, \emptyset)$ ультра- или $H(x_k, \emptyset)$ гиперграфа.

Пример. Добавим в схему, показанную на рис. 1, а, элемент $э_5$ и подключим его к цепям c_1 и c_2 . При представлении схемы ультраграфом это соответствует добавлению в ультраграф, изображенный на рис. 1, б, вершины x_5 , такой, что $\Gamma_1 x_5 = \emptyset$, $\Gamma_2 x_5 = \{u_1, u_2\}$.

Результатом выполнения операции $H_{U_1}(X_1, U_1) = H_U(X, U) + x_k(U_k^+, U_k^-)$ будет ультраграф, заданный множествами:

$$X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \bullet x_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}; U_1 = \{u_1, u_2\};$$

$$\Gamma_1 X_1 = \Gamma_1 X \bullet \Gamma_1 x_5, \text{ где } \Gamma_1 x_5 = \emptyset; \Gamma_2 X_1 = \Gamma_2 X \bullet \Gamma_2 x_5, \text{ где } \Gamma_2 x_5 = \{u_1, u_2\};$$

$$\Gamma_2 U_1: \Gamma_2 u_1 = \{x_2, x_3\} \bullet x_5 = \{x_2, x_3, x_5\}, \Gamma_2 u_2 = \{x_3, x_4\} \bullet x_5 = \{x_3, x_4, x_5\};$$

$$\Gamma_1 U_1: \Gamma_1 u_1 = \{x_1\}, \Gamma_1 u_2 = \{x_2\}.$$

$$F_1 X_1: F_1 x_1 = \{x_2, x_3\} \bullet x_5 = \{x_2, x_3, x_5\}, F_1 x_2 = \{x_3, x_4\} \bullet x_5 = \{x_3, x_4, x_5\},$$

$$F_1 x_3 = F_1 x_4 = F_1 x_5 = \emptyset;$$

$$F_1^{-1} X_1: F_1^{-1} x_1 = \emptyset, F_1^{-1} x_2 = \{x_1\}, F_1^{-1} x_3 = F_1^{-1} x_5 = \{x_1, x_2\}, F_1^{-1} x_4 = \{x_2\};$$

$$F_2 U_1: F_2 u_1 = \{u_2\}, F_2 u_2 = \emptyset;$$

$$F_2^{-1} U_1: F_2^{-1} u_1 = \emptyset, F_2^{-1} u_2 = \{u_1\}.$$

При представлении схемы гиперграфом (смотри рис. 1, в) множество ребер, находящихся в отношении инцидентности с вершиной x_5 , $\Gamma_1 x_5 = \{u_1, u_2\}$, тогда множества вершин, ребер и их образы относительно предикатов инцидентности результата операции $H_1(X_1, U_1, \Gamma_1 X_1, \Gamma_2 U_1) = H(X, U, \Gamma_1 X, \Gamma_2 U) + x_k(U_k)$ будут:

$$X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}; U_1 = \{u_1, u_2\};$$

$$\Gamma_1 X_1 = \Gamma_1 X \bullet \Gamma_1 x_5, \text{ где } \Gamma_1 x_5 = \{u_1, u_2\};$$

$$\Gamma_2 U_1: \Gamma_2 u_1 = \{x_1, x_2, x_3\} \bullet x_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \Gamma_2 u_2 = \{x_2, x_3, x_4\} \bullet x_5 = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}.$$

Добавление ребра u_k в ультраграф H_U и гиперграф H – рис. 2. Реализует проектную операцию подсоединения фрагмента структуры объекта (не-

которая связь и один или более компонентов) в процессе его последовательного формирования, например, введение в схему новой цепи и подключения ее к заданным элементам.

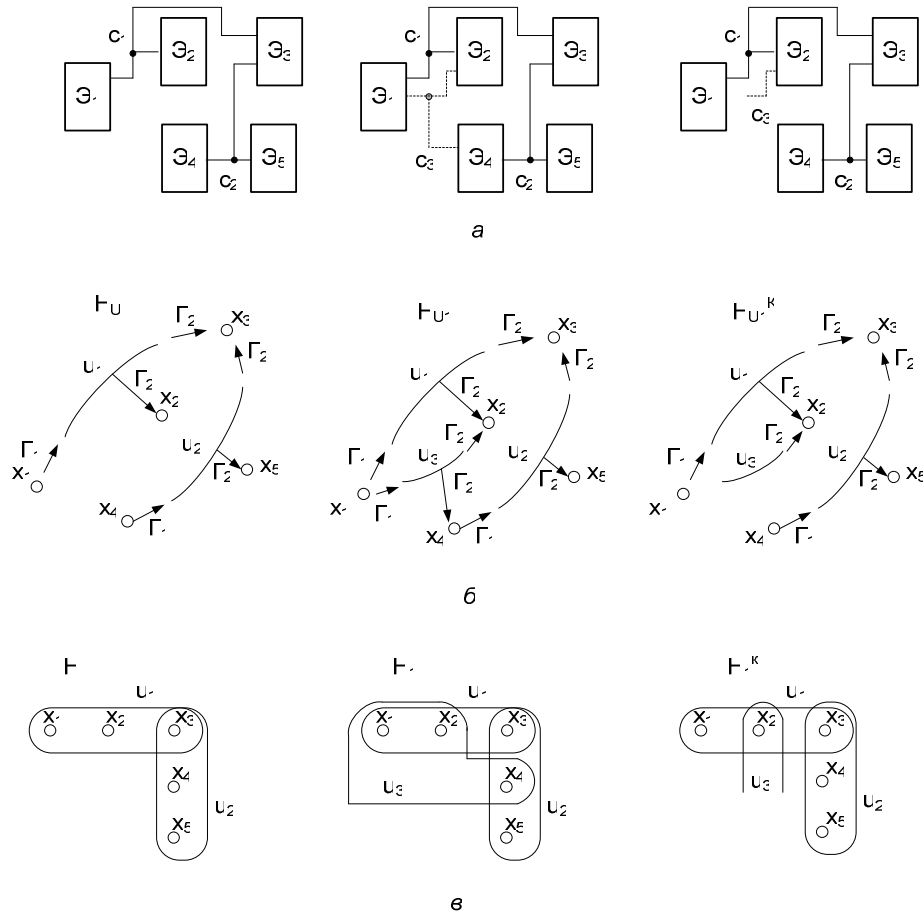


Рис. 2. Исходная схема и варианты добавления цепи c_3 (а), модель схемы в виде ультраграфа H_U и соответствующие результаты операции: ультраграф H_{U1} и кусок ультраграфа H_{U1}^K (б); модель в виде гиперграфа H и результаты операции: гиперграф H_1 и кусок H_1^K (в)

Задается имя добавляемого ребра u_k и множества инцидентных ему вершин $X_k^+ = \Gamma_2 u_k$ и вершин, которым оно инцидентно $X_k^- = \Gamma_1 u_k$, – для ультраграфа или множество инцидентных ребру вершин $X_k = \Gamma_2 u_k$ – для гиперграфа, т. е. $X_k^+ \cup X_k^- \leftrightarrow \Xi_k$ – множество элементов, к которым подключается цепь c_k .

Обозначение операции: $H_U(X, U) + u_k(X_k^+, X_k^-)$ и $H(X, U) + u_k(X_k)$ для ультра- и гиперграфа соответственно.

Условия корректности операции: $X_k \cap X \neq \emptyset$, где $X_k = \Gamma_2 u_k \cup \Gamma_1 u_k$ – для ультраграфа и $X_k = \Gamma_2 u_k$ – для гиперграфа, т. е. в общем случае при добавлении цепи в схему могут быть включены новые элементы (на рис. 2 рассмотрен вариант, для которого $X_k \subseteq X$). Так как $X_k \cap X \neq \emptyset$, в результате выполнения операции количество компонент связности не изменяется. Если $u_k \in U$ и $X_k \subseteq X$, операция реализует проектную процедуру подключения уже существующей цепи к элементам схемы.

Результатом выполнения операции является:

– ультраграф $H_{U_1}(X_1, U_1) = H_U(X, U) + u_k(X_k^+, X_k^-)$, если $|X_k^+| + |X_k^-| \geq 2$, или кусок ультраграфа $H_{U_1}^k(X_1^k, U_1^k) = H_U(X, U) + u_k(X_k^+, X_k^-)$, если $|X_k^+| + |X_k^-| = 1$;

– гиперграф $H_1(X_1, U_1) = H(X, U) + u_k(X_k)$, если $|X_k| > 1$, или кусок гиперграфа $H_1^k(X_1^k, U_1^k) = H(X, U) + u_k(X_k)$, если $|X_k| = 1$.

Содержательно-формальное описание выполнения операции над ультраграфом $H_U(X, U)$ при $|X_k^+| + |X_k^-| \geq 2$.

Для получения ультраграфа $H_{U_1}(X_1, U_1)$:

1. Создаем множество вершин X_1 , объединяя множества X и X_k :

$X_1 = X \cup X_k$, где X_k – то же, что и выше.

2. Определяем множество ребер U_1 : $U_1 = U \bullet u_k$.

3. Формируем множество образов вершин $\Gamma_1 X_1$:

– записывая в него $\Gamma_1 x_i$ из множества $\Gamma_1 X$, если ребро u_k не инцидентно вершине x_i ,

– включая ребро u_k в образы вершин, которым оно инцидентно, если эти вершины принадлежат множеству X ,

– занося ребро u_k в образы тех вершин, не принадлежащих множеству X , которым оно инцидентно,

– записывая в образ вершины значение $\emptyset$, если она не принадлежит ни множеству X , ни подмножеству $X_k^- = \Gamma_1 u_k$.

