

## Математические модели объектов задач структурного синтеза

При решении задач структурного синтеза в качестве аппарата формализации объектов проектирования широко применяется теория графов. Использование в качестве формального описания объекта графа определенного вида – обыкновенных неориентированного и ориентированного, гипер- и ультраграфа позволяет получать модели, адекватные в смысле полноты и правильности отображения информации, которая требуется для решения задачи.

Аппарат теории обыкновенных графов глубоко развит, определены операции на графах, сформулированы теоремы, леммы и т. п., разработано много алгоритмов решения различных задач структурного синтеза. Гипер- и особенно ультраграфы исследованы в меньшей степени. Автору не известен единый подход к определению понятий ультра-, гипер- и обыкновенных графов. Все это не позволяет использовать значительные результаты, полученные в теории обыкновенных графов, для решения тех задач структурного синтеза, в которых моделями объектов являются гипер- и ультраграфы. В данной статье автор предлагает такой подход, показывая при этом связь между ультра- гипер- и обыкновенными графами. Приведены формальные правила, связывающие матричное и аналитическое представления для каждого вида графов, а также выражения для оценки характеристик компонент графа.

В соответствии с предлагаемым подходом граф – это два непересекающихся множества  $X$  – вершин и  $U$  – ребер, на элементах которых задана пара двуместных предикатов-отношений *инцидентности*  $\Gamma_1(X, U)$  и  $\Gamma_2(U, X)$ . Предикат  $\Gamma_1(X, U)$  соответствует такой связи между элементами множеств  $X$  и  $U$ , которая содержательно определяется выраже-

нием – «вершинам множества  $X$  инцидентны ребра множества  $U$ », а предикат  $\Gamma_2(U, X)$  можно записать как «ребрам множества  $U$  инцидентны вершины множества  $X$ ».

Предикаты  $\Gamma_1(X, U)$  и  $\Gamma_2(U, X)$  таковы, что для всех графов при  $X \neq \emptyset$  и  $U \neq \emptyset$  справедливо:

$$\Gamma_1(x_i, u_j) = \langle \text{и} \rangle \rightarrow (\Gamma_2(u_j, x_k) = \langle \text{и} \rangle \vee \Gamma_2(u_j, x_i) = \langle \text{и} \rangle). \quad (1)$$

Положим  $X = \{x_1, x_2\}$ ,  $U = \{u_1\}$ . Тогда, изображая вершины кружками, ребра – отрезком дуги или овалом, истинность предиката  $\Gamma_1(x_i, u_j)$  – стрелкой, идущей от  $x_i$  к  $u_j$ , а истинность предиката  $\Gamma_2(u_j, x_i)$  – стрелкой, идущей от  $u_j$  к  $x_i$ , получим, если  $\Gamma_1(x_1, u_1) = \langle \text{и} \rangle$  и  $\Gamma_2(u_1, x_1) = \langle \text{л} \rangle$ , геометрическую интерпретацию выражения (1), представленную на рисунке 1,а. При  $\Gamma_1(x_1, u_1) = \langle \text{и} \rangle$  и  $\Gamma_2(u_1, x_1) = \langle \text{и} \rangle$  геометрическая интерпретация этого выражения показана на рисунке 1,б.

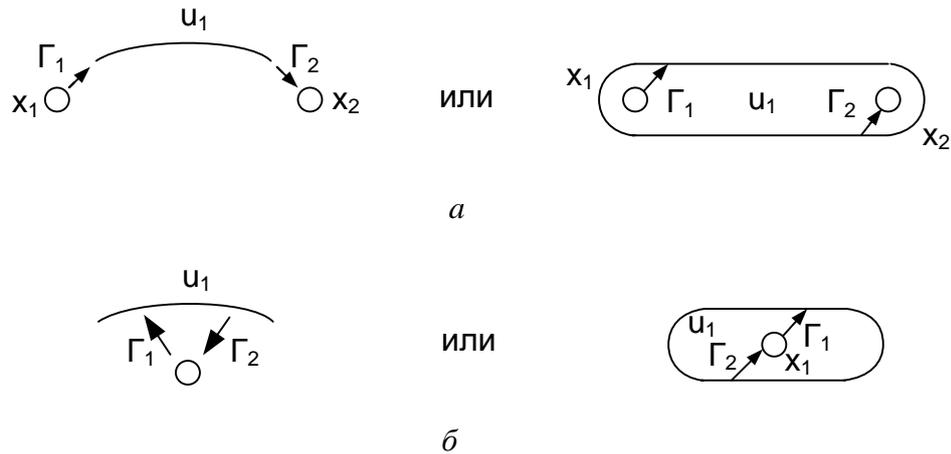


Рисунок 1 – Геометрическая интерпретация выражения (1)

На элементах множеств  $X$  и  $U$  определены также двуместные предикаты-отношения смежности  $F_1(X, X)$  и  $F_2(U, U)$ . Вершине  $x_i$  смежна вершина  $x_t$ , если существует ребро  $u_j$ , инцидентное вершине  $x_i$ , такое, что вершина  $x_t$  инцидентна этому же ребру. Ребру  $u_j$  смежно ребро  $u_k$ , если существует вершина  $x_i$ , инцидентная ребру  $u_j$ , такая, что ребро  $u_k$

инцидентно этой же вершине. Таким образом, понятие смежности вторично по отношению к понятию инцидентности.

Предлагаемая трактовка графов допускает существование в них *петель* и *кратных* ребер. Вид графа – обыкновенные неориентированный и ориентированный, гипер- и ультраграф – определяется свойствами предикатов инцидентности  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

**Ультраграфы.** Определенный выше граф называется *ультраграфом*  $H_U(X, U, \Gamma_1, \Gamma_2)$ , если предикаты  $\Gamma_1(X, U)$  и  $\Gamma_2(U, X)$  обладают следующим свойством

$$\exists u_j \in U (|\Gamma_1 u_j| + |\Gamma_2 u_j|) > 2, \quad (2)$$

т. е. в графе есть хотя бы одно ребро, суммарное количество вершин, которым оно инцидентно и которые инцидентны ему, больше двух.

Если допустить возможность существования в ультраграфе петель, то наличие петли устанавливается условием

$$\exists u_j \in U (\Gamma_1 u_j = \Gamma_2 u_j = x_i). \quad (3)$$

На рисунке 2 приведено изображение ультраграфа, у которого  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ,  $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ , причем  $u_3$  – петля при вершине  $x_5$ .

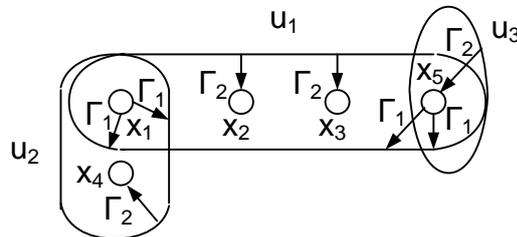


Рисунок 2 – Ультраграф

Для визуального анализа ультраграфа иногда более наглядным будет его изображение в виде *двудольного графа* (графа Кенига). В этом случае ребра, как и вершины, представляются кружками, а истинность предикатов  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  как и раньше – стрелками. Такое изображение ультраграфа, показанного на рисунке 2, представлено на рисунке 3,а .

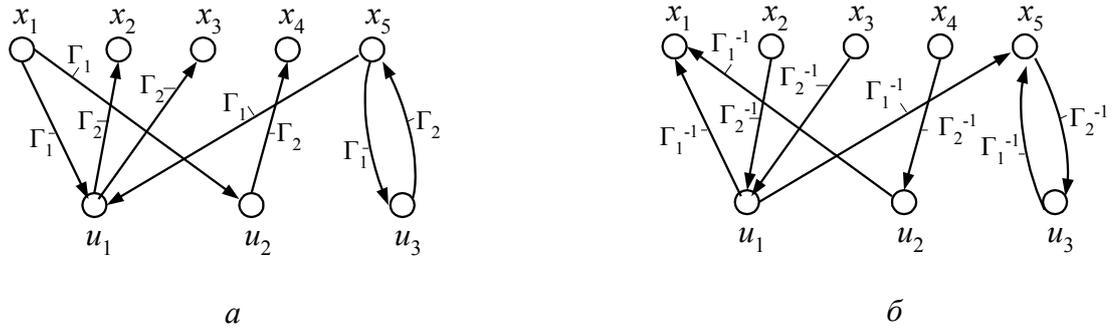


Рисунок 3 – Изображение ультраграфа, показанного на рисунке 2, в виде двудольного графа (а) и геометрическая интерпретация предикатов  $\Gamma_2^{-1}(X, U)$  и  $\Gamma_1^{-1}(U, X)$  этого же ультраграфа (б)

**Представление ультраграфа матрицами инцидентности.** Полным и достаточно наглядным способом формального задания ультраграфа является его представление через две матрицы инцидентности  $A_1$  и  $A_2$ , где  $A_1$  – матрица истинности предиката  $\Gamma_1(X, U)$  и  $A_2$  – матрица истинности предиката  $\Gamma_2(U, X)$ .

Матрица инцидентности  $A_1$ , задающая связь между вершинами и ребрами, – это прямоугольная матрица размером  $n \times m$ , где  $n = |X|$ ,  $m = |U|$ . Элементы этой матрицы определяются по правилу

$$a_{1\ i,j} = \begin{cases} 1 & \text{если } \Gamma_1(x_i, u_j) = \langle \text{и} \rangle \\ 0 & \text{если } \Gamma_1(x_i, u_j) = \langle \text{л} \rangle \end{cases},$$

где  $i = 1, n$ ;  $j = 1, m$ .

Матрица инцидентности  $A_2$  задает связь между ребрами и вершинами. Ее строки соответствуют ребрам, а столбцы – вершинам (размер матрицы  $m \times n$ ). Элементы матрицы  $A_2$  определяются по правилу

$$a_{2\ j,i} = \begin{cases} 1 & \text{если } \Gamma_2(u_j, x_i) = \langle \text{и} \rangle, \\ 0 & \text{если } \Gamma_2(u_j, x_i) = \langle \text{л} \rangle. \end{cases}$$

Матрицы  $A_1$  и  $A_2$  ультраграфа, показанного на рисунке 2, имеют вид:

$$A_1 = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \Bigg|, \quad A_2 = \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \Bigg|.$$

**Аналитическое представление ультраграфа – образами и про- образами множеств вершин и ребер относительно предикатов  $\Gamma_1(X, U)$  и  $\Gamma_2(U, X)$ .** Аналитически ультраграф будет задан полностью, если заданы множества вершин  $X$ , ребер  $U$  и образы этих множеств относительно предикатов  $\Gamma_1(X, U)$  и  $\Gamma_2(U, X)$  соответственно. Рассмотрим сначала данный способ представления.

Образом множества  $X$  относительно предиката  $P(X, Y)$  является множество подмножеств

$$PX = \{Px_i / x_i \in X\}, \quad Px_i = \{y_j \in Y : Px_i(y_j) = \langle \text{и} \rangle\},$$

где  $Px_i$  – характеристическое подмножество предиката-свойства  $Px_i(Y)$ , т. е. образ элемента  $x_i \in X$  относительно этого предиката.

Зафиксировав в  $\Gamma_1(X, U)$  некоторую вершину  $x_i \in X$ , получим предикат-свойство  $\Gamma_1 x_i(U)$  – «вершине  $x_i$  инцидентны ребра множества  $U$ », истинность которого задает  $i$ -я строка матрицы  $A_1$  предиката  $\Gamma_1(X, U)$ . Таким образом образ вершины  $x_i \in X$  относительно предиката  $\Gamma_1(X, U)$  – это подмножество  $U_i^+ \subseteq U$  инцидентных ей ребер. Оно является характеристическим множеством  $\Gamma_1 x_i$  предиката-свойства  $\Gamma_1 x_i(U)$ :

$$U_i^+ = \Gamma_1 x_i = \{u_j \in U : \Gamma_1 x_i(u_j) = \langle \text{и} \rangle\}, \quad U_i^+ \subseteq U.$$

Множество подмножеств ребер, инцидентных вершинам  $x_i \in X$ , т. е. образ множества  $X$  относительно предиката  $\Gamma_1$ , будет

$$\Gamma_1 X = \{\Gamma_1 x_i / x_i \in X\}.$$

Подставив в предикат  $\Gamma_2(U, X)$  ребро  $u_j$ , получим предикат-свойство  $\Gamma_{2u_j}(X)$  – «ребру  $u_j$  инцидентны вершины множества  $X$ », истинность которого задает  $j$ -я строка матрицы предиката  $\Gamma_2(U, X)$ . Образом ребра  $u_j \in U$  относительно предиката  $\Gamma_2(U, X)$  является подмножество  $X_j^+ \subseteq X$  вершин, инцидентных этому ребру:

$$X_j^+ = \Gamma_{2u_j} = \{x_i \in X : \Gamma_{2u_j}(x_i) = \langle \text{и} \rangle\}, \quad X_j^+ \subseteq X.$$

Образ множества ребер  $U$  относительно того же предиката будет задаваться множеством характеристических подмножеств предикатосвойств  $\Gamma_{2u_j}(X)$ , т. е. строк матрицы  $A_2$ :

$$\Gamma_2 U = \{ \Gamma_{2u_j} / u_j \in U \}.$$

Ультраграф данным способом будет задан, если заданы множества вершин  $X$ , ребер  $U$  и их образы, т. е. множества подмножеств  $\Gamma_1 X$  и  $\Gamma_2 U$ . Ультраграф при данном способе представления будем обозначать как  $H_U(X, U, \Gamma_1 X, \Gamma_2 U)$ . Ультраграф, изображенный на рисунке 2, этим способом будет задан через:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \quad U = \{u_1, u_2, u_3\},$$

$$\Gamma_1 X = \{ \Gamma_1 x_i / i = 1, 5 \},$$

где  $\Gamma_1 x_1 = \{u_1, u_2\}$ ,  $\Gamma_1 x_2 = \Gamma_1 x_3 = \Gamma_1 x_4 = \emptyset$ ,  $\Gamma_1 x_5 = \{u_1, u_3\}$ ,

$$\Gamma_2 U = \{ \Gamma_{2u_j} / j = 1, 3 \},$$

где  $\Gamma_{2u_1} = \{x_2, x_3\}$ ,  $\Gamma_{2u_2} = \{x_4\}$ ,  $\Gamma_{2u_3} = \{x_5\}$ .

Рассмотренное представление ультраграфа, так же как и матричное, является полным, однако затрудняет выполнение формальных преобразований и просмотр структуры ультраграфа. Например, для того чтобы определить, каким вершинам инцидентно ребро  $u_j \in U$ , необходимо проверить принадлежность этого ребра всем  $\Gamma_1 x_i$  и сформировать подмножество вершин согласно выражению:

$$X_j^- = \{ x_i \in X : u_j \in \Gamma_1 x_i \}.$$

Аналогичное замечание справедливо и для определения множества ребер, которым инцидентна вершина  $x_i \in X$ .

Для задания таких множеств воспользуемся понятием «*прообраз множества относительно предиката*». По определению прообраз множества – это его образ *относительно обратного предиката*.

Рассмотрим определение множества ребер, которым инцидентна некоторая вершина  $x_i$  ультраграфа. Инцидентность ребрам множества  $U$  вершин множества  $X$  задает предикат-отношение  $\Gamma_2(U, X)$ , что наглядно иллюстрирует рисунок 3,а. Ребра, которым инцидентны вершины множества  $X$ , определяет предикат-отношение  $\Gamma_2^{-1}(X, U)$  «вершины множества  $X$  инцидентны ребрам множества  $U$ ». Он является обратным к предикату  $\Gamma_2(U, X)$ . Элементы предиката  $\Gamma_2^{-1}(X, U)$  определяются по правилу:

$$\forall u_j \in U, \forall x_i \in X (\Gamma_2(u_j, x_i) = \langle \text{и} \rangle \rightarrow \Gamma_2^{-1}(x_i, u_j) = \langle \text{и} \rangle).$$

Для ультраграфа, изображенного на рисунке 2, геометрическая интерпретация предиката  $\Gamma_2^{-1}(X, U)$  показана на рисунке 3,б, а матрица истинности  $A_2^{-1}$  имеет вид

$$A_2^{-1} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Зафиксировав в предикате  $\Gamma_2^{-1}(X, U)$  вершину  $x_i$ , получим предикат-свойство  $\Gamma_2^{-1}x_i(U)$  – «*вершина  $x_i$  инцидентна ребрам множества  $U$* », характеристическое множество которого является прообразом вершины  $x_i$

относительно предиката  $\Gamma_2(X, U)$ , т. е. множеством ребер, которым она инцидентна. Истинность предиката-свойства  $\Gamma_2^{-1}x_i(U)$  задает  $i$ -й вектор-строка матрицы предиката  $\Gamma_2^{-1}(X, U)$ . Из правила определения элементов предиката  $\Gamma_2^{-1}(X, U)$  следует, что таблица истинности этого предиката получается транспонированием матрицы инцидентности  $A_2$ . Отсюда множество ребер  $U_i^-$ , которым инцидентна вершина  $x_i \in X$  – ее прообраз относительно предиката  $\Gamma_2(U, X)$ , – это характеристическое множество  $i$ -го вектора-столбца матрицы  $A_2$ , т. е. предиката-свойства  $\Gamma_2x_i(U)$ :

$$U_i^- = \Gamma_2x_i = \{u_j \in U : \Gamma_2x_i(u_j) = \langle \text{и} \rangle\}, \quad U_i^- \subseteq U.$$

Прообразом множества  $X$  относительно предиката  $\Gamma_2(U, X)$  будет множество характеристических подмножеств предикатов-свойств  $\Gamma_2x_i(U)$ :

$$\Gamma_2X = \{\Gamma_2x_i / x_i \in X\}.$$

Аналогично множество вершин, которым инцидентно ребро  $u_j \in U$  – его прообраз  $\Gamma_1u_j$  относительно предиката  $\Gamma_1(X, U)$  – это характеристическое множество  $X_j^-$  предиката-свойства  $\Gamma_1^{-1}u_j(X)$ , соответствующего  $j$ -у вектору-строке матрицы истинности  $A_1^{-1}$  предиката  $\Gamma_1^{-1}(U, X)$ , или предиката-свойства  $\Gamma_1u_j(X)$ , задаваемого  $j$ -м вектором-столбцом матрицы  $A_1$ :

$$X_j^- = \Gamma_1u_j = \{x_i \in X : \Gamma_1u_j(x_i) = \langle \text{и} \rangle\}, \quad X_j^- \subseteq X.$$

Прообразом множества  $U$  относительно предиката  $\Gamma_1(X, U)$  является множество характеристических подмножеств предикатов-свойств  $\Gamma_1u_j(X)$ :

$$\Gamma_1U = \{\Gamma_1u_j / u_j \in U\}.$$

Для ультраграфа, изображенного на рисунке 2, геометрическая интерпретация предиката  $\Gamma_1^{-1}(U, X)$  показана на рисунке 3,б, а матрица истинности  $A_1^{-1}$  имеет вид

$$A_1^{-1} = \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right. \end{array}.$$

У ультраграфа, показанного на рисунке 2,

$$\Gamma_2 X: \Gamma_2 x_1 = \emptyset, \Gamma_2 x_2 = \{u_1\}, \Gamma_2 x_3 = \{u_1\}, \Gamma_2 x_4 = \{u_2\}, \Gamma_2 x_5 = \{u_3\},$$

$$\Gamma_1 U: \Gamma_1 u_1 = \{x_1, x_5\}, \Gamma_1 u_2 = \{x_1\}, \Gamma_1 u_3 = \{x_5\}.$$

Для данного способа представления ультраграф будем обозначать  $H_U(X, U, \Gamma_1 X, \Gamma_2 X, \Gamma_2 U, \Gamma_1 U)$ .

**Предикаты смежности  $F_1(X, X)$  вершин и  $F_2(U, U)$  ребер ультраграфа.** Установим связь предиката смежности вершин  $F_1(X, X)$  с предикатами инцидентности  $\Gamma_1(X, U)$  и  $\Gamma_2(U, X)$ . Рассмотрим для этого пару вершин  $x_i, x_t \in X$ . Для этих вершин связь  $F_1(X, X)$  с  $\Gamma_1(X, U)$  и  $\Gamma_2(U, X)$  определяется выражением

$$F_1(x_i, x_t) = \langle \text{и} \rangle : \exists u_j \in U (\Gamma_1(x_i, u_j) = \langle \text{и} \rangle \& \Gamma_2(u_j, x_t) = \langle \text{и} \rangle). \quad (4)$$

Здесь  $x_t$  – вершина, смежная вершине  $x_i$ ,  $u_j$  – ребро, инцидентное вершине  $x_i$ , этому ребру инцидентна вершина  $x_t$  (смотри рисунок 4, а).

Инцидентные вершине  $x_i$  ребра задают характеристическое множество  $U_i^+ = \Gamma_1 x_i$  предиката-свойства  $\Gamma_1 x_i(U)$ . Вершины, инцидентные ребру  $u_j \in U_i^+$ , определяет предикат-свойство  $\Gamma_2 u_j(X)$ . Таким образом, подставляя в  $\Gamma_2(U, X)$  ребра множества  $U_i^+ \subseteq U$ , получаем множество предикатов-свойств  $\{\Gamma_2 u_j(X)\}$ ,  $u_j \in U_i^+ = \Gamma_1 x_i$ , каждый из которых задает вершины, смежные вершине  $x_i$  по ребру  $u_j$ .