$\Gamma_1 X_1 = \{\Gamma_1 x_i : x_i \notin \Gamma_1 u_k \ \& \ x_i \in X \vee \{\Gamma_1 x_i \bullet u_k\} : x_i \in \Gamma_1 u_k \ \& \ x_i \in X \vee u_k : x_i \in \Gamma_1 u_k \ \& \ x_i \notin X \vee \emptyset : x_i \notin \Gamma_1 u_k \ \& \ x_i \notin X / x_i \in X_1, \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X\}.$

4. Создаем множество прообразов вершин $\Gamma_2 X_1$:

- записывая в него $\Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X$, если вершина x_i не инцидентна ребру u_k ,
- включая ребро u_k в прообразы инцидентных ему вершин, если эти вершины принадлежат множеству X ,

- занося ребро u_k в прообразы тех вершин, не принадлежащих множеству X , которые ему инцидентны,

- записывая в прообраз вершины значение $\emptyset$, если она не принадлежит ни множеству X , ни подмножеству $X_k^+ = \Gamma_2 u_k$.

$\Gamma_2 X_1 = \{\Gamma_2 x_i : x_i \notin \Gamma_2 u_k \ \& \ x_i \in X \vee \{\Gamma_2 x_i \bullet u_k\} : x_i \in \Gamma_2 u_k \ \& \ x_i \in X \vee u_k : x_i \in \Gamma_2 u_k \ \& \ x_i \notin X \vee \emptyset : x_i \notin \Gamma_2 u_k \ \& \ x_i \notin X / x_i \in X_1, \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X\}.$

5. Формируем множество образов вершин $\Gamma_2 U_1$ и прообразов $\Gamma_1 U_1$ ребер:

- копируя $\Gamma_2 u_j$ и $\Gamma_1 u_j$ из $\Gamma_2 U$ и $\Gamma_1 U$, если $u_j \neq u_k$;
- объединяя их с подмножествами X_k^+ и X_k^- соответственно, если $u_j = u_k$ и ребро u_k принадлежало ультраграфу $H_U(X, U)$;
- записывая множества X_k^+ и X_k^- , если ребро u_k не принадлежало ультраграфу $H_U(X, U)$:

$\Gamma_2 U_1 = \{\Gamma_2 u_j : u_j \neq u_k \vee \Gamma_2 u_j \cup X_k^+ : u_j = u_k \ \& \ u_k \in U \vee X_k^+ : u_j = u_k \ \& \ u_k \notin U / u_j \in U_1, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U\}$ и

$\Gamma_1 U_1 = \{\Gamma_1 u_j : u_j \neq u_k \vee \Gamma_1 u_j \cup X_k^- : u_j = u_k \ \& \ u_k \in U \vee X_k^- : u_j = u_k \ \& \ u_k \notin U / u_j \in U_1, \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U\}.$

6. Определяем множество образов вершин $F_1 X_1$ относительно предиката смежности $F_1(X_1, X_1)$, занося в него:

- образ $F_1 x_i$ из $F_1 X$ для всех $x_i \in X$, если вершине x_i не инцидентно ребро u_k , и объединяя $F_1 x_i$ с X_k^+ в противном случае,

- для вершины, не принадлежащей множеству X , образом будет множество вершин, инцидентных ребру u_k , если оно инцидентно этой вершине, и пустое множество в противном случае:

$F_1X_1 = \{ \{ F_1x_i : x_i \notin \Gamma_1u_k \vee F_1x_i \cup X_k^+ : x_i \in \Gamma_1u_k / x_i \in X, x_i \in F_1X \} \bullet F_1x_j / x_j \in X_k \& x_j \notin X \}$, где $X_k = X_k^+ \cup X_k^-$,

$$F_1x_j = \begin{cases} \Gamma_2u_k : x_j \in \Gamma_1u_k, \\ \emptyset : x_j \notin \Gamma_1u_k. \end{cases}$$

7. Формируем множество прообразов $F_1^{-1}X_1$, заносим в него:

– для вершины, принадлежащей множеству X , прообраз $F_1^{-1}x_i$ из $F_1^{-1}X$, если вершина x_i не инцидентна ребру u_k , и объединяя $F_1^{-1}x_i$ с X_k^- в противном случае,

– для вершины, не принадлежащей множеству X , прообразом будет множество вершин, которым инцидентно ребро u_k , если вершина инцидентна этому ребру, и пустое множество в противном случае:

$F_1^{-1}X_1 = \{ \{ F_1^{-1}x_i : x_i \notin \Gamma_2u_k \vee F_1^{-1}x_i \cup X_k^- : x_i \in \Gamma_2u_k / x_i \in X, x_i \in F_1^{-1}X \} \bullet F_1^{-1}x_j / x_j \in X_k \& x_j \notin X \}$, где $X_k = X_k^+ \cup X_k^-$,

$$F_1^{-1}x_j = \begin{cases} \Gamma_1u_k : x_j \in \Gamma_2u_k, \\ \emptyset : x_j \notin \Gamma_2u_k. \end{cases}$$

8. Определяем множество образов ребер F_2U_1 :

– для ребер множества U копируем F_2u_j из F_2U , если ни одной из вершин, инцидентных ребру u_j , не инцидентно ребро u_k , т. е. образ Γ_2u_j ребра u_j и прообраз Γ_1u_k ребра u_k не имеют общих вершин. В противном случае добавляем в F_2u_j ребро u_k ;

– для ребра u_k по выражению (18) из работы [1] определяем образ и заносим его в F_2U_1 :

$F_2U_1 = \{ \{ F_2u_j : \Gamma_2u_j \cap \Gamma_1u_k = \emptyset \vee F_2u_j \bullet u_k : \Gamma_2u_j \cap \Gamma_1u_k \neq \emptyset / u_j \in U, \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U, F_2u_j \in F_2U \} \bullet F_2u_k \}$,

где $F_2u_k = \cup \Gamma_1x_i, \Gamma_1x_i \in \Gamma_1X$.

$$x_i \in \Gamma_2u_k$$

9. Создаем множество прообразов ребер $F_2^{-1}U_1$:

– для ребер множества U заносим в него $F_2^{-1}u_j$ из $F_2^{-1}U$, если ни одна из вершин, которым инцидентно ребро u_j , не инцидентна ребру u_k . В противном случае добавляем в $F_2^{-1}u_j$ ребро u_k ;

– для ребра u_k по выражению (19) из работы [1] определяем прообраз и заносим его в $F_2^{-1}U_1$:

$$F_2^{-1}U_1 = \{ \{ F_2^{-1}u_j : \Gamma_1 u_j \cap \Gamma_2 u_k = \emptyset \vee F_2^{-1}u_j \bullet u_k : \Gamma_1 u_j \cap \Gamma_2 u_k \neq \emptyset / u_j \in U, \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U, F_2^{-1}u_j \in F_2^{-1}U \} \bullet F_2^{-1}u_k \},$$

$$\text{где } F_2^{-1}u_k = \cup \Gamma_2 x_i, \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X.$$

$$x_i \in \Gamma_1 u_k$$

Если не заданы образы и прообразы вершин и ребер ультраграфа относительно предикатов $F_1(X, X)$ и $F_2(U, U)$, они определяются по формулам (16), (17), (18) и (19) работы [1].

В случае, если результатом операции будет кусок ультраграфа $H_{U_1^k}$, множества $X_1^k, U_1^k, \Gamma_1 X_1^k, \Gamma_2 X_1^k, \Gamma_2 U_1^k, \Gamma_1 U_1^k, F_1 X, F_1^{-1} X$ определяются по тем же формулам, что и для ультраграфа, а множество ребер U_1^k разбивается на подмножества $U_1^{k, int}$ и $U_1^{k, ext}$, где $U_1^{k, int} = U$, $U_1^{k, ext} = \{u_k\}$.

Формальное описание операции над гиперграфом $H(X, U)$.

Множества аналитического представления гиперграфа $H_1(X_1, U_1)$ получаются по формулам:

$$X_1 = X \cup X_k, \text{ где } X_k - \text{ то же, что и выше; } U_1 = U \cup u_k;$$

$$\Gamma_1 X_1 = \{ \Gamma_1 x_i : x_i \notin \Gamma_2 u_k \vee \{ \Gamma_1 x_i \bullet u_k \} : x_i \in \Gamma_2 u_k \& x_i \in X \vee u_k : x_i \notin X / x_i \in X_1, \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X \};$$

$$\Gamma_2 U_1 = \{ \Gamma_2 u_j : u_j \neq u_k \vee \Gamma_2 u_j \cup X_k : u_j = u_k \& u_k \in U \vee X_k : u_j = u_k \& u_k \notin U / u_j \in U_1, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U \};$$

$$F_1 X_1 = \{ \{ F_1 x_i : x_i \notin \Gamma_2 u_k \vee F_1 x_i \cup X_k \setminus x_i : x_i \in \Gamma_2 u_k / x_i \in X, F_1 x_i \in F_1 X \} \bullet$$

$$F_1 x_j / x_j \in X_k \& x_j \notin X \}, \text{ где } F_1 x_j = X_k \setminus x_j;$$

$$F_2U_1 = \{ \{F_2u_j : \Gamma_2u_j \cap \Gamma_2u_k = \emptyset \vee F_2u_j \bullet u_k : \Gamma_2u_j \cap \Gamma_2u_k \neq \emptyset / u_j \in U, \\ \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U, F_2u_j \in F_2U\} \bullet F_2u_k \},$$

где $F_2u_k = \cup \Gamma_1x_i, \Gamma_1x_i \in \Gamma_1X$.

$$x_i \in \Gamma_2u_k$$

Если результатом операции будет кусок гиперграфа H_1^k , множества $X_1^k, U_1^k, \Gamma_1X_1^k, \Gamma_2U_1^k, F_1X_1^k, F_2U_1^k$ определяются аналогично множествам $X_1, U_1, \Gamma_1X_1, \Gamma_2U_1, F_1X_1, F_2U_1$. Множество U_1^k разбивается на два подмножества $U_1^{k_{int}} = U$ и $U_1^{k_{ext}} = \{u_k\}$.