Поскольку в общем случае  $|U_i^+| > 1$  и вершина  $x_i \in X$  будет смежна вершине  $x_i \in X$ , если  $x_i$  инцидентна хотя бы одному ребру из  $U_i^+ = \Gamma_1 x_i$ , вершины, смежные вершине  $x_i$  в ультраграфе, будут задаваться предикатом – свойством

$$F_1 x_i(X) = \bigvee_{u_j \in U_i^+} \Gamma_2 u_j(X). \quad (5)$$

У ультраграфа, показанного на рисунке 4, а,  $U_i^+ = \{u_j, u_k\}$ . Пусть  $X = \{x_i, x_t, x_r, x_p\}$ , т. е. элементы множества  $X$  записаны в указанной последовательности. Тогда характеристические вектора предикатов  $\Gamma_2 u_j(X)$ ,  $\Gamma_2 u_k(X)$  и  $F_1 x_i(X)$  будут:

$$\Gamma_2 u_j(X) = \{0, 1, 1, 0\}, \Gamma_2 u_k(X) = \{0, 1, 0, 1\} \text{ и}$$

$$F_1 x_i(X) = \Gamma_2 u_j(X) \vee \Gamma_2 u_k(X) = \{0, 1, 1, 1\}.$$

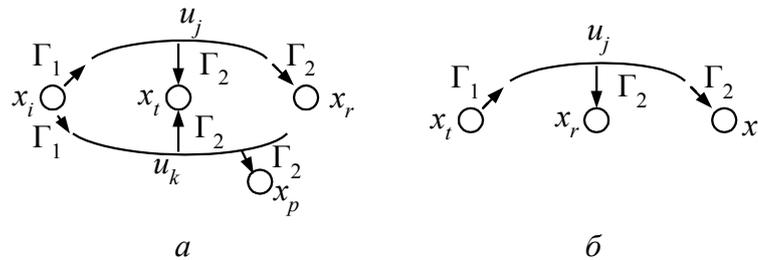


Рисунок 4 – К определению смежности вершин ультраграфа: вершине  $x_i$  смежны вершины  $x_t, x_r, x_p$  (а); вершине  $x_i$  не смежны вершины  $x_t, x_r$  (б);

Распространяя выкладки для  $\forall x_i \in X$ , получим предикат-отношение смежности вершин ультраграфа

$$F_1(X, X) = \{ F_1 x_i(X) / x_i \in X \}. \quad (6)$$

Матрица истинности этого предиката является матрицей смежности  $R_1$  вершин ультраграфа. Элементы этой матрицы по матрицам инцидентности  $A_1$  и  $A_2$  определяются по правилу:

$$r_{1i,t} = \begin{cases} 1 - \text{если } \exists a_{1i,j}=1 \ \& \ a_{2j,t}=1, \\ 0 - \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где  $i, t = 1, n$ ;  $n = |X|$ ,  $j = 1, m$ ;  $m = |U|$ .

Матрица смежности  $R_1$  вершин  $x_i \in X$  ультраграфа, изображенного на рисунке 2, будет:

$$R_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Наглядно смежность вершин множества  $X$  ультраграфа  $H_U(X, U)$  может быть представлена графом смежности  $G(X, X)$ . Граф смежности, соответствующий матрице  $R_1$ , показан на рисунке 5. На этом рисунке вершины ультраграфа изображены кружками, а истинность  $F_1(x_i, x_t)$  – стрелками.

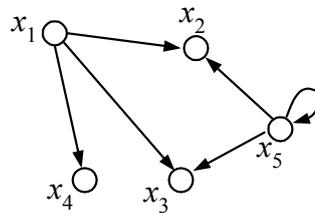


Рисунок 5 – Граф смежности вершин ультраграфа, изображенного на рисунке 2

При выполнении некоторых преобразований ультраграфа и просмотре его структуры бывает необходимо знать, *каким вершинам смежна данная*. Эта связь задается предикатом  $F_1^{-1}(X, X)$  обратным к предикату  $F_1(X, X)$ . Установим связь предиката  $F_1^{-1}(X, X)$  с предикатами инцидентности  $\Gamma_1(X, U)$  и  $\Gamma_2(U, X)$ . Рассмотрим для этого пару вершин  $x_i$ ,

$x_t \in X$ . Для этих вершин связь  $F_1^{-1}(X, X)$  с  $\Gamma_1(X, U)$  и  $\Gamma_2(U, X)$  определяется выражением

$$F_1^{-1}(x_i, x_t) = \langle \text{и} \rangle : \exists u_j \in U (\Gamma_2(u_j, x_i) = \langle \text{и} \rangle \ \& \ \Gamma_1(x_t, u_j) = \langle \text{и} \rangle). \quad (7)$$

Здесь  $x_t$  – вершина, которой смежна вершина  $x_i$ ,  $u_j$  – ребро, которому инцидентна вершина  $x_i$ , это ребро инцидентно вершине  $x_t$  (смотри рисунок 4, б).

Ребра, которым инцидентна вершина  $x_i$ , задают характеристическое множество  $U_i^- = \Gamma_2 x_i$  предиката-свойства  $\Gamma_2 x_i(U)$ . Вершины, которым инцидентно ребро  $u_j \in U_i^+$ , определяет предикат-свойство  $\Gamma_1 u_j(X)$ . Таким образом, подставляя в  $\Gamma_1(X, U)$  ребра множества  $U_i^- \subseteq U$ , получаем множество предикатов-свойств  $\{\Gamma_1 u_j(X)\}$ ,  $u_j \in U_i^- = \Gamma_2 x_i$ , каждый из которых определяет вершины, которым смежна вершина  $x_i$  по ребру  $u_j$ .

Вершины, которым смежна вершина  $x_i$  в ультраграфе, будут задаваться предикатом – свойством

$$F_1^{-1} x_i(X) = \bigvee_{u_j \in U_i^-} \Gamma_1 u_j(X). \quad (8)$$

У ультраграфа, показанного на рисунке 4, б,  $U_i^- = \{u_j\}$ . Пусть  $X = \{x_i, x_t, x_r\}$ , т. е. элементы множества  $X$  записаны в указанной последовательности. Тогда характеристические вектора предикатов  $\Gamma_1 u_j(X)$  и  $F_1^{-1} x_i(X)$  будут:

$$\Gamma_1 u_j(X) = \{0, 1, 0\} \text{ и } F_1^{-1} x_i(X) = \Gamma_1 u_j(X) = \{0, 1, 0\}.$$

Распространяя выкладки для  $\forall x_i \in X$ , получим обратный предикат-отношение смежности вершин ультраграфа

$$F_1^{-1}(X, X) = \{ F_1^{-1} x_i(X) / x_i \in X \}. \quad (9)$$

Матрицу истинности этого предиката обозначим через  $R_1^{-1}$ . Элемент этой матрицы  $r_1^{-1}{}_{i,j} = 1$  означает, что вершина  $x_i$  смежна вершине  $x_j$  ( $r_{1i,j} = 1$  в матрице  $R_1$  означает, что вершине  $x_i$  смежна вершина  $x_j$ ).

По определению обратного предиката  $F_1^{-1}(X, X)$  область его истинности при заданном предикате  $F_1(X, X)$  задается правилом

$$\forall x_i, x_j \in X (F_1(x_i, x_j) = \langle\langle \text{и} \rangle\rangle \rightarrow F_1^{-1}(x_j, x_i) = \langle\langle \text{и} \rangle\rangle). \quad (10)$$

Таким образом, матрица смежности  $R_1^{-1}$  ультраграфа (матрица истинности предиката  $F_1^{-1}$ ) получается транспонированием матрицы  $R_1$ . Матрица  $R_1^{-1}$  ультраграфа, показанного на рисунке 2, будет:

$$R_1^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Предикат смежности  $F_2(U, U)$  ребер ультраграфа определяется аналогично предикату смежности вершин  $F_1(X, X)$ . Формально связь предиката  $F_2(U, U)$  с предикатами  $\Gamma_2(U, X)$  и  $\Gamma_1(X, U)$  устанавливает условие:

$$F_2(u_j, u_k) = \langle\langle \text{и} \rangle\rangle: \exists x_i \in X (\Gamma_2(u_j, x_i) = \langle\langle \text{и} \rangle\rangle \& \Gamma_1(x_i, u_k) = \langle\langle \text{и} \rangle\rangle). \quad (11)$$

Здесь  $u_k$  – ребро, смежное ребру  $u_j$ , а  $x_i$  – вершина, инцидентная ребру  $u_j$ , этой вершине инцидентно ребро  $u_k$  (смотри рисунок 6, а).

Вершины, инцидентные ребру  $u_j \in U$ , задают характеристическое множество  $X_j^+ = \Gamma_2 u_j$  предиката-свойства  $\Gamma_2 u_j(X)$ . Ребра, инцидентные вершине  $x_i \in X$ , определяют предикат-свойство  $\Gamma_1 x_i(U)$ . Подставляя в  $\Gamma_1(X, U)$  вершины множества  $X_j^+ \subseteq X$ , получаем множество предикатов-свойств  $\{\Gamma_1 x_i(U)\}$ ,  $x_i \in X_j^+$ , каждый из которых задает ребра, смежные ребру  $u_j$  по вершине  $x_i$ .

Так как в общем случае  $|X_j^+| > 1$  и ребро  $u_k$  будет смежно ребру  $u_j$ , если  $u_k$  инцидентно хотя бы одной вершине из  $X_j^+$ , то ребра, смежные ребру  $u_j \in U$  в ультраграфе, будут задаваться предикатом

$$F_2u_j(U) = \bigvee_{x_i \in X_j^+} \Gamma_1x_i(U). \quad (12)$$

У ультраграфа, показанного на рисунке 6, а,  $X_j^+ = \Gamma_2u_j = \{x_i, x_r, x_p\}$ .

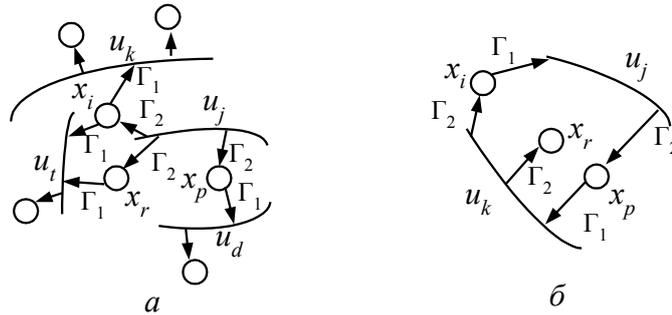


Рисунок 6 – К определению смежности ребер ультраграфа: ребру  $u_j$  смежны ребра  $u_k$ ,  $u_d$ ,  $u_i$  (а); ребро  $u_j$  смежно ребру  $u_k$ , ребра  $u_k$  и  $u_d$  не смежны (б)

Пусть  $U = \{u_j, u_k, u_d, u_i\}$ . Тогда характеристические вектора предикатов-свойств  $\Gamma_1x_i(U)$ ,  $\Gamma_1x_r(U)$ ,  $\Gamma_1x_p(U)$  и  $F_2u_j(U)$  будут:

$$\Gamma_1x_i(U) = \{0, 1, 0, 1\},$$

$$\Gamma_1x_r(U) = \{0, 0, 0, 1\},$$

$$\Gamma_1x_p(U) = \{0, 0, 1, 0\} \text{ и}$$

$$F_2u_j(U) = \Gamma_1x_i(U) \vee \Gamma_1x_r(U) \vee \Gamma_1x_p(U) = \{0, 1, 1, 1\}.$$

Для  $\forall x_i \in X$  получим предикат-отношение смежности ребер ультраграфа

$$F_2(U, U) = \{ F_2u_j(U) / u_j \in U \}.$$

Элементы матрицы смежности  $R_2$  ребер ультраграфа определяются по правилу:

$$r_{2j,k} = \begin{cases} 1 - \text{если } \exists a_{2j,i}=1 \ \& \ a_{1i,k}=1, \\ 0 - \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где  $j, k = 1, m$ ;  $m = |U|$ ,  $i = 1, n$ ;  $n = |X|$ ,  $a_{2j,i}$  и  $a_{1i,k}$  – элементы матриц инцидентности  $A_2$  и  $A_1$  соответственно. Матрицы инцидентности  $A_1$ ,  $A_2$  и смежности  $R_2$  ребер ультраграфа, изображенного на рисунке 7, будут:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad R_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

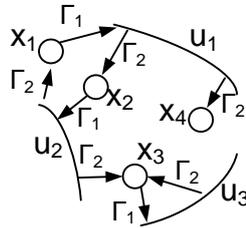


Рисунок 7 – К определению матрицы смежности ребер ультраграфа

Граф смежности  $G(U, U)$  ребер ультраграфа, соответствующий матрице  $R_2$ , показан на рисунке 8. Здесь ребра ультраграфа изображены кружками, а истинность  $F_2(u_j, u_k)$  – стрелками.

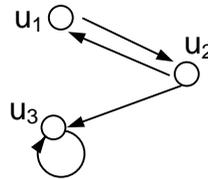


Рисунок 8 – Граф смежности ребер ультраграфа, показанного на рисунке 7

Для всех  $u_j \in U$  ребра, которым они смежны, задаются предикатом  $F_2^{-1}(U, U)$ , обратным предикату  $F_2(U, U)$ . Значения предиката  $F_2^{-1}(U, U)$  по значениям предикатов  $\Gamma_2(U, X)$  и  $\Gamma_1(X, U)$  определяются по выражению:

$$F_2^{-1}(u_j, u_k) = \langle \text{и} \rangle: \exists x_i \in X (\Gamma_1(x_i, u_j) = \langle \text{и} \rangle \& \Gamma_2(u_k, x_i) = \langle \text{и} \rangle). \quad (13)$$

Здесь  $u_k$  – ребро, которому смежно ребро  $u_j$ ,  $x_i$  – вершина, которой инцидентно ребро  $u_j$ , эта вершина инцидентна ребру  $u_k$  (смотри рисунок 6,б).

Вершины, которым инцидентно ребро  $u_j \in U$ , задает характеристическое множество  $X_j^- = \Gamma_1 u_j$  предиката-свойства  $\Gamma_1 u_j(X)$ . Ребра, которым инцидентна вершина  $x_i \in X$ , определяет предикат-свойство  $\Gamma_2 x_i(U)$ .

Подставляя в  $\Gamma_2(X, U)$  вершины множества  $X_j^- \subseteq X$ , получаем множество предикатов-свойств  $\{\Gamma_2 x_i(U)\}$ ,  $x_i \in X_j^-$ , каждый из которых задает ребра, которым смежно ребро  $u_j$  по вершине  $x_i$ .

Ребра, которым смежно ребро  $u_j \in U$  в ультраграфе, будут задаваться предикатом

$$F_2^{-1}u_j(U) = \bigvee_{x_i \in X_j^-} \Gamma_2 x_i(U). \quad (14)$$

У ультраграфа, показанного на рисунке 6, б,  $X_j^- = \Gamma_1 u_j = \{x_i\}$ . Пусть  $U = \{u_k, u_j\}$ . тогда характеристические вектора предикатов-свойств  $\Gamma_2 x_i(U)$  и  $F_2^{-1}u_j(U)$  будут:

$$\Gamma_2 x_i(U) = \{1, 0\} \text{ и } F_2^{-1}u_j(U) = \{1, 0\}.$$

Для  $\forall x_i \in X$  получим обратный предикат-отношение смежности ребер ультраграфа

$$F_2^{-1}(U, U) = \{F_2^{-1}u_j(U) / u_j \in U\}.$$

Матрицу истинности этого предиката обозначим как  $R_2^{-1}$ . Элемент этой матрицы  $r_2^{-1}{}_{ij} = 1$  означает, что ребро  $u_i$  смежно ребру  $u_j$  ультраграфа.

Предикат  $F_2^{-1}(U, U)$ , как обратный предикату  $F_2(U, U)$ , получается по правилу:

$$\forall u_j, u_k \in U (F_2(u_j, u_k) = \langle \text{и} \rangle \rightarrow F_2^{-1}(u_k, u_j) = \langle \text{и} \rangle). \quad (15)$$

Отсюда матрица истинности  $R_2^{-1}$  предиката  $F_2^{-1}(U, U)$  является транспонированной матрицей  $R_2$ . Для ультраграфа, показанного на рисунке 7, эта матрица будет:

$$R_2^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

**Образы и прообразы множеств  $X$  и  $U$  относительно предикатов смежности вершин  $F_1(X, X)$  и ребер  $F_2(U, U)$  соответственно.** Для каждой вершины  $x_i \in X$  ультраграфа  $H_U(X, U)$  ее образ  $F_1 x_i$  относитель-

но предиката смежности  $F_1(X, X)$  – множество смежных ей вершин  $X_i^+$ , определяется характеристическим множеством предиката-свойства  $F_1x_i(X)$

$$X_i^+ = F_1x_i = \{x_k \in X: F_1x_i(x_k) = \langle \text{и} \rangle\}.$$

Истинность предиката-свойства  $F_1x_i(X)$  задается  $i$ -м вектором-строкой матрицы  $R_1$ .

Множество вершин  $X_i^-$ , которым смежна вершина  $x_i$ , т. е. ее прообраз  $F_1^{-1}x_i$  относительно предиката  $F_1(X, X)$ , является характеристическим множеством предиката-свойства  $F_1^{-1}x_i(X)$ :

$$X_i^- = F_1^{-1}x_i = \{x_k \in X: F_1^{-1}x_i(x_k) = \langle \text{и} \rangle\}.$$

Истинность предиката-свойства  $F_1^{-1}x_i(X)$  задается  $i$ -м вектором-строкой матрицы  $R_1^{-1}$  или соответствующим вектором-столбцом матрицы  $R_1$ .

По аналитическому представлению ультраграфа в виде  $H_U(X, U, \Gamma_1X, \Gamma_2X, \Gamma_1U, \Gamma_2U)$  для каждой вершины  $x_i \in X$  ее образ  $F_1x_i$  определяется на основании (5) по правилу

$$F_1x_i = \bigcup_{u_j \in \Gamma_1x_i} \Gamma_2u_j, \quad (16)$$

а прообраз  $F_1^{-1}x_i$  в соответствии с (8) по выражению

$$F_1^{-1}x_i = \bigcup_{u_j \in \Gamma_2x_i} \Gamma_1u_j. \quad (17)$$

Образ и прообраз множества вершин  $X$  относительно предиката смежности  $F_1(X, X)$  будут:

$$F_1X = \{F_1x_i / x_i \in X\}$$

и

$$F_1^{-1}X = \{F_1^{-1}x_i / x_i \in X\}.$$

Для ультраграфа, изображенного на рисунке 2, множества образов  $F_1X$  и прообразов  $F_1^{-1}X$  его вершин относительно предиката смежности  $F_1$  будут:

$$\begin{array}{ll} F_1X = \{F_1x_i / i = 1,5\}: & F_1^{-1}X = \{F_1^{-1}x_i / i = 1,5\}: \\ F_1x_1 = \{x_2, x_3, x_4\}, & F_1^{-1}x_1 = \emptyset, \quad F_1^{-1}x_4 = \{x_1\}, \\ F_1x_2 = F_1x_3 = F_1x_4 = \emptyset, & F_1^{-1}x_2 = \{x_1, x_5\}, \quad F_1^{-1}x_5 = \{x_5\}. \\ F_1x_5 = \{x_2, x_3, x_5\}, & F_1^{-1}x_3 = \{x_1, x_5\}, \end{array}$$

Образ  $F_2u_j$  ребра  $u_j \in U$  ультраграфа  $H_U(X, U)$  относительно предиката  $F_2(U, U)$ , т. е. множество  $U_j^+$  смежных ему ребер, определяется характеристическим множеством предиката-свойства  $F_2u_j(U)$ :

$$U_j^+ = F_2u_j = \{u_k \in U: F_2u_j(u_k) = \langle\langle\text{и}\rangle\rangle\}.$$

Истинность предиката  $F_2u_j(U)$  задается  $j$ -м вектором-строкой матрицы  $R_2$ .

Прообраз  $F_2^{-1}u_j$  ребра  $u_j \in U$  относительно предиката  $F_2(U, U)$ , т. е. множество ребер  $U_j^-$ , которому это ребро смежно, является характеристическим множеством предиката-свойства  $F_2^{-1}u_j(U)$ :

$$U_j^- = F_2^{-1}u_j = \{u_k \in U: F_2^{-1}u_j(u_k) = \langle\langle\text{и}\rangle\rangle\}.$$

Истинность предиката  $F_2^{-1}u_j(U)$  задается  $j$ -м вектором-строкой матрицы  $R_2^{-1}$  или соответствующим вектором-столбцом матрицы  $R_2$ .

По аналитическому представлению ультраграфа для каждого ребра  $u_j \in U$  его образ  $F_2u_j$  определяется на основании (12) по правилу

$$F_2u_j = \bigcup_{x_i \in \Gamma_2u_j} \Gamma_1x_i, \quad (18)$$

а прообраз  $F_2^{-1}u_j$  в соответствии с (14) по выражению

$$F_2^{-1}u_j = \bigcup_{x_i \in \Gamma_1u_j} \Gamma_2x_i. \quad (19)$$

Образ и прообраз множества ребер  $U$  относительно предиката смежности  $F_2(U, U)$  будут:

$$F_2U = \{F_2u_j / u_j \in U\}$$

и 
$$F_2^{-1}U = \{F_2^{-1}u_j / u_j \in U\}.$$

Для ультраграфа, изображенного на рисунке 7, множества образов  $F_2U$  и прообразов  $F_2^{-1}U$  его ребер относительно предиката смежности  $F_2$  будет:

$$\begin{array}{ll} F_2U = \{F_2u_j / j = 1,3\}: & F_2^{-1}U = \{F_2^{-1}u_j / j = 1,3\}: \\ F_2u_1 = \{u_2\}, & F_2^{-1}u_1 = \{u_2\}, \\ F_2u_2 = \{u_1, u_3\}, & F_2^{-1}u_2 = \{u_1\}, \\ F_2u_3 = \{u_3\}, & F_2^{-1}u_3 = \{u_2, u_3\}. \end{array}$$

Отметим в заключение, что совокупность матриц смежности, а также образов и прообразов множеств вершин  $X$  и ребер  $U$  ультраграфа  $H_U(X, U)$  относительно предикатов смежности вершин  $F_1(X, X)$  и ребер  $F_2(U, U)$  задает ультраграф не полностью.