Асимптотическая оценка вычислительной сложности этой операции над ультраграфом равна:

- в худшем $O(n^3)$ при $n > t$, если $|X_k^-|$ или $|X_k^+|$ ограничены n , или $O(n^2 \cdot t)$ при $t > n$, если $|\Gamma_2u_j|$ и $|X_k^-|$ или $|\Gamma_1u_j|$ и $|X_k^+|$ ограничены n ;
- в лучшем $O(n)$ при $n > t$, если $|X_k^-|, |X_k^+|, |F_1x_i|$ и $|F_1^{-1}x_i|$ ограничены константой, или $O(t)$ при $t > n$, если $|\Gamma_2u_j|, |\Gamma_1u_j|, |X_k^-|, |X_k^+|, |F_2u_j|$ и $|F_2^{-1}u_j|$ ограничены константой.

Асимптотическая оценка вычислительной сложности операции над гиперграфом имеет тот же порядок.

Объектом операции может быть кусок ультра- или гиперграфа. В этом случае результатом будет:

ультраграф $H_{U_1}(X_1, U_1) = H_U^k(X^k, U^k) + u_k(X_k^+, X_k^-)$, если $U^{k_{ext}} = \{u_k\}$, $X_k^+ = \Gamma_2u_k \in \Gamma_2U$ и $X_k^- = \Gamma_1u_k \in \Gamma_1U$, где U – множество ребер ультраграфа, куском которого является $H_U^k(X^k, U^k)$, или кусок ультраграфа $H_{U_1^k}(X_1^k, U_1^k) = H_U(X, U) + u_k(X_k^+, X_k^-)$, если не удовлетворяется хотя бы одно из указанных выше условий.

При выполнении операции над куском ультраграфа необходимо определять $U_1^{k_{ext}}$ и $U_1^{k_{int}}$:

$$U_1^{k_{ext}} = U^{k_{ext}} \setminus \{u_k\}, \text{ если } X_k^+ = \Gamma_2u_k \in \Gamma_2U \text{ и } X_k^- = \Gamma_1u_k \in \Gamma_1U \text{ или} \\ U_1^{k_{ext}} = U^{k_{ext}} \cup \{u_k\}, \text{ если не удовлетворяется хотя бы одно из этих условий;} \\ U_1^{k_{int}} = U_1^k \setminus U_1^{k_{ext}}.$$

Полученные результаты легко распространить на кусок гиперграфа.

Вырожденный случай операции: при $X_k^+ = X_k^- = \emptyset$ для ультраграфа и $X_k = \emptyset$ для гиперграфа операция приводит к увеличению количества компонент связности за счет тривиального куска $H_U^k(\emptyset, u_k)$ ультра- или $H^k(\emptyset, u_k)$ гиперграфа.

Пример. Введем в схему, показанную на рис. 2, а, цепь s_3 и подключим ее к выходу элемента ε_1 и входам элементов ε_2 и ε_4 . При представлении схемы ультраграфом (смотри рис. 2, б) это реализуется операцией добавления ребра u_3 , у которого $\Gamma_2 u_3 = \{x_2, x_4\}$ и $\Gamma_1 u_3 = \{x_1\}$.

В результате выполнения операции $H_{U_1}(X_1, U_1) = H_U(X, U) + u_k(X_k^+, X_k^-)$ получим ультраграф H_{U_1} , у которого:

$$X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}; U_1 = \{u_1, u_2\} \cup u_3 = \{u_1, u_2, u_3\};$$

$$\Gamma_1 X_1: \Gamma_1 x_1 = \{u_1\} \bullet u_3 = \{u_1, u_3\}, \Gamma_1 x_2 = \emptyset, \Gamma_1 x_3 = \emptyset, \Gamma_1 x_4 = \{u_2\}, \Gamma_1 x_5 = \emptyset;$$

$$\Gamma_2 X_1: \Gamma_2 x_1 = \emptyset, \Gamma_2 x_2 = \{u_1\} \bullet u_3 = \{u_1, u_3\}, \Gamma_2 x_3 = \{u_1, u_2\}, \Gamma_2 x_4 = \emptyset \bullet u_3 = \{u_3\}, \Gamma_2 x_5 = \{u_2\};$$

$$\Gamma_2 U_1 = \{\Gamma_2 u_1, \Gamma_2 u_2, \Gamma_2 u_3\}, \text{ где } \Gamma_2 u_3 = \{x_2, x_4\};$$

$$\Gamma_1 U_1 = \{\Gamma_1 u_1, \Gamma_1 u_2, \Gamma_1 u_3\}, \text{ где } \Gamma_1 u_3 = \{x_1\};$$

$$F_1 X_1: F_1 x_1 = \{x_2, x_3\} \cup \{x_2, x_4\} = \{x_2, x_3, x_4\}, F_1 x_2 = F_1 x_3 = F_1 x_5 = \emptyset, F_1 x_4 = \{x_3, x_5\};$$

$$F_1^{-1} X_1: F_1^{-1} x_1 = \emptyset, F_1^{-1} x_2 = \{x_1\}, F_1^{-1} x_3 = \{x_1, x_4\}, F_1^{-1} x_4 = \emptyset \cup \{x_1\} = \{x_1\}, F_1^{-1} x_5 = \{x_4\}.$$

$$F_1 U_1: F_1 u_1 = \emptyset, F_1 u_2 = \emptyset.$$

$$F_1^{-1} U_1: F_1^{-1} u_1 = \emptyset, F_1^{-1} u_2 = \emptyset, F_1^{-1} u_3 = \{u_2\}.$$

При введении в схему цепи s_3 и подключении ее только к входу элемента ε_2 , т. е. при добавлении ребра u_3 такого, что $\Gamma_2 u_3 = \{x_2\}$ и $\Gamma_1 u_3 = \emptyset$, результатом операции

$H_{U_1}^k(X_1^k, U_1^k, \Gamma_1 X_1^k, \Gamma_2 X_1^k, \Gamma_2 U_1^k, \Gamma_1 U_1^k) = H_U(X, U, \Gamma_1 X, \Gamma_2 X, \Gamma_2 U, \Gamma_1 U) + u_k(X_k^+, X_k^-)$ будет кусок ультраграфа $H_{U_1}^k$, заданный множествами:

$$X_1^k = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}; U_1^k = \{u_1, u_2, u_3\}, U_1^{k \text{ int}} = \{u_1, u_2\}, U_1^{k \text{ ext}} = \{u_3\};$$

$$\Gamma_1 X_1^k: \Gamma_1 x_1 = \{u_1\}, \Gamma_1 x_2 = \emptyset, \Gamma_1 x_3 = \emptyset, \Gamma_1 x_4 = \{u_2\}, \Gamma_1 x_5 = \emptyset;$$

$$\Gamma_2 X_1^k: \Gamma_2 x_1 = \emptyset, \Gamma_2 x_2 = \{u_1\} \bullet u_3 = \{u_1, u_3\}, \Gamma_2 x_3 = \{u_1, u_2\}, \Gamma_2 x_4 = \emptyset, \Gamma_2 x_5 = \{u_2\};$$

$$\Gamma_2 U_1^k = \{\Gamma_2 u_1, \Gamma_2 u_2, \Gamma_2 u_3\}, \text{ где } \Gamma_2 u_3 = \{x_2\};$$

$$\Gamma_1 U_1^k = \{\Gamma_1 u_1, \Gamma_1 u_2, \Gamma_1 u_3\}, \text{ где } \Gamma_1 u_3 = \emptyset.$$

Если моделью схемы является гиперграф (смотри рис. 2, в), операция $H_1(X_1, U_1) = H(X, U) + u_k(X_k)$ добавления ребра u_3 , такого, что $\Gamma_2 u_3 = \{x_1, x_2, x_4\}$, дает результат в виде гиперграфа H_1 , у которого:

$$X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}; U_1 = \{u_1, u_2\} \cup u_3 = \{u_1, u_2, u_3\};$$

$$\Gamma_1 X_1: \Gamma_1 x_1 = \Gamma_1 x_2 = \{u_1\} \bullet u_3 = \{u_1, u_3\}, \Gamma_1 x_3 = \{u_1, u_2\}, \Gamma_1 x_4 = \{u_2\} \bullet u_3 = \{u_2, u_3\}, \Gamma_1 x_5 = \{u_2\};$$

$$\Gamma_2 U_1 = \{\Gamma_2 u_1, \Gamma_2 u_2, \Gamma_2 u_3\}, \text{ где } \Gamma_2 u_3 = \{x_1, x_2, x_4\};$$

$$F_1 X_1: F_1 x_1 = \{x_2, x_3\} \cup \{x_1, x_2, x_4\} \setminus x_1 = \{x_2, x_3, x_4\}, F_1 x_2 = \{x_1, x_3\} \cup \{x_1, x_2, x_4\} \setminus x_2 = \{x_1, x_3, x_4\}, F_1 x_3 = \{x_1, x_3\}, F_1 x_4 = \{x_3, x_5\} \cup \{x_1, x_2, x_4\} \setminus x_4 = \{x_3, x_5, x_1, x_2\}, F_1 x_5 = \{x_3, x_4\}.$$

$$F_2 U_1: F_2 u_1 = \{u_2\} \bullet u_3 = \{u_2, u_3\}, F_2 u_2 = \{u_1\} \bullet u_3 = \{u_1, u_3\}, F_2 u_3 = \{u_1\} \cup \{u_1\} \cup \{u_2\} = \{u_1, u_2\}.$$