Если в ходе анализа и преобразования ультраграфа необходимо знать связи вершин и ребер, определяемые как предикатами инцидентности, так и предикатами смежности, ультраграф может быть задан в форме  $H_U(X, U, \Gamma_1X, \Gamma_2X, \Gamma_2U, \Gamma_1U, F_1X, F_1^{-1}X, F_2U, F_2^{-1}U)$  либо необходимым подмножеством образов и прообразов вершин и ребер относительно предикатов инцидентности и смежности с указанием в скобках используемого набора образов и/или прообразов. Аналогично будем поступать и в отношении гиперграфа, обыкновенного ориентированного и неориентированного графов, которые будут рассмотрены ниже.

**Характеристики вершин и ребер ультраграфа.** К характеристикам вершин ультраграфа относятся:

- $\rho^+(x_i)$  – полустепень исхода, т. е. количество ребер, инцидентных вершине  $x_i \in X$ . По матрице инцидентности  $A_1$  показатель рассчитывается по формуле:

$$\rho^+(x_i) = \sum_{j=1}^m a_{1i,j}.$$

Для ультраграфа, изображенного на рисунке 2,  $\rho^+(x_1) = 2$ .

При аналитическом представлении ультраграфа этот показатель определяется по выражению:

$$\rho^+(x_i) = |\Gamma_1 x_i|.$$

Для ультраграфа, показанного на рисунке 9,  $U_i^+ = \Gamma_1 x_i = \{u_1\}$  и  $\rho^+(x_i) = 1$ ;

- $\rho^-(x_i)$  – полустепень захода, т. е. количество ребер, которым инцидентна вершина  $x_i \in X$ . По матрице инцидентности  $A_2$  показатель рассчитывается по формуле:

$$\rho^-(x_i) = \sum_{j=1}^m a_{2j,i}.$$

Для ультраграфа, изображенного на рисунке 2,  $\rho^-(x_1) = 0$ .

При аналитическом представлении ультраграфа этот показатель определяется по выражению:

$$\rho^-(x_i) = |\Gamma_2 x_i|.$$

Для ультраграфа (смотри рисунок 9)  $U_i^- = \Gamma_2 x_i = \{u_2, u_3\}$  и  $\rho^-(x_i) = 2$ ;

- $A(x_i) = \{a_k(x_i) / k = 1, |U_i^+|\}$  – вектор, элемент которого  $a_k(x_i)$  равен количеству вершин, инцидентных ребру  $u_j \in U_i^+ = \Gamma_1 x_i$ :

$$a_k(x_i) = |\Gamma_2 u_j|.$$

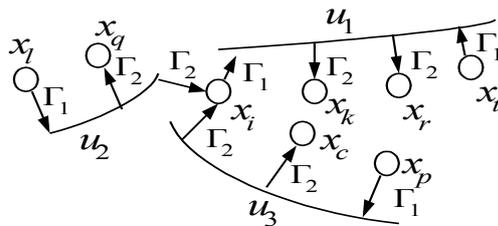


Рисунок 9 – К определению характеристик вершин ультраграфа

Для ультраграфа, показанного на рисунке 9, образ вершины  $x_i$  будет

$\Gamma_1 x_i = \{u_1\}$ , а прообраз ребра  $u_1 - \Gamma_2 u_1 = \{x_k, x_r\}$ . Отсюда  $A(x_i) = \{2\}$ ;

- $B(x_i) = \{b_k(x_i) / k=1, |U_i^+|\}$  – вектор, каждый его элемент  $b_k(x_i)$  равен количеству вершин, которым инцидентно ребро  $u_j \in U_i^+ = \Gamma_1 x_i$ :

$$b_k(x_i) = |\Gamma_1 u_j| - 1.$$

Для ребра  $u_1 \in \Gamma_1 x_i$  (смотри рисунок 9) его прообраз  $\Gamma_1 u_1 = \{x_i, x_i\}$  тогда  $B(x_i) = \{1\}$ ;

- $C(x_i) = \{c_k(x_i) / k = 1, |U_i^-|\}$  – вектор, элемент которого  $c_k(x_i)$  равен количеству вершин, инцидентных ребру  $u_f \in U_i^- = \Gamma_2 x_i$ :

$$c_k(x_i) = |\Gamma_2 u_f| - 1.$$

Для вершины  $x_i$  (смотри рисунок 9)  $\Gamma_2 x_i = \{u_2, u_3\}$ . Для этих ребер их образы  $\Gamma_2 u_2 = \{x_i, x_q\}$ ,  $\Gamma_2 u_3 = \{x_i, x_c\}$ . Отсюда  $C(x_i) = \{1, 1\}$ ;

- $D(x_i) = \{d_k(x_i) / k = 1, |U_i^-|\}$  – вектор, каждый его элемент  $d_k(x_i)$  равен количеству вершин, инцидентных ребру  $u_f \in U_i^- = \Gamma_2 x_i$ :

$$d_k(x_i) = |\Gamma_1 u_f|.$$

Для ребер  $u_2, u_3 \in \Gamma_2 x_i$  того же ультраграфа их прообразы  $\Gamma_1 u_2 = \{x_i\}$  и  $\Gamma_1 u_3 = \{x_p\}$ . Тогда  $D(x_i) = \{1, 1\}$ ;

- $s^+(x_i)$  – количество вершин, смежных вершине  $x_i \in X$ . По матрице смежности  $R_1$  этот показатель рассчитывается по формуле:

$$s^+(x_i) = \sum_{j=1}^m r_{1i,j}.$$

Для вершины  $x_1$  ультраграфа, показанного на рисунке 2,  $s^+(x_1) = 3$ .

При известных образах вершин относительно предиката смежности  $F_1(X, X)$

$$s^+(x_i) = |F_1 x_i|.$$

Для вершины  $x_i$  ультраграфа, изображенного на рисунке 9,  $\Gamma_1 x_i = \{u_1\}$ ,  $F_1 x_i = \Gamma_2 u_1 = \{x_k, x_r\}$ ,  $s^+(x_i) = 2$ ;

- $s^-(x_i)$  – количество вершин, которым смежна вершина  $x_i \in X$ . При матричном представлении ультраграфа показатель рассчитывается как

$$s^-(x_i) = \sum_{j=1}^m r_{1j,i}^{-1} \quad \text{или} \quad s^-(x_i) = \sum_{j=1}^m r_{1j,i}$$

по матрицам смежности  $R_1^{-1}$  и  $R_1$  соответственно. Для вершины  $x_2$  ультраграфа, изображенного на рисунке 2,  $s^-(x_2) = 2$ .

По прообразу вершины относительно предиката смежности  $F_1(X, X)$  показатель определяется по выражению

$$s^-(x_i) = |F_1^{-1}x_i|.$$

Для вершины  $x_i$  ультраграфа, изображенного на рисунке 9,  $\Gamma_2x_i = \{u_2, u_3\}$ ,  $\Gamma_1u_2 \cup \Gamma_1u_3 = F_1^{-1}x_i = \{x_l, x_p\}$ ,  $s^-(x_i) = 2$ ;

- $e(x_i) = |\{u_j \in U : \Gamma_1u_j = \Gamma_2u_j = x_i\}|$  – количество петель вершины  $x_i$ .

*Характеристики ребер ультраграфа:*

- $\rho^+(u_j)$  – количество вершин множества  $X_j^+ = \Gamma_2u_j$ , инцидентных ребру  $u_j$ . По матрице инцидентности  $A_2$  этот показатель рассчитывается по формуле:

$$\rho^+(u_j) = \sum_{i=1}^n a_{2j,i}.$$

Для ультраграфа, изображенного на рисунке 2,  $\rho^+(u_1) = 2$ .

При аналитическом представлении ультраграфа этот показатель определяется по выражению:

$$\rho^+(u_j) = |\Gamma_2u_j|.$$

Для ребра  $u_1$  ультраграфа (смотри рисунок 10)  $\Gamma_2u_1 = \{x_i, x_k, x_r\}$  и  $\rho^+(u_1) = 3$ ;

- $\rho^-(u_j) = |\Gamma_1 u_j|$  – количество вершин множества  $X_j^- = \Gamma_1 u_j$ , которым инцидентно ребро  $u_j$ . По матрице инцидентности  $A_1$  показатель рассчитывается по формуле:

$$\rho^-(u_j) = \sum_{i=1}^n a_{1ij}.$$

Для ультраграфа, изображенного на рисунке 2,  $\rho^-(u_1) = 2$ .

При аналитическом представлении ультраграфа этот показатель определяется по выражению:

$$\rho^-(u_j) = |\Gamma_1 u_j|.$$

Для ребра  $u_1$  ультраграфа, показанного на рисунке 10,  $\Gamma_1 u_1 = \{x_i\}$ ,

$$\rho^-(u_1) = 1;$$

- $A(u_j) = \{a_k(u_j) / k = 1, |X_j^+|\}$  – вектор, элемент которого  $a_k(u_j)$  равен количеству ребер, инцидентных вершине  $x_i \in X_j^+ = \Gamma_2 u_j$ :

$$a_k(u_j) = |\Gamma_1 x_i|.$$

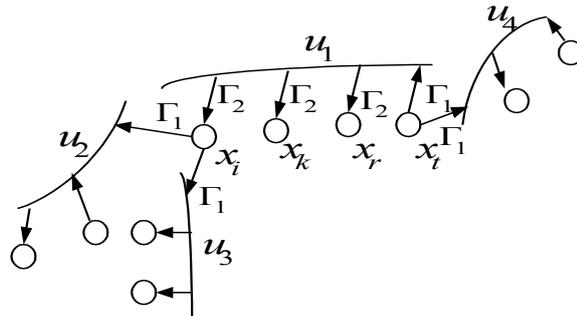


Рисунок 10 – К определению характеристик ребер ультраграфа

Для ребра  $u_1$  ультраграфа, показанного на рисунке 10,  $\Gamma_2 u_1 = \{x_i, x_k, x_r\}$ , и для вершин  $x_i, x_k, x_r$  их образы равны  $\Gamma_1 x_i = \{u_2, u_3\}$ ,  $\Gamma_1 x_k = \emptyset$ ,  $\Gamma_1 x_r = \emptyset$ .

Тогда  $A(u_1) = \{2, 0, 0\}$ ;

- $B(u_j) = \{b_k(u_j) / k = 1, |X_j^+|\}$  – вектор, каждый его элемент  $b_k(u_j)$  равен количеству ребер, которым инцидентна вершина  $x_i \in X_j^+ = \Gamma_2 u_j$ :

$$b_k(u_j) = |\Gamma_2 x_i| - 1.$$

Для всех вершин  $x_i, x_k, x_r \in \Gamma_2 u_1$  (смотри рисунок 10) прообразы  $\Gamma_2 x_i = \Gamma_2 x_k = \Gamma_2 x_r = \{u_1\}$  и  $B(u_1) = \{0, 0, 0\}$ ;

- $C(u_j) = \{c_k(u_j) / k = 1, |X_j^-|\}$  – вектор, элемент которого  $c_k(u_j)$  равен количеству ребер, инцидентных вершине  $x_i \in X_j^- = \Gamma_1 u_j$ :

$$c_k(u_j) = |\Gamma_1 x_i| - 1.$$

Для ребра  $u_1$  (смотри рисунок 10)  $\Gamma_1 u_1 = \{x_t\}$  и для вершины  $x_t$  ее образ  $\Gamma_1 x_t = \{u_1, u_4\}$  и  $C(u_1) = \{1\}$ ;

- $D(u_j) = \{d_k(u_j) / k = 1, |X_j^-|\}$  – вектор, каждый его элемент  $d_k(u_j)$  равен количеству ребер, которым инцидентна вершина  $x_i \in X_j^- = \Gamma_1 u_j$ :

$$d_k(u_j) = |\Gamma_2 x_i|.$$

Для вершины  $x_t \in \Gamma_1 u_1$  ее прообраз  $\Gamma_2 x_t = \emptyset$  и  $D(u_j) = \{0\}$ ;

- $s^+(u_j)$  – количество ребер, смежных ребру  $u_j \in U$ . По матрице смежности  $R_2$  этот показатель рассчитывается по формуле:

$$s^+(u_j) = \sum_{i=1}^m r_{2j,i}.$$

Для ребра  $u_2$  ультраграфа, показанного на рисунке 7,  $s^+(u_2) = 2$ .

При известных образах ребер относительно предиката смежности  $F_2(U, U)$ :

$$s^+(u_j) = |F_2 u_j|.$$

Для ребра  $u_1$  ультраграфа, изображенного на рисунке 10, его образ

$\Gamma_2 u_1 = \{x_i, x_k, x_r\}$ , образы этих вершин  $\Gamma_1 x_i = \{u_2, u_3\}$ ,  $\Gamma_1 x_k = \Gamma_1 x_r = \emptyset$ .

Множество ребер, смежных ребру  $u_1$ ,  $F_2 u_1 = \Gamma_1 x_i \vee \Gamma_1 x_k \vee \Gamma_1 x_r$  и

$F_2 u_1 = \{u_2, u_3\}$ . Тогда  $\rho^+(u_1) = 2$ ;

- $s^-(u_j)$  – количество ребер, которым смежно ребро  $u_j \in U$ . При известных матрицах смежности  $R_2$  или  $R_2^{-1}$  этот показатель рассчитывается по формуле:

$$s^-(u_j) = \sum_{i=1}^m r_{2i,j} \quad \text{или} \quad s^-(u_j) = \sum_{i=1}^m r_{2^{-1}j,i} .$$

Для ребра  $u_3$  ультраграфа, показанного на рисунке 7,  $s^-(u_3) = 2$ .

При известных прообразах ребер, т. е. их образах относительно предиката смежности  $F_2^{-1}(U, U)$ , показатель определяется по выражению:

$$s^-(u_j) = |F_2^{-1}u_j|.$$

Для ребра  $u_1$  (смотри рисунок 10) его прообраз  $\Gamma_1 u_1 = \{x_i\}$ . Прообраз этой вершины  $\Gamma_2 x_i = \emptyset$ , отсюда  $F_2^{-1}u_1 = \emptyset$  и  $s^-(u_1) = 0$ .

**Гиперграфы.** Данный вид графа получим в соответствии со сформулированным выше определением при выполнении условия (1) в том случае, когда

$$\forall x_i, x_k \in X, u_j \in U (\Gamma_1(x_i, u_j) = \langle \text{и} \rangle \rightarrow \Gamma_2(u_j, x_i) = \langle \text{и} \rangle) \&$$

$$\Gamma_2(u_j, x_k) = \langle \text{и} \rangle \rightarrow \Gamma_1(x_k, u_j) = \langle \text{и} \rangle) \quad (20)$$

$$\text{и} \quad \exists u_j \in U |\Gamma_2 u_j| > 2 \quad (21)$$

$$\text{или} \quad \exists u_j \in U |\Gamma_2 u_j| = 1. \quad (22)$$

Условие (20) означает, что предикат-отношение  $\Gamma_2(U, X)$  является обратным к предикату-отношению  $\Gamma_1(X, U)$ . Тогда гиперграф можно определить как два непересекающихся множества вершин  $X$  и ребер  $U$ , на элементах которых задана пара двуместных предикатов-отношений инцидентности  $\Gamma_1(X, U)$  и  $\Gamma_2(U, X)$  таких, что  $\Gamma_2(U, X) = \Gamma_1^{-1}(X, U)$ .

Вектор-строка таблицы истинности двуместного предиката-отношения  $\Gamma_1(X, U)$  – матрицы инцидентности вершины-ребра  $A_1$  совпадает с вектором-столбцом таблицы истинности предиката  $\Gamma_2(U, X)$  – матрицы инцидентности ребра-вершины  $A_2$ . По определению предикаты эквивалентны, если их таблицы истинности совпадают. Отсюда следует, что:

- предикат-свойство  $\Gamma_{1x_i}(U)$  – «вершине  $x_i$  инцидентны ребра множества  $U$ » эквивалентен предикату-свойству  $\Gamma_{2x_i}(U)$  – «вершина  $x_i$  инцидентна ребрам множества  $U$ »,
- предикат-свойство  $\Gamma_{2u_j}(X)$  – «ребру  $u_j$  инцидентны вершины множества  $X$ » эквивалентен предикату-свойству  $\Gamma_{1u_j}(X)$  – «ребро  $u_j$  инцидентно вершинам множества  $X$ ».

Таким образом не существует отличия в связях между вершинами множества  $X$  и ребрами множества  $U$ , задаваемых предикатами-инциденторами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Следовательно, содержательно эти предикаты можно трактовать как «вершины множества  $X$  и ребра множества  $U$  инцидентны» – предикат  $\Gamma_1(X, U)$  и «ребра множества  $U$  и вершины множества  $X$  инцидентны» – предикат  $\Gamma_2(U, X)$ . Отсюда, гиперграф будет полностью задан, если заданы множество вершин  $X$ , ребер  $U$  и один из предикатов  $\Gamma_1(X, U)$  или  $\Gamma_2(U, X)$ .

С учетом сказанного в гиперграфе:

- вершины  $x_i$  и  $x_k$  смежны, если существует ребро  $u_j$ , такое, что вершина  $x_i$  и ребро  $u_j$ , ребро  $u_j$  и вершина  $x_k$  инцидентны;
- ребра  $u_j$  и  $u_k$  смежны, если существует вершина  $x_i$ , такая, что ребро  $u_j$  и вершина  $x_i$ , вершина  $x_i$  и ребро  $u_k$  инцидентны.

В дальнейшем, рассматривая связь некоторой вершины с ребром, будем говорить «ребро, инцидентное вершине», имея в виду, что для них справедливо «вершина и ребро инцидентны». Аналогично «вершина, инцидентная ребру» соответствует высказыванию «ребро и вершина инцидентны».

При геометрическом представлении гиперграфа вершины изображаются кружками, ребра – в виде контуров, а расположение вершины  $x_i$  внутри ребра  $u_j$  означает истинность  $\Gamma_1(x_i, u_j)$ , следовательно и  $\Gamma_2(u_j, x_i)$ . На рисунке 11,а приведено такое изображение гиперграфа, а на рисунке

11,б – его представление в виде двудольного графа (сравните с рисунками 2 и 3 соответственно).

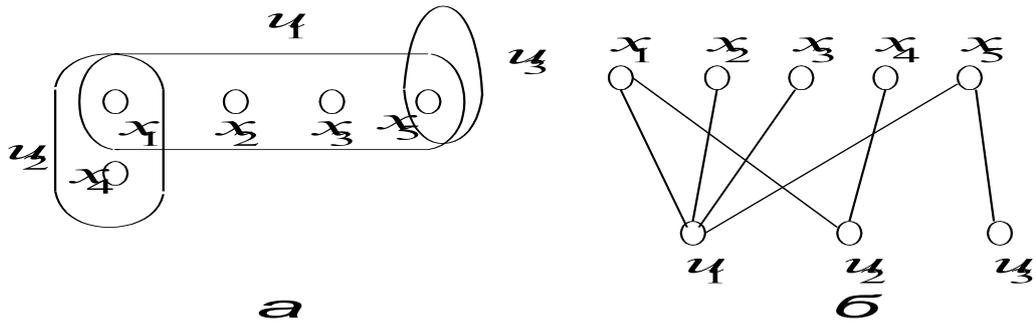


Рисунок 11 – Гиперграф (а) и его представление в виде двудольного графа (б)

**Представление гиперграфа матрицами инцидентности.** Поскольку матрица истинности предиката  $\Gamma_2(U, X)$  является транспонированной матрицей предиката  $\Gamma_1(X, U)$ , гиперграф при матричном представлении будет полностью задан, если определены элементы одной из них. В качестве матрицы инцидентности  $A_H$  гиперграфа будем использовать матрицу истинности предиката  $\Gamma_1(X, U)$ , размером  $n \times m$ , где  $n = |X|$ , а  $m = |U|$ . Элементы этой матрицы задают связь между вершинами и ребрами гиперграфа и определяются по правилу

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } \Gamma_1(x_i, u_j) = \text{«и»} \\ 0 & \text{если } \Gamma_1(x_i, u_j) = \text{«л»}, \end{cases}$$

где  $i = 1, n$ ,  $j = 1, m$ .