При подключении цепи c_3 только к входу элемента ε_2 , получаем кусок гиперграфа, который в результате выполнения операции $H_1^k(X_1^k, U_1^k, \Gamma_1 X_1^k, \Gamma_2 U_1^k) = H(X, U, \Gamma_1 X_1, \Gamma_2 U_1) + u_k(X_k)$ будет представлен множествами:

$$X_1^k = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}; U_1^k = \{u_1, u_2, u_3\}, U_1^k \text{ int} = \{u_1, u_2\}, U_1^k \text{ ext} = \{u_3\};$$

$$\Gamma_1 X_1^k: \Gamma_1 x_1 = \{u_1\}, \Gamma_1 x_2 = \{u_1\} \bullet u_3 = \{u_1, u_3\}, \Gamma_1 x_3 = \{u_1, u_2\}, \Gamma_1 x_4 = \Gamma_1 x_5 = \{u_2\};$$

$$\Gamma_2 U_1^k = \{\Gamma_2 u_1, \Gamma_2 u_2, \Gamma_2 u_3\}, \text{ где } \Gamma_2 u_3 = \{x_2\}.$$

Удаление вершины x_k из ультраграфа H_U или гиперграфа H – рис. 3. Реализует проектную операцию исключения компоненты из структуры объекта, например элемента из схемы.

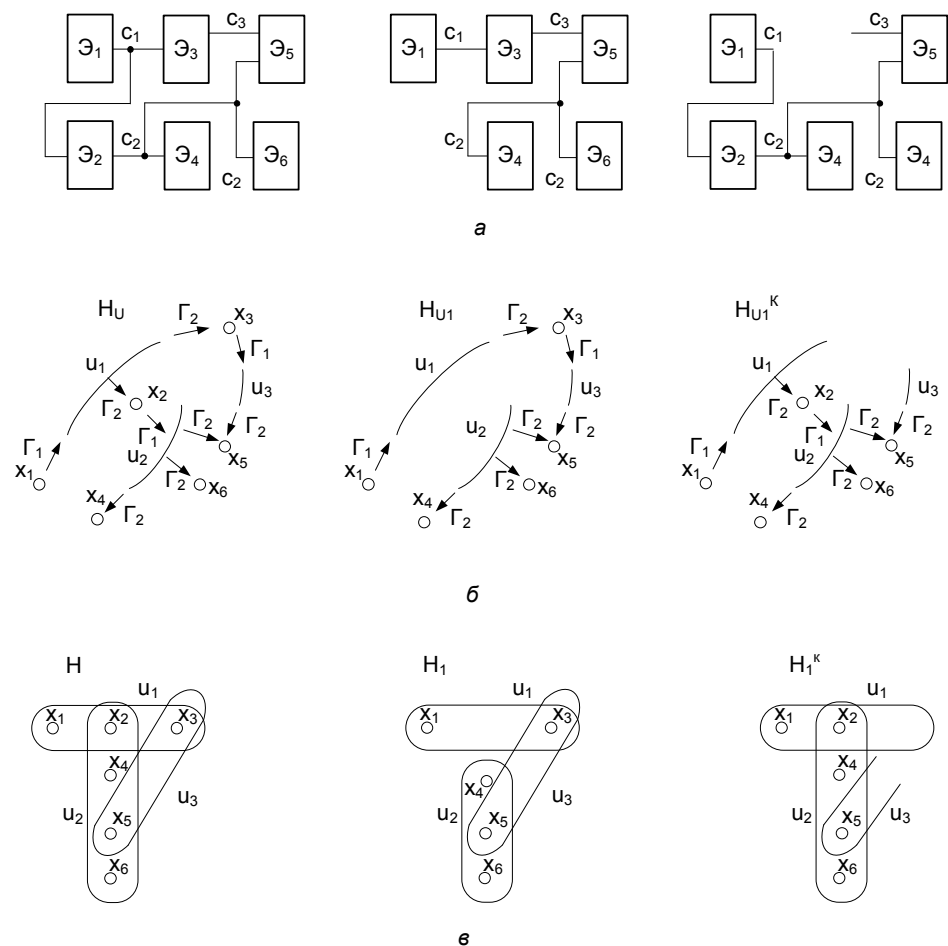


Рис. 3. Исходная схема и варианты удаления элементов (а), ее модель в виде ультраграфа H_U и соответствующие результаты операции: ультраграф H_{U1} и кусок ультраграфа H_{U1}^K (б); ее модель в виде гиперграфа H и результаты операции: гиперграф H_1 и кусок гиперграфа H_1^K (в)

Задается имя удаляемой вершины x_k .

Обозначение операции: $H_U(X, U) - x_k$ и $H(X, U) - x_k$ для ультра- и гиперграфа соответственно.

Условие корректности операции: $x_k \in X$.

При применении операции образуется одна компонента связности, если x_k не является вершиной, расщепляющей граф. В противном случае граф распадается на компоненты связности (смотри рис. 4) и при преобразовании графа необходимо определять компоненты связности и множества их вершин (компонентами связности могут быть как графы, так и их куски).

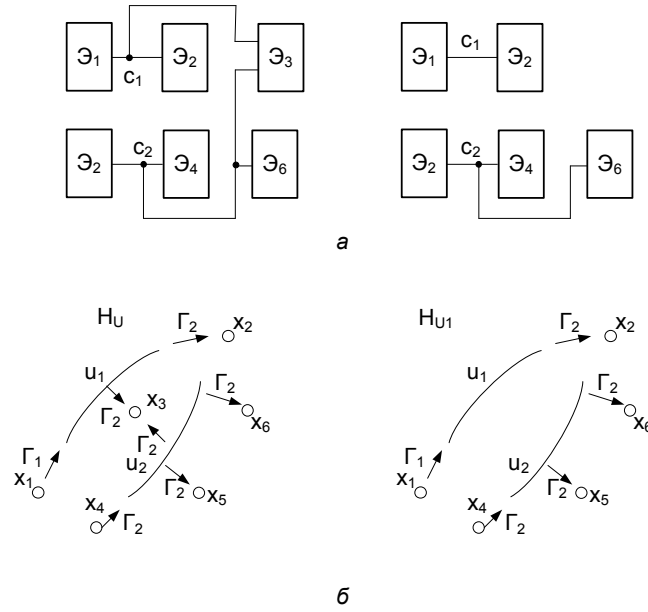


Рис. 4. Исходная схема и она же после удаления элемента Э3 (а), модель схемы в виде ультраграфа H_U и результат операции – две компоненты связности H_{U1} и H_{U2} (б)

Если x_k не является расщепляющей вершиной, в результате выполнения операции получаем:

– ультраграф $H_{U1}(X_1, U_1) = H_U(X, U) - x_k$, если

$$\forall u_j \in \{\Gamma_1 x_k \cup \Gamma_2 x_k\} (|\Gamma_2 u_j| + |\Gamma_1 u_j| > 2), \quad (1)$$

т. е. у всех ребер, инцидентных вершине x_k и которым инцидентна эта вершина, суммарное количество вершин образа и прообраза ребра больше двух (смотри, например, вершину x_2 на рис. 3, б);

– кусок ультраграфа $H_{U1}^K(X_1^K, U_1^K) = H_U(X, U) - x_k$, если

$$\exists u_j \in \{\Gamma_1 x_k \cup \Gamma_2 x_k\} (|\Gamma_2 u_j| + |\Gamma_1 u_j| = 2), \quad (2)$$

т. е. среди ребер, инцидентных удаляемой вершине и которым инцидентна эта вершина, есть ребро, суммарное количество вершин образа и прообраза которого равно двум (смотри, например, вершину x_3 на рис. 3, б);

– гиперграф $H_1(X_1, U_1) = H(X, U) - x_k$, если

$$\forall u_j \in \Gamma_1 x_k (|\Gamma_2 u_j| > 2), \quad (3)$$

– кусок гиперграфа $H_1^K(X_1^K, U_1^K) = H(X, U) - x_k$, если

$$\exists u_j \in \Gamma_1 x_k (|\Gamma_2 u_j| = 2). \quad (4)$$

Содержательно-формальное описание выполнения операции над ультраграфом $H_U(X, U)$, если вершина x_k не является расщепляющей и справедливо условие (1).

Аналитическое представление ультраграфа $H_{U_1}(X_1, U_1)$ получаем в результате выполнения следующих пунктов:

1. Формируем множества X_1 , $\Gamma_1 X_1$ и $\Gamma_2 X_1$, удаляя при копировании из X вершину x_k , а из $\Gamma_1 X$ и $\Gamma_2 X$ – подмножества $\Gamma_1 x_k$ и $\Gamma_2 x_k$ соответственно:

$$X_1 = X \setminus x_k; \Gamma_1 X_1 = \Gamma_1 X \setminus \Gamma_1 x_k; \Gamma_2 X_1 = \Gamma_2 X \setminus \Gamma_2 x_k.$$

2. Копируем множество U под именем U_1 : $U_1 = U$.