Матрица инцидентности гиперграфа, изображенного на рисунке 11, имеет вид

$$A_H = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline x_1 & 1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 \\ x_5 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} .$$

*Представление гиперграфа образами вершин и ребер относительно предикатов  $\Gamma_1(X, U)$  и  $\Gamma_2(U, X)$ .* В гиперграфе образ  $\Gamma_1 x_i$  вершины  $x_i \in X$  относительно предиката  $\Gamma_1(X, U)$  – это подмножество  $U_i \subseteq U$  инцидентных ей ребер. Он является характеристическим множеством предиката-свойства  $\Gamma_1 x_i(U)$ , т. е. вектора-строки матрицы  $A_H$ . Множество подмножеств ребер, инцидентных вершинам  $x_i \in X$ , т. е. образ множества  $X$  относительно предиката  $\Gamma_1(X, U)$ , будет

$$\Gamma_1 X = \{\Gamma_1 x_i / x_i \in X\}, \text{ где } \Gamma_1 x_i = U_i \subseteq U, \Gamma_1 x_i = \{u_j \in U : \Gamma_1 x_i(u_j) = \langle \text{и} \rangle\}. \quad (23)$$

Образом  $\Gamma_2 u_j$  ребра  $u_j \in U$  относительно предиката  $\Gamma_2(U, X)$  является подмножество  $X_j \subseteq X$  вершин, инцидентных этому ребру. Образ множества ребер  $U$  относительно того же предиката будет задаваться множеством характеристических подмножеств предикатов-свойств  $\Gamma_2 u_j(X)$ , т. е. столбцов матрицы  $A_H$ :

$$\Gamma_2 U = \{\Gamma_2 u_j / u_j \in U\}, \text{ где } \Gamma_2 u_j = X_j \subseteq X, \Gamma_2 u_j = \{x_i \in X : \Gamma_2 u_j(x_i) = \langle \text{и} \rangle\}. \quad (24)$$

Гиперграф данным способом будет задан, если заданы множества вершин  $X$ , ребер  $U$  и их образы, т. е. множества подмножеств  $\Gamma_1 X$  и  $\Gamma_2 U$ . При таком представлении будем обозначать его как  $H(X, U, \Gamma_1 X, \Gamma_2 U)$ . Гиперграф, изображенный на рисунке 11, этим способом будет задан через:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \quad U = \{u_1, u_2, u_3\},$$

$$\Gamma_1 X = \{\Gamma_1 x_i / i=1,5\},$$

$$\text{где } \Gamma_1 x_1 = \{u_1, u_2\}, \quad \Gamma_1 x_2 = \{u_1\}, \quad \Gamma_1 x_3 = \{u_1\}, \quad \Gamma_1 x_4 = \{u_2\}, \quad \Gamma_1 x_5 = \{u_1, u_3\},$$

$$\Gamma_2 U = \{\Gamma_2 u_j / j=1,3\},$$

$$\text{где } \Gamma_2 u_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \quad \Gamma_2 u_2 = \{x_1, x_4\}, \quad \Gamma_2 u_3 = \{x_5\}.$$

Рассмотренное представление гиперграфа, так же как и матричное, является полным.

**Предикаты смежности  $F_1(X, X)$  вершин и  $F_2(U, U)$  ребер гиперграфа.** Установим связь предиката смежности вершин  $F_1(X, X)$  с предикатами инцидентности  $\Gamma_1(X, U)$  и  $\Gamma_2(U, X)$ . Рассмотрим для этого пару вершин  $x_i, x_k \in X$ . Для этих вершин связь  $F_1(X, X)$  с  $\Gamma_1(X, U)$  и  $\Gamma_2(U, X)$  определяется выражением

$$F_1(x_i, x_k) = \langle \text{и} \rangle : \exists u_j \in U (\Gamma_1(x_i, u_j) = \langle \text{и} \rangle \& \Gamma_2(u_j, x_k) = \langle \text{и} \rangle). \quad (25)$$

Инцидентные вершине  $x_i$  ребра задает характеристическое множество  $U_i = \Gamma_1 x_i$  предиката-свойства  $\Gamma_1 x_i(U)$ . Вершины, инцидентные ребру  $u_j \in U_i$ , определяет предикат-свойство  $\Gamma_2 u_j(X)$ . Таким образом, подставляя в  $\Gamma_2(U, X)$  ребра множества  $U_i \subseteq U$ , получаем множество предикатов-свойств  $\{\Gamma_2 u_j(X)\}$ ,  $u_j \in U_i = \Gamma_1 x_i$ , каждый из которых задает вершины, смежные вершине  $x_i$  по ребру  $u_j$ .

Поскольку вершина  $x_k \in X$  будет смежна вершине  $x_i \in X$ , если она инцидентна хотя бы одному ребру из  $U_i = \Gamma_1 x_i$ , вершины, смежные вершине  $x_i$ , будут задаваться предикатом – свойством

$$F_{1x_i}(X) = \bigvee_{u_j \in U_i} \Gamma_2 u_j(X), \quad (26)$$

где  $\Gamma_2 u_j(x_i) = \langle \text{л} \rangle$ , если  $|\Gamma_2 u_j| > 1$ .

Это вытекает из того, что в гиперграфе  $\Gamma_1(x_i, u_j) = \langle \text{и} \rangle \rightarrow \Gamma_2(u_j, x_i) = \langle \text{и} \rangle$ , поэтому при определении предиката смежности  $F_{1x_i}(X)$  по этой формуле без учета условия  $|\Gamma_2 u_j| > 1$  каждая вершина будет смежна самой себе, даже если у нее нет петли (смотри рисунок 11 и матрицу  $A_H$ ). Следовательно, в формуле (24) значение одноместного предиката-свойства  $\Gamma_2 u_j(X)$  при  $x = x_i$ , т. е.  $\Gamma_2 u_j(x_i)$ , должно принимать значение  $\langle \text{ложь} \rangle$ , если  $|\Gamma_2 u_j| > 1$  ( $u_j$  не является петлей).

У гиперграфа, показанного на рисунке 11,  $U_1 = \Gamma_1 x_1 = \{u_1, u_2\}$  и характеристические вектора предикатов  $\Gamma_2 u_1(X)$ ,  $\Gamma_2 u_2(X)$  равны:

$\Gamma_2 u_1(X) = \{1, 1, 1, 0, 1\}$ ,  $\Gamma_2 u_2(X) = \{1, 0, 0, 1, 0\}$ . После присваивания  $\Gamma_2 u_1(x_1)$  и  $\Gamma_2 u_2(x_1)$  значения «0» получаем

$F_1 x_1(X) = \Gamma_2 u_1(X) \vee \Gamma_2 u_2(X) = \{0, 1, 1, 1, 1\}$ , т. е. вершина  $x_1$  смежна вершинам  $x_2, x_3, x_4, x_5$ .

Распространяя выкладки для  $\forall x_i \in X$ , получим предикат-отношение смежности вершин гиперграфа

$$F_1(X, X) = \{F_1 x_i(X) / x_i \in X\}. \quad (27)$$

Матрица истинности этого предиката является матрицей смежности  $R_1$  вершин гиперграфа. Элементы этой матрицы по матрице инцидентности  $A_H$  определяются по правилу:

$$r_{1i,k} = \begin{cases} 1 - \text{если } i \neq k \ \& \exists a_{i,j} = 1 \ \& a_{k,j} = 1, \\ 1 - \text{если } i = k \ \& \exists a_{i,j} = 1 \ \& f = 1, \\ 0 - \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где  $i, k = 1, n$ ;  $n = |X|$ ,  $j = 1, m$ ;  $m = |U|$ ,  $a_{i,j}$ ,  $a_{k,j}$  и  $f$  — элементы матрицы инцидентности  $A_H$  гиперграфа, а

$$f = \sum_{t=1}^n a_{tj}.$$

Матрица смежности  $R_1$  вершин  $x_i \in X$  гиперграфа, изображенного на рисунке 11, будет:

$$R_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

В соответствии со свойством (20) матрица  $R_1$  симметрична относительно главной диагонали. Граф смежности вершин гиперграфа, изображенного на рисунке 11, показан на рисунке 12.

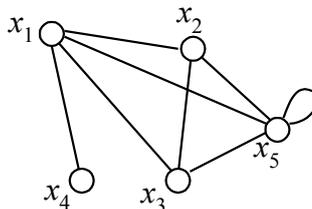


Рисунок 12 – Граф смежности вершин гиперграфа, изображенного на рисунке 11

Определим предикат смежности  $F_2(U, U)$  ребер гиперграфа. Формально связь предиката  $F_2(U, U)$  с предикатами  $\Gamma_2(U, X)$  и  $\Gamma_1(X, U)$  устанавливает условие:

$$F_2(u_j, u_k) = \langle \text{и} \rangle: \exists x_i \in X (\Gamma_2(u_j, x_i) = \langle \text{и} \rangle \& \Gamma_1(x_i, u_k) = \langle \text{и} \rangle). \quad (28)$$

Вершины, инцидентные ребру  $u_j \in U$ , задают характеристическое множество  $X_j = \Gamma_2 u_j$  предиката-свойства  $\Gamma_2 u_j(X)$ . Ребра, инцидентные вершине  $x_i \in X$ , определяют предикат-свойство  $\Gamma_1 x_i(U)$ . Подставляя в  $\Gamma_1(X, U)$  вершины множества  $X_j \subseteq X$ , получаем множество предикатов-свойств  $\{\Gamma_1 x_i(U)\}$ ,  $x_i \in X_j$ , каждый из которых задает ребра, смежные ребру  $u_j$  по вершине  $x_i$ .

Ребра, смежные ребру  $u_j \in U$  в гиперграфе, будут задаваться предикатом

$$F_2 u_j(U) = \bigvee_{x_i \in X_j} \Gamma_1 x_i(U), \quad (29)$$

где  $\Gamma_1 x_i(u_j) = \langle \text{л} \rangle$ , если  $|\Gamma_2 u_j| > 1$ , так как в гиперграфе на основании (20)  $\Gamma_2(u_j, x_i) = \langle \text{и} \rangle \rightarrow \Gamma_1(x_i, u_j) = \langle \text{и} \rangle$ , поэтому, не присваивая  $\Gamma_1 x_i(U)$  значения  $\langle \text{ложно} \rangle$  при  $u = u_j$  и выполнении указанного условия, получили бы, что каждое ребро, если оно и не является петлей, смежно самому себе.

У гиперграфа, показанного на рисунке 11,  $\Gamma_{2u_1} = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$  и характеристические вектора предикатов  $\Gamma_{1x_1}(U)$ ,  $\Gamma_{1x_2}(U)$ ,  $\Gamma_{1x_3}(U)$ ,  $\Gamma_{1x_5}(U)$  имеют значения:

$$\Gamma_{1x_1}(U) = \{1, 1, 0\}, \Gamma_{1x_2}(U) = \{1, 0, 0\},$$

$$\Gamma_{1x_3}(U) = \{1, 0, 0\}, \Gamma_{1x_5}(U) = \{0, 0, 1\}.$$

После присваивания  $\Gamma_{1x_1}(u_1)$ ,  $\Gamma_{1x_2}(u_1)$ ,  $\Gamma_{1x_3}(u_1)$  и  $\Gamma_{1x_5}(u_1)$  значения «0» получаем

$F_{2u_1}(U) = \{0, 1, 0\} \vee \{0, 0, 0\} \vee \{0, 0, 0\} \vee \{0, 0, 1\} = \{0, 1, 1\}$ , т. е. ребро  $u_1$  смежно ребрам  $u_2$  и  $u_3$ .

Для  $\forall u_j \in U$  получим предикат-отношение смежности ребер гиперграфа

$$F_2(U, U) = \{F_{2u_j}(U) / u_j \in U\}. \quad (30)$$

Элементы матрицы смежности  $R_2$  ребер гиперграфа определяются по правилу:

$$r_{2j,k} = \begin{cases} 1 - \text{если } j \neq k \ \& \ \exists a_{ij} = 1 \ \& \ a_{ik} = 1, \\ 1 - \text{если } j = k \ \& \ \exists a_{ij} = 1 \ \& \ f = 1, \\ 0 - \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где  $j, k = 1, m$ ;  $m = |U|$ ,  $i = 1, n$ ;  $n = |X|$ ,  $a_{ij}$ ,  $a_{ik}$  и  $a_{tj}$  – элементы матри-

цы инцидентности  $A_H$  гиперграфа, а  $f = \sum_{t=1}^n a_{t,j}$ .