3. Создаем множество образов ребер $\Gamma_2 U_1$, занося в него $\Gamma_2 u_j$ из множества $\Gamma_2 U$, если ребро u_j не принадлежит множеству ребер, которым инцидентна вершина x_k , и удаляя вершину x_k из образов ребер, которым она инцидентна:

$$\Gamma_2 U_1 = \{\Gamma_2 u_j : u_j \notin \Gamma_2 x_k \vee \Gamma_2 u_j \setminus x_k : u_j \in \Gamma_2 x_k / u_j \in U_1, \Gamma_2 x_k \in \Gamma_2 X, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U\}.$$

4. Определяем множество прообразов ребер $\Gamma_1 U_1$, занося в него $\Gamma_1 u_j$ из множества $\Gamma_1 U$, если ребро u_j не инцидентно вершине x_k , и удаляя вершину x_k из прообраза ребра, если оно инцидентно ей:

$$\Gamma_1 U_1 = \{\Gamma_1 u_j : u_j \notin \Gamma_1 x_k \vee \Gamma_1 u_j \setminus x_k : u_j \in \Gamma_1 x_k / u_j \in U_1, \Gamma_1 x_k \in \Gamma_1 X, \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U\}.$$

5. Формируем множество образов вершин $F_1 X_1$ относительно предиката смежности $F_1(X_1, X_1)$, занося в $F_1 X_1$ образ вершины $x_i \in X_1$ из $F_1 X$, если вершина x_k не смежна вершине x_i , и её образ без вершины x_k в противном случае:

$$F_1 X_1 = \{F_1 x_i : x_k \notin F_1 x_i \vee F_1 x_i \setminus x_k : x_k \in F_1 x_i / x_i \in X_1, F_1 x_i \in F_1 X\}.$$

Примечание 1– Если дополнение элемента до множества и проверка принадлежности ему элемента являются операциями языка, в котором реализуются рассматриваемые преобразования, то для уменьшения количества операций формирования $F_1 X_1$ целесообразно использовать следующую формулу:

$$F_1X_1 = \{F_1x_i \setminus x_k / x_i \in X_1, F_1x_i \in F_1X\}.$$

6. Создаем множество прообразов $F_1^{-1}X_1$, занося в него прообраз вершины $x_i \in X_1$ из $F_1^{-1}X$, если вершине x_k не смежна вершина x_i , и её прообраз без вершины x_k в противном случае:

$$F_1^{-1}X_1 = \{F_1^{-1}x_i : x_k \notin F_1^{-1}x_i \vee F_1^{-1}x_i \setminus x_k : x_k \in F_1^{-1}x_i / x_i \in X_1, F_1^{-1}x_i \in F_1^{-1}X\}$$

или $F_1^{-1}X_1 = \{F_1^{-1}x_i \setminus x_k / x_i \in X_1, F_1^{-1}x_i \in F_1^{-1}X\}.$

7. Определяем множество образов ребер F_2U_1 , для чего переписываем в него F_2u_j из F_2U , если вершина x_k не инцидентна ребру u_j , в противном случае удаляем из F_2u_j подмножество тех ребер, которые не инцидентны ни одной из вершин множества Γ_2u_j кроме вершины x_k :

$$F_2U_1 = \{F_2u_j / u_j \in U_1\}, \text{ здесь}$$

$$F_2u_j = \begin{cases} F_2u_j \in F_2U : u_j \notin \Gamma_2x_k, \\ F_2u_j \setminus U_k' : u_j \in \Gamma_2x_k, \text{ где } U_k' = \{u_t \in \Gamma_1x_k : \Gamma_1u_t \cap \{\Gamma_2u_j \setminus x_k\} = \emptyset\}, \end{cases}$$

$$F_2u_j \in F_2U, \Gamma_2x_k \in \Gamma_2X, \Gamma_1x_k \in \Gamma_1X, \Gamma_1u_t \in \Gamma_1U, \Gamma_2u_j \in \Gamma_2U.$$

Примечание 2 – Условие «вершина x_k не инцидентна ребру u_j » естественным образом формулируется как $x_k \notin \Gamma_2u_j$. Однако запись условия в таком виде усложняет оценку «в худшем» количества операций, необходимых для определения F_2U_1 . В связи с этим условие $x_k \notin \Gamma_2u_j$ заменено логически эквивалентным $u_j \notin \Gamma_2x_k$. Аналогично будем поступать и в дальнейшем.

8. Создаем множество прообразов ребер $F_2^{-1}U_1$, копируя в него $F_2^{-1}u_j$ из $F_2^{-1}U$, если вершине x_k не инцидентно ребро u_j , и удаляя, в противном случае, из $F_2^{-1}u_j$ подмножество тех ребер, которым не инцидентна ни одна из вершин множества Γ_1u_j кроме вершины x_k :

$$F_2^{-1}U_1 = \{F_2^{-1}u_j / u_j \in U_1\}, \text{ здесь}$$

$$F_2^{-1}u_j = \begin{cases} F_2^{-1}u_j \in F_2^{-1}U : u_j \notin \Gamma_1x_k, \text{ где } \Gamma_1x_k \in \Gamma_1X, \\ F_2^{-1}u_j \setminus U_k'' : u_j \in \Gamma_1x_k, \text{ где } U_k'' = \{u_t \in \Gamma_2x_k : \Gamma_2u_t \cap \{\Gamma_1u_j \setminus x_k\} = \emptyset\}, \end{cases}$$

$$F_2^{-1}u_j \in F_2^{-1}U, \Gamma_1x_k \in \Gamma_1X, \Gamma_2x_k \in \Gamma_2X, \Gamma_2u_t \in \Gamma_2U, \Gamma_1u_j \in \Gamma_1U.$$

При выполнении условия (2) получаем кусок ультраграфа $H_{U_1}^K(X_1^K, U_1^K)$. Множества $X_1^K, U_1^K, \Gamma_1 X_1^K, \Gamma_2 X_1^K, \Gamma_2 U_1^K, \Gamma_1 U_1^K, F_1 X_1, F_1^{-1} X_1, F_2 U_1$ и $F_2^{-1} U_1$ определяются по тем же формулам, что и для ультраграфа $H_{U_1}(X_1, U_1)$, а множество ребер U_1^K разбивается на подмножества $U_{1\text{int}}^K$ и $U_{1\text{ext}}^K$, такие, что

$$U_{1\text{ext}}^K = \{u_j \in \{\Gamma_1 x_k \cup \Gamma_2 x_k\} : (|\Gamma_2 u_j| + |\Gamma_1 u_j|) = 2 / \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U, \Gamma_1 x_k \in \Gamma_1 X, \Gamma_2 x_k \in \Gamma_2 X\}; U_{1\text{int}}^K = U_1^K \setminus U_{1\text{ext}}^K.$$

Формальное описание операции над гиперграфом $H(X, U)$ при выполнении условия (3).

Множества гиперграфа $H_1(X_1, U_1)$ (смотри рис. 3, в) будут:

$$X_1 = X \setminus x_k; U_1 = U; \Gamma_1 X_1 = \Gamma_1 X \setminus \Gamma_1 x_k;$$

$$\Gamma_2 U_1 = \{\Gamma_2 u_j : u_j \notin \Gamma_1 x_k \vee \Gamma_2 u_j \setminus x_k : u_j \in \Gamma_1 x_k / u_j \in U_1, \Gamma_1 x_k \in \Gamma_1 X, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U\};$$

$$F_1 X_1 = \{F_1 x_i : x_k \notin F_1 x_i \vee F_1 x_i \setminus x_k : x_k \in F_1 x_i / x_i \in X_1, F_1 x_i \in F_1 X\};$$

$$F_2 U_1 = \{F_2 u_j / u_j \in U_1\}, \text{ здесь}$$

$$F_2 u_j = \begin{cases} F_2 u_j \in F_2 U : u_j \notin \Gamma_1 x_k, \text{ где } \Gamma_1 x_k \in \Gamma_1 X, \\ F_2 u_j \setminus U_k : u_j \in \Gamma_1 x_k, \text{ где } U_k = \{u_t \in \Gamma_1 x_k : \Gamma_2 u_t \cap \{\Gamma_2 u_j \setminus x_k\} = \emptyset\}, \end{cases}$$

$$F_2 u_j \in F_2 U, \Gamma_1 x_k \in \Gamma_1 X, \Gamma_2 u_t \in \Gamma_1 U, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U.$$

При выполнении условия (4) получаем кусок гиперграфа $H_1^K(X_1^K, U_1^K)$.

Множества $X_1^K, U_1^K, \Gamma_1 X_1^K, \Gamma_2 U_1^K, F_1 X_1^K, F_2 U_1^K$ определяются аналогично множествам $X_1, U_1, \Gamma_1 X_1, \Gamma_2 U_1, F_1 X_1, F_2 U_1$ гиперграфа $H_1(X_1, U_1)$. Множество U_1^K разбивается на два подмножества $U_{1\text{ext}}^K = \{u_j \in \Gamma_1 x_k : |\Gamma_2 u_j| = 2 / \Gamma_1 x_k \in \Gamma_1 X, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U\}$ и $U_{1\text{int}}^K = U_1^K \setminus U_{1\text{ext}}^K$.

Если вершина x_k является расщепляющей (смотри рис. 4, а) и определены множества вершин X_l некоторой компоненты связности, то остальные множества, например, ультраграфа $H_{U_l}(X_l, U_l, \Gamma_1 X_l, \Gamma_2 X_l, \Gamma_2 U_l, \Gamma_1 U_l)$ будут:

$$U_l = \{u_j \in \bigcup_{x_i \in X_l} \{\Gamma_1 x_i \cup \Gamma_2 x_i\} / \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X, \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X\};$$

$$\Gamma_1 X_l = \{\Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X / x_i \in X_l\};$$

$$\Gamma_2 X_l = \{\Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X / x_i \in X_l\};$$

$$\Gamma_2 U_l = \{\Gamma_2 u_j : u_j \notin \Gamma_2 x_k \vee \Gamma_2 u_j \setminus x_k : u_j \in \Gamma_2 x_k / u_j \in U_l, \Gamma_2 u_j \in \Gamma_2 U\};$$

$$\Gamma_1 U_l = \{\Gamma_1 u_j : u_j \notin \Gamma_1 x_k \vee \Gamma_1 u_j \setminus x_k : u_j \in \Gamma_1 x_k / u_j \in U_l, \Gamma_1 u_j \in \Gamma_1 U\}.$$

Асимптотическая оценка вычислительной сложности этой операции над ультра- и гиперграфом такая же, как и у операции добавления вершины.

Операция может выполняться над куском $H_U^k (X^k, U^k)$ ультра- или $H^k (X^k, U^k)$ гиперграфа. При этом среди компонент связности может появиться граф (графы) вида $G^{\rightarrow}(\emptyset, u)$, если для внешних ребер куска $H_U^k (X^k, U^k)$ выполняется условие

$$\exists u_j \in \{\Gamma_1 x_k \cup \Gamma_2 x_k\} (|\Gamma_2 u_j| + |\Gamma_1 u_j| = 1),$$

или вида $G^{\sim}(\emptyset, u)$, если для внешних ребер куска $H^k (X^k, U^k)$ выполняется условие $\exists u_j \in \Gamma_1 x_k (|\Gamma_2 u_j| = 1)$.

Пример. Удалим из схемы, показанной на рис. 3, а, элемент $э_2$. При представлении схемы ультраграфом (смотри рис. 3, б) это реализуется операцией удаления вершины x_2 , у которой $\Gamma_1 x_2 = \{u_2\}$ и $\Gamma_2 x_2 = \{u_1\}$. Так как $\Gamma_2 u_2 = \{x_4, x_5, x_6\}$, $\Gamma_1 u_2 = \{x_2\}$, $\Gamma_2 u_1 = \{x_2, x_4\}$ и $\Gamma_1 u_1 = \{x_1\}$, то $|\Gamma_2 u_2| + |\Gamma_1 u_2| = 4$ и $|\Gamma_2 u_1| + |\Gamma_1 u_1| = 3$, следовательно условие (1) выполняется.

В результате выполнения операции $H_{U_1} (X_1, U_1) = H_U (X, U) - x_k$ получим ультраграф, у которого в соответствии с приведенными выше выражениями:

$$X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} \setminus x_2 = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\}; U_1 = \{u_1, u_2, u_3\};$$

$$\Gamma_1 X_1 = \Gamma_1 X \setminus \Gamma_1 x_2 : \Gamma_1 x_1 = \{u_1\}, \Gamma_1 x_3 = \{u_3\}, \Gamma_1 x_4 = \Gamma_1 x_5 = \Gamma_1 x_6 = \emptyset;$$

$$\Gamma_2 X_1 = \Gamma_2 X \setminus \Gamma_2 x_2 : \Gamma_2 x_1 = \emptyset, \Gamma_2 x_3 = \{u_1\}, \Gamma_2 x_4 = \Gamma_2 x_6 = \{u_2\}, \Gamma_2 x_5 = \{u_2, u_3\};$$

$$\Gamma_2 U_1 : \Gamma_2 u_1 = \{x_2, x_3\} \setminus x_2 = \{x_3\}, \Gamma_2 u_2 = \{x_4, x_5, x_6\}, \Gamma_2 u_3 = \{x_5\};$$

$$\Gamma_1 U_1 : \Gamma_1 u_1 = \{x_1\}, \Gamma_1 u_2 = \{x_2\} \setminus x_2 = \emptyset, \Gamma_1 u_3 = \{x_3\};$$

$$F_1 X_1 : F_1 x_1 = \{x_2, x_3\} \setminus x_2 = \{x_3\}, F_1 x_3 = \{x_5\}, F_1 x_4 = F_1 x_5 = F_1 x_6 = \emptyset;$$

$$F_1^{-1} X_1 : F_1^{-1} x_1 = \emptyset, F_1^{-1} x_3 = \{x_1\}, F_1^{-1} x_4 = F_1^{-1} x_6 = \{x_2\} \setminus x_2 = \emptyset,$$

$$F_1^{-1} x_5 = \{x_2, x_3\} \setminus x_2 = \{x_3\};$$

$$F_2 U_1 : F_2 u_1 = \{u_2, u_3\} \setminus u_2 = \{u_3\}, F_2 u_2 = F_2 u_3 = \emptyset;$$

$$F_2^{-1} U_1 : F_2^{-1} u_1 = \emptyset, F_2^{-1} u_2 = \{u_1\} \setminus u_1 = \emptyset, F_2^{-1} u_3 = \{u_1\}.$$

При удалении вершины x_3 выполняется условие (2), так как у ребра u_3 , инцидентного этой вершине, $|\Gamma_2 u_3| + |\Gamma_1 u_3| = 2$, следовательно, результатом операции будет кусок ультраграфа $H_{U_1}^k$, у которого:

$$X_1^k = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} \setminus x_3 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6\};$$

$$U_1^k = \{u_1, u_2, u_3\}; U_{1\text{ ext}}^k = \{u_3\}, \text{ так как } \Gamma_1 x_3 = \{u_1, u_3\} \text{ и } |\Gamma_2 u_1| + |\Gamma_1 u_1| = 3, \\ U_{1\text{ int}}^k = \{u_1, u_2\};$$

$$\Gamma_1 X_1^k = \Gamma_1 X \setminus \Gamma_1 x_3 : \Gamma_1 x_1 = \{u_1\}, \Gamma_1 x_2 = \{u_2\}, \Gamma_1 x_4 = \Gamma_1 x_5 = \Gamma_1 x_6 = \emptyset;$$

$$\Gamma_2 X_1^k = \Gamma_2 X \setminus \Gamma_2 x_3 : \Gamma_2 x_1 = \emptyset, \Gamma_2 x_2 = \{u_1\}, \Gamma_2 x_4 = \Gamma_2 x_6 = \{u_2\}, \Gamma_2 x_5 = \{u_2, u_3\};$$

$$\Gamma_2 U_1^k : \Gamma_2 u_1 = \{x_2, x_3\} \setminus x_3 = \{x_2\}, \Gamma_2 u_2 = \{x_4, x_5, x_6\} \Gamma_2 u_3 = \{x_5\};$$

$$\Gamma_1 U_1^k : \Gamma_1 u_1 = \{x_1\}, \Gamma_1 u_2 = \{x_2\}, \Gamma_1 u_3 = \{x_3\} \setminus x_3 = \emptyset.$$

При использовании в качестве модели схемы гиперграфа, показанного на рис. 3, а, и удалении из него вершины x_2 множества $\Gamma_1 x_2 = \{u_1, u_2\}$, $\Gamma_2 u_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$, образ ребра $u_2 - \Gamma_2 u_2 = \{x_2, x_4, x_5, x_6\}$, т. е. условие (3) выполняется. Тогда для операции $H_1(X_1, U_1, \Gamma_1 X_1, \Gamma_2 U_1) = H(X, U, \Gamma_1 X, \Gamma_2 U) - x_k$ получаем:

$$X_1 = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\}; U_1 = \{u_1, u_2, u_3\};$$

$$\Gamma_1 X_1 = \Gamma_1 X \setminus \Gamma_1 x_2 : \Gamma_1 x_1 = \{u_1\}, \Gamma_1 x_3 = \{u_1, u_3\}, \Gamma_1 x_4 = \Gamma_1 x_6 = \{u_2\},$$

$$\Gamma_1 x_5 = \{u_2, u_3\};$$

$$\Gamma_2 U_1 : \Gamma_2 u_1 = \{x_1, x_2, x_3\} \setminus x_2 = \{x_1, x_3\}, \Gamma_2 u_2 = \{x_2, x_4, x_5, x_6\} \setminus x_2 = \{x_4, x_5, x_6\},$$

$$\Gamma_2 u_3 = \{x_3, x_5\}.$$

При $x_k = x_3$ в результате операции $H_1^k(X_1^k, U_1^k, \Gamma_1 X_1^k, \Gamma_2 U_1^k) = H(X, U, \Gamma_1 X, \Gamma_2 U) - x_k$ получим кусок гиперграфа, заданный множествами:

$$X_1^k = X \setminus x_3 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6\};$$

$$U_1^k = \{u_1, u_2, u_3\}, U_{1\text{ ext}}^k = \{u_3\}, \text{ так как } \Gamma_1 x_3 = \{u_1, u_3\} \text{ и } |\Gamma_2 u_1| = 3,$$

$$\text{а } |\Gamma_2 u_3| = 2, U_{1\text{ int}}^k = \{u_1, u_2\};$$

$$\Gamma_1 X_1^k = \Gamma_1 X \setminus \Gamma_1 x_3;$$

$$\Gamma_2 U_1^k : \Gamma_2 u_1 = \{x_1, x_2, x_3\} \setminus x_3 = \{x_1, x_2\}, \Gamma_2 u_2 = \{x_2, x_4, x_5, x_6\},$$

$$\Gamma_2 u_3 = \{x_3, x_5\} \setminus x_3 = \{x_5\}.$$

Удаление элемента z_3 из фрагмента схемы, показанной на рис. 4, а, осуществляется операцией удаления вершины x_3 из ультраграфа, представ-

ленного на рис. 4, б. Поскольку вершина x_3 является расщепляющей, в результате операции получаем две компоненты связности H_{U_1} и H_{U_2} . Пусть $X_l = X_2 = \{x_4, x_5, x_6\}$. Для компоненты связности H_{U_2} ($X_l, U_l, \Gamma_1 X_l, \Gamma_2 X_l, \Gamma_2 U_l, \Gamma_1 U_l$) получим:

$$U_l = \{u_2\};$$

$$\Gamma_1 X_l = \{\Gamma_1 x_4, \Gamma_1 x_5, \Gamma_1 x_6\}, \text{ где } \Gamma_1 x_4 = \{u_2\}, \Gamma_1 x_5 = \Gamma_1 x_6 = \emptyset;$$

$$\Gamma_2 X_l = \{\Gamma_2 x_4, \Gamma_2 x_5, \Gamma_2 x_6\}, \text{ где } \Gamma_2 x_6 = \emptyset, \Gamma_1 x_5 = \Gamma_1 x_6 = \{u_2\};$$

$$\Gamma_2 U_l = \{\Gamma_2 u_2\}, \text{ где } \Gamma_2 u_2 = \{x_3, x_5, x_6\} \setminus x_3 = \{x_5, x_6\};$$

$$\Gamma_1 U_l = \{\Gamma_1 u_2\}, \text{ где } \Gamma_1 u_2 = \{x_4\}.$$

Удаление ребра u_k из ультраграфа H_U или гиперграфа H – рис. 5.

Соответствует проектной операции отключения соединения от компонент объекта, например цепи от соединяемых ею элементов.

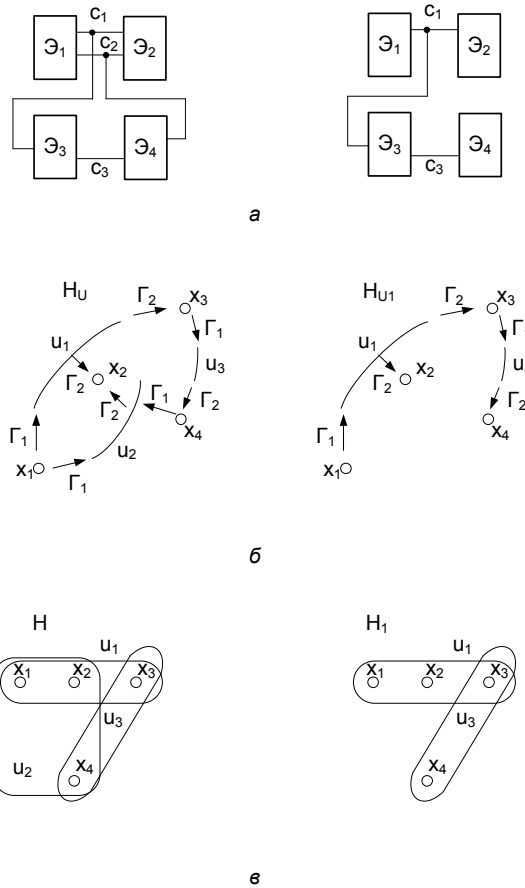


Рис. 5. Фрагмент схемы до и после удаления цепи c_2 (а), модель схемы в виде ультраграфа H_U и результат удаления ребра u_2 – ультраграф H_{U_1} (б), модель схемы в виде гиперграфа H и результат операции – гиперграф H_1 (в)

Задается имя удаляемого ребра u_k .

Обозначение операции: $H_U(X, U) - u_k$ для ультраграфа и $H(X, U) - u_k$ для гиперграфа.

Условие корректности операции: $u_k \in U$.

В результате применения операции будет получена одна компонента связности, если:

– ребро u_k не является перешейком, (5)

– ни одна из вершин, инцидентных удаляемому ребру и которым это ребро инцидентно, не является висячей, т. е.

для ультраграфа $\forall x_i \in \{\Gamma_2 u_k \cup \Gamma_1 u_k\} (|\Gamma_1 x_i| + |\Gamma_2 x_i|) > 1$ и (6)

для гиперграфа $\forall x_i \in \Gamma_2 u_k (|\Gamma_1 x_i| > 1)$. (7)

Невыполнение условий (5–7) приводит к появлению двух или более компонент связности. Например, отключение в схеме, показанной на рис. 6, а, цепи c_2 приведет к образованию двух компонент связности (смотри рис. 6, б). В этом случае в алгоритме необходимо предусмотреть процедуру определения компонент связности и множеств их вершин.

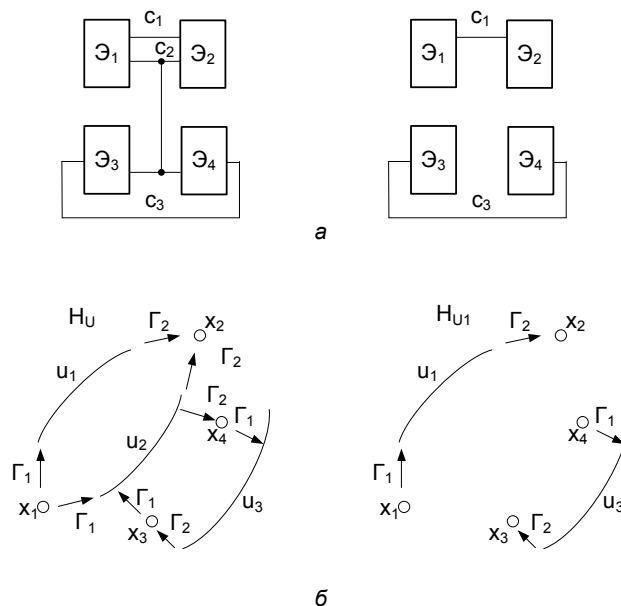


Рис. 6. Исходная схема и она же после удаления цепи c_2 (а), модель схемы в виде ультраграфа H_U и результат операции H_{U1} и H_{U2} (б)

Результатом выполнения операции при удовлетворении указанных выше условий является ультра- $H_{U_1}(X_1, U_1) = H_U(X, U) - u_k$ или гиперграф $H_1(X_1, U_1) = H(X, U) - u_k$.

Содержательно-формальное описание выполнения операции над ультра-графом $H_U(X, U)$.

Для получения результата операции – ультраграфа $H_{U_1}(X_1, U_1)$:

1. Копируем множество X под именем X_1 : $X_1 = X$.
2. Исключаем ребро u_k из множества U : $U_1 = U \setminus u_k$.
3. Определяем множество образов вершин $\Gamma_1 X_1$, занося в него $\Gamma_1 x_i$ из множества $\Gamma_1 X$, если вершина x_i не принадлежит множеству вершин, которым инцидентно ребро u_k , и удаляя ребро u_k из образов тех вершин, которым инцидентно это ребро:

$$\Gamma_1 X_1 = \{\Gamma_1 x_i : x_i \notin \Gamma_1 u_k \vee \Gamma_1 x_i \setminus u_k : x_i \in \Gamma_1 u_k / x_i \in X_1, \Gamma_1 x_i \in \Gamma_1 X, \Gamma_1 u_k \in \Gamma_1 U\}.$$

4. Формируем множество прообразов вершин $\Gamma_2 X_1$, занося в него $\Gamma_2 x_i$ из множества $\Gamma_2 X$, если вершина x_i не инцидентна ребру u_k , и удаляя ребро u_k из прообраза вершины в противном случае:

$$\Gamma_2 X_1 = \{\Gamma_2 x_i : x_i \notin \Gamma_2 u_k \vee \Gamma_2 x_i \setminus u_k : x_i \in \Gamma_2 u_k / x_i \in X_1, \Gamma_2 x_i \in \Gamma_2 X, \Gamma_2 u_k \in \Gamma_2 U\};$$

5. Создаем множество образов $\Gamma_2 U_1$ и прообразов $\Gamma_1 U_1$ ребер, копируя их из $\Gamma_2 U$ и $\Gamma_1 U$, исключая при этом $\Gamma_2 u_k$ и $\Gamma_1 u_k$ соответственно:

$$\Gamma_2 U_1 = \Gamma_2 U \setminus \Gamma_2 u_k; \Gamma_1 U_1 = \Gamma_1 U \setminus \Gamma_1 u_k.$$

6. Формируем множество образов вершин $F_1 X_1$ относительно предиката смежности $F_1(X_1, X_1)$, занося в $F_1 X_1$ образ вершины $x_i \in X_1$ из $F_1 X$, если она не принадлежит множеству вершин, которым инцидентно ребро u_k , и её образ без таких вершин, которые не инцидентны ни одному из ребер $\Gamma_1 x_i$, кроме ребра u_k , в противном случае:

$$F_1 X_1 = \{F_1 x_i : /x_i \in X_1\}, \text{ где}$$

$$F_1x_i = \begin{cases} F_1x_i \in F_1X : x_i \notin \Gamma_1u_k, \text{ где } \Gamma_1u_k \in \Gamma_1U, \\ \cup F_1x_i \setminus X_k : x_i \in \Gamma_1u_k, \text{ где } X_k = \{x_t \in F_1x_i : \Gamma_2x_t \cap \{\Gamma_1x_i \setminus u_k\} = \emptyset\}, \end{cases}$$

$$F_1x_i \in F_1X, \Gamma_2x_t \in \Gamma_2X, \Gamma_1x_i \in \Gamma_1X.$$

7. Определяем множество прообразов вершин $F_1^{-1}X_1$, копируя прообраз вершины $F_1^{-1}x_i$ из $F_1^{-1}X$, если она не инцидентна ребру u_k , в противном случае удаляя из $F_1^{-1}x_i$ те вершины, которым не инцидентны ни одно из ребер Γ_2x_i , кроме ребра u_k :

$$F_1^{-1}X_1 = \{ F_1^{-1}x_i : /x_i \in X_1 \}, \text{ здесь}$$

$$F_1^{-1}x_i = \begin{cases} F_1^{-1}x_i \in F_1^{-1}X : x_i \notin \Gamma_2u_k, \text{ где } \Gamma_2u_k \in \Gamma_2U, \\ \cup F_1^{-1}x_i \setminus X_k : x_i \in \Gamma_2u_k, \text{ где } X_k = \{x_t \in F_1^{-1}x_i : \Gamma_1x_t \cap \{\Gamma_2x_i \setminus u_k\} = \emptyset\}, \end{cases}$$

$$F_1^{-1}x_i \in F_1^{-1}X, \Gamma_1x_t \in \Gamma_1X, \Gamma_2x_i \in \Gamma_2X.$$

8. Формируем множество образов ребер F_2U_1 относительно предиката смежности $F_1(X_1, X_1)$, занося в F_2U_1 образ ребра $u_j \in U_1$ из F_2U , если ребро u_k не смежно ребру u_j , и его образ без ребра u_k в противном случае:

$$F_2U_1 = \{F_2u_j \setminus u_k / u_j \in U_1, F_2u_j \in F_2U\}.$$

9. Создаем множество прообразов $F_2^{-1}U_1$, занося в него прообраз ребра $u_j \in U_1$ из $F_2^{-1}U$, если ребру u_j не смежно ребро u_k , и его прообраз без ребра u_k в противном случае:

$$F_2^{-1}U_1 = \{F_2^{-1}u_j \setminus u_k / u_j \in U_1, F_2^{-1}u_j \in F_2^{-1}U\}.$$

Формальное описание операции над гиперграфом $H(X, U)$.

Множества гиперграфа $H_1(X_1, U_1)$ получаем по формулам:

$$X_1 = X; U_1 = U \setminus u_k;$$

$$\Gamma_1X_1 = \{\Gamma_1x_i : x_i \notin \Gamma_2u_k \vee \Gamma_1x_i \setminus u_k : x_i \in \Gamma_2u_k / x_i \in X_1, \Gamma_1x_i \in \Gamma_1X, \Gamma_2u_k \in \Gamma_2U\};$$

$$\Gamma_2U_1 = \Gamma_2U \setminus \Gamma_2u_k;$$

$$F_1X_1 = \{F_1x_i : /x_i \in X_1\}, \text{ здесь}$$

$$F_1x_i = \begin{cases} F_1x_i \in F_1X : x_i \notin \Gamma_2u_k, \text{ где } \Gamma_2u_k \in \Gamma_2U, \\ \cup F_1x_i \setminus X_k : x_i \in \Gamma_2u_k, \text{ где } F_1x_i \in F_1X, \end{cases}$$

$$X_k = \{x_t \in F_1x_i : \Gamma_1x_t \cap \{\Gamma_1x_i \setminus u_k\} = \emptyset\}, \Gamma_1x_t, \Gamma_1x_i \in \Gamma_1X.$$

$$F_2U_1 = \{F_2u_j \setminus u_k / u_j \in U_1, F_2u_j \in F_2U\}.$$

Если операция применяется для получения нескольких компонент связности, например ультраграфа, и определено множество вершин X_l некоторой компоненты H_{U_l} , то остальные множества, например, ультраграфа $H_{U_l}(X_l, U_l, \Gamma_1X_l, \Gamma_2X_l, \Gamma_2U_l, \Gamma_1U_l)$ будут:

$$U_l = \{u_j \in \bigcup_{x_i \in X_l} \{\Gamma_1x_i \cup \Gamma_2x_i\} / \Gamma_1x_i \in \Gamma_1X, \Gamma_2x_i \in \Gamma_2X\} \setminus u_k;$$

$$\Gamma_1X_l = \{\Gamma_1x_i : u_k \notin \Gamma_1x_i \vee \Gamma_1x_i \setminus u_k : u_k \in \Gamma_1x_i / x_i \in X_l, \Gamma_1x_i \in \Gamma_1X\};$$

$$\Gamma_2X_l = \{\Gamma_2x_i : x_i \notin \Gamma_2u_k \vee \Gamma_2x_i \setminus u_k : x_i \in \Gamma_2u_k / x_i \in X_l, \Gamma_2x_i \in \Gamma_2X,$$

$$\Gamma_2u_k \in \Gamma_2U\};$$

$$\Gamma_2U_l = \{\Gamma_2u_j \in \Gamma_2U / u_j \in U_l\}; \Gamma_1U_l = \{\Gamma_1u_j \in \Gamma_1U / u_j \in U_l\}.$$

Аналогичные выражения нетрудно получить и для гиперграфа H_l .

Асимптотическая оценка вычислительной сложности этой операции над ультра- и гиперграфом такая же, как и у операции добавления ребра.

Операция применима к кускам ультра- и гиперграфа $H_U^k(X^k, U^k)$ и $H^k(X^k, U^k)$. Решающие правила те же, что и для ультра- или гиперграфа. Результатом операции над куском ультраграфа или гиперграфа будет:

ультраграф $H_{U_1}(X_1, U_1)$ или гиперграф $H_1(X_1, U_1)$, если $U_{ext}^k = \{u_k\}$, и кусок ультраграфа $H_{U_1}^k(X^k, U^k)$ или гиперграфа $H_1^k(X_1^k, U_1^k)$, если $|U_{ext}^k| > 1$.

Пример. Отключим от элементов схемы, показанной на рис. 5, цепь s_2 . В ультраграфе схемы (смотри рис. 5, б) это реализуется операцией удаления ребра u_2 , которое не является перешейком. У этого ребра $\Gamma_2u_2 \cup \Gamma_1u_2 = \{x_2, x_1, x_4\}$, $\Gamma_2u_1 = \{x_2, x_3\}$ и $|\Gamma_1x_2| + |\Gamma_2x_2| = 2$, $|\Gamma_1x_3| + |\Gamma_2x_3| = 2$, $|\Gamma_1x_1| + |\Gamma_2x_1| = 2$, т. е. условие (6) выполняется.

В результате выполнения операции $H_{U_1}(X_1, U_1) = H_U(X, U) - u_k$ получим ультраграф H_{U_1} , у которого:

$$X_1 = X; U_1 = U \setminus u_2 = \{u_1, u_3\};$$

$$\Gamma_1X_1: \Gamma_1x_1 = \{u_1, u_2\} \setminus u_2 = \{u_1\}, \Gamma_1x_2 = \emptyset, \Gamma_1x_3 = \{u_3\}, \Gamma_1x_4 = \{u_2\} \setminus u_2 = \emptyset;$$

$$\Gamma_2X_1: \Gamma_2x_1 = \emptyset, \Gamma_2x_2 = \{u_1, u_2\} \setminus u_2 = \{u_1\}, \Gamma_2x_3 = \{u_1\}, \Gamma_2x_4 = \{u_3\};$$

$$\Gamma_2 U_1 = \{\Gamma_2 u_1, \Gamma_2 u_3\}, \text{ где } \Gamma_2 u_1 = \{x_2, x_3\}, \Gamma_2 u_3 = \{x_4\};$$

$$\Gamma_1 U_1 = \{\Gamma_1 u_1, \Gamma_1 u_3\}, \text{ где } \Gamma_1 u_1 = \{x_1\}, \Gamma_1 u_3 = \{x_3\};$$

$$F_1 X_1: F_1 x_1 = \{x_2, x_3\}, F_1 x_3 = \{x_4\}, F_1 x_2 = F_1 x_4 = \emptyset;$$

$$F_1^{-1} X_1: F_1^{-1} x_1 = \emptyset, F_1^{-1} x_2 = \{x_1, x_4\} \setminus x_4 = \{x_1\}, F_1^{-1} x_3 = \{x_1\}, F_1^{-1} x_4 = \{x_3\};$$

$$F_2 U_1: F_2 u_1 = \{u_3\}, F_2 u_3 = \{u_2\} \setminus u_2 = \emptyset;$$

$$F_2^{-1} U_1: F_2^{-1} u_1 = \emptyset, F_2^{-1} u_3 = \{u_1\}.$$

Удалим из гиперграфа, показанного на рис. 5, v , ребро u_2 . Тогда после операции $H_1 (X_1, U_1, \Gamma_1 X_1, \Gamma_2 U_1) = H (X, U, \Gamma_1 X, \Gamma_2 U) - u_k$ получим гиперграф, заданный множествами:

$$X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}; U_1 = \{u_1, u_3\};$$

$$\Gamma_1 X_1: \Gamma_1 x_1 = \Gamma_1 x_2 = \{u_1, u_2\} \setminus u_2 = \{u_1\}, \Gamma_1 x_3 = \{u_1, u_3\}, \Gamma_1 x_4 = \{u_2, u_3\} \setminus u_2 = \{u_3\};$$

$$\Gamma_2 U_1 = \{\Gamma_2 u_1, \Gamma_2 u_2, \Gamma_2 u_3\} \setminus \Gamma_2 u_2 = \{\Gamma_2 u_1, \Gamma_2 u_3\}, \text{ где } \Gamma_2 u_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, \Gamma_2 u_3 = \{x_3, x_4\}.$$

Продолжение и окончание работы будут опубликованы в последующих выпусках.

Литература

1. Овчинников В.А. Математические модели объектов задач структурного синтеза: Наука и образование. Инженерное образование: Эл. науч. издание. – 2009. – № 4.