Матрица смежности  $R_2$  ребер  $u_j \in U$  гиперграфа, изображенного на рисунке 11, будет:

$$R_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Матрица  $R_2$ , так же как и  $R_1$ , симметрична относительно главной диагонали. Граф смежности ребер этого же гиперграфа представлен на рисунке 13.

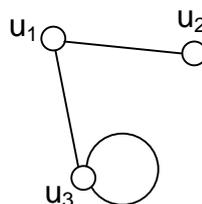


Рисунок 13 – Граф смежности ребер гиперграфа, изображенного на рисунке 11  
Здесь ребра гиперграфа изображены кружками, а истинность  $F_2(u_j, u_r)$  – линиями, их соединяющими.

**Образы множеств  $X$  и  $U$  относительно предикатов смежности вершин  $F_1(X, X)$  и ребер  $F_2(U, U)$  соответственно.** Для каждой вершины  $x_i \in X$  гиперграфа  $H(X, U)$  ее образ  $F_{1x_i}$  относительно предиката смежности  $F_1(X, X)$  (множество смежных ей вершин  $X_i$ ) определяется характеристическим множеством предиката-свойства  $F_{1x_i}(X)$

$$X_i = F_{1x_i} = \{x_k \in X : F_{1x_i}(x_k) = \langle \text{и} \rangle\}.$$

Истинность предиката-свойства  $F_{1x_i}(X)$  задается  $i$ -м вектором-строкой матрицы  $R_1$ .

По аналитическому представлению гиперграфа в форме  $H(X, U, \Gamma_1 X, \Gamma_2 U)$  для каждой вершины  $x_i \in X$  ее образ  $F_{1x_i}$  на основании (26) определяется по правилу

$$F_{1x_i} = \cup \{ \Gamma_2 u_j \setminus x_i : |\Gamma_2 u_j| > 1 \vee \Gamma_2 u_j : |\Gamma_2 u_j| = 1 \}. \quad (31)$$

$$u_j \in \Gamma_1 x_i$$

Для гиперграфа, изображенного на рисунке 11, множество образов  $F_1 X = \{ F_{1x_i} / x_i \in X \}$  его вершин относительно предиката смежности  $F_1(X, X)$  будет:

$F_1X = \{F_1x_i / i = 1, 5\}$ :  $F_1x_1 = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ,  $F_1x_2 = \{x_1, x_3, x_5\}$ ,  $F_1x_3 = \{x_1, x_2, x_5\}$ ,  $F_1x_4 = \{x_1\}$ ,  $F_1x_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$ .

Образ  $F_2u_j$  ребра  $u_j \in U$  гиперграфа  $H(X, U)$  относительно предиката  $F_2(U, U)$ , т. е. множество  $U_j$  смежных ему ребер, определяется характеристическим множеством предиката-свойства  $F_2u_j(U)$ :

$$U_j = F_2u_j = \{u_k \in U : F_2u_j(u_k) = \langle \text{и} \rangle\}.$$

Истинность предиката  $F_2u_j(U)$  задается  $j$ -м вектором-строкой матрицы  $R_2$ .

По аналитическому представлению гиперграфа образ каждого ребра  $F_2u_j$  определяется на основании (29) по выражению

$$F_2u_j = \cup_{x_i \in \Gamma_2u_j} \{\Gamma_1x_i \setminus u_j : |\Gamma_2u_j| > 1 \vee \Gamma_1x_i : |\Gamma_2u_j| = 1\}. \quad (32)$$

Для гиперграфа, изображенного на рисунке 11, множество образов  $F_2U = \{F_2u_j / u_j \in U\}$  его ребер относительно предиката смежности  $F_2(U, U)$  будет:

$$F_2U = \{F_2u_j / j = 1, 3\}: F_2u_1 = \{u_2, u_3\}, F_2u_2 = \{u_1\}, F_2u_3 = \{u_1, u_3\}.$$

Так же как для ультраграфа, совокупность матриц смежности, а также образов множеств вершин  $X$  и ребер  $U$  гиперграфа  $H(X, U)$  относительно предикатов смежности вершин  $F_1(X, X)$  и ребер  $F_2(U, U)$  задает гиперграф не полностью.

Если в ходе анализа и преобразования гиперграфа необходимо знать связи вершин и ребер, определяемые как предикатами инцидентности, так и предикатами смежности, гиперграф может быть задан в форме  $H(X, U, \Gamma_1X, \Gamma_1U, F_1X, F_2U)$  либо необходимым сочетанием образов вершин и ребер относительно предикатов инцидентности и смежности.

*Характеристики вершин и ребер гиперграфа. К характеристикам вершин гиперграфа относятся:*

- $\rho(x_i)$  – локальная степень вершины (количество ребер множества  $U_i = \Gamma_1 x_i$ , инцидентных вершине  $x_i \in X$ ). По матрице инцидентности  $A_H$  этот показатель рассчитывается как:

$$\rho(x_i) = \sum_{j=1}^m a_{i,j}.$$

При аналитическом представлении гиперграфа характеристика определяется по формуле :

$$\rho(x_i) = |\Gamma_1 x_i|.$$

Для гиперграфа, изображенного на рисунке 11,  $\rho(x_1) = 2$  ( $\Gamma_1 x_1 = \{u_1, u_2\}$ );

- $s(x_i)$  – количество вершин, смежных вершине  $x_i \in X$ . По матрице смежности  $R_1$  характеристика рассчитывается по выражению:

$$s(x_i) = \sum_{j=1}^m r_{1i,j}.$$

При аналитическом представлении гиперграфа показатель определяется по формуле:

$$s(x_i) = |F_1 x_i|.$$

Для гиперграфа, изображенного на рисунке 11,  $s(x_2) = 3$  ( $F_1 x_2 = \{x_1, x_3, x_5\}$ );

- $e(x_i)$  – количество петель при вершине гиперграфа. По матрице инцидентности  $A_H$  характеристика определяется как количество столбцов, для которых

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j} = 1.$$

При аналитическом представлении гиперграфа показатель равен:

$$e(x_i) = |\{u_j \in \Gamma_2 x_i : |\Gamma_2 u_j| = 1\}|.$$

*Характеристики ребер гиперграфа:*

- $\rho(u_j)$  – количество вершин множества  $X$ , инцидентных ребру  $u_j$ .

По матрице инцидентности  $A_H$  этот показатель рассчитывается по формуле:

$$\rho(u_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j}.$$

Для гиперграфа, изображенного на рисунке 11,  $s(u_1) = 4$ .

При аналитическом представлении гиперграфа этот показатель определяется по выражению:

$$\rho(u_j) = |\Gamma_2 u_j|.$$

Для ребра  $u_2$  того же гиперграфа  $\Gamma_2 u_2 = \{x_1, x_5\}$  и  $\rho(u_2) = 2$ ;

- $s(u_j)$  – количество ребер, смежных ребру  $u_j \in U$ . По матрице смежности  $R_2$  этот показатель рассчитывается по формуле:

$$s(u_j) = \sum_{k=1}^m r_{2j,k}.$$

Для ребра  $u_1$  гиперграфа, показанного на рисунке 11,  $s(u_1) = 2$ .

При известных образах ребер относительно предиката смежности  $F_2(U, U)$ :

$$s(u_j) = |F_2 u_j|.$$

Для ребра  $u_2$  гиперграфа, изображенного на рисунке 11,  $F_2 u_2 = \{u_1\}$ , тогда  $s(u_1) = 1$ ;

- $Q(u_j) = \{q_k(u_j) / k = 1, | U_j|\}$  – вектор, каждый элемент которого  $q_k(u_j)$  равен количеству вершин множества  $X_j = \Gamma_2 u_j$ , инцидентных ребру  $u_i \in U_j = F_2 u_j$ :

$$q_k(u_j) = |\Gamma_2 u_j \cap \Gamma_2 u_i|.$$

Для ребра  $u_1$  гиперграфа, показанного на рисунке 14,а,  $X_1 = \Gamma_2 u_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ,  $U_1 = F_2 u_1 = \{u_2, u_3\}$ ,  $\Gamma_2 u_2 = \{x_1, x_2, x_5\}$ ,  $\Gamma_2 u_3 = \{x_3, x_6\}$ ,

$q_1(u_1) = |\Gamma_2 u_1 \cap \Gamma_2 u_2| = 2$ ,  $q_2(u_1) = |\Gamma_2 u_1 \cap \Gamma_2 u_3| = 1$  (сравните с гиперграфом на рисунке 14,б).

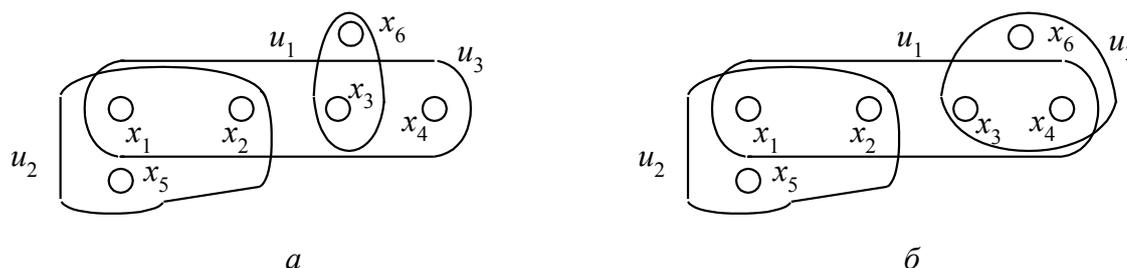


Рисунок 14 – К определению характеристики  $Q(u_j)$  ребер гиперграфа

**Обыкновенные ориентированные графы.** Этот вид графа получим в том случае, если предикаты  $\Gamma_1(X, U)$  и  $\Gamma_2(U, X)$  таковы, что

$$\forall u_j \in U (|\Gamma_1 u_j| = |\Gamma_2 u_j| = 1), \quad (33)$$

т. е. в графе нет ребер, суммарное количество вершин, которым оно инцидентно и которые инцидентны ему, больше двух. Данное условие допускает возможность существования в ориентированном графе петли. Из анализа (2) и (33) видно, что обыкновенный ориентированный граф является частным случаем ультраграфа.

Ребра ориентированного графа  $G(X, U)$  обычно в литературе называют дугами и изображают стрелками, соединяющими соответствующие пары вершин. С учетом (1) примем такое же изображение, имея в виду, что дуга  $u_j$  идет из вершины  $x_i$  в вершину  $x_k$ , если  $\Gamma_1(x_i, u_j) = \langle \text{и} \rangle$  &  $\Gamma_2(u_j, x_k) = \langle \text{и} \rangle$ , и соединяет вершину  $x_k$  с вершиной  $x_i$ , если  $\Gamma_1(x_k, u_j) = \langle \text{и} \rangle$  &  $\Gamma_2(u_j, x_i) = \langle \text{и} \rangle$ . Такое изображение ориентированного графа показано на рисунке 15,а, а в виде двудольного графа – на рисунке 15,б.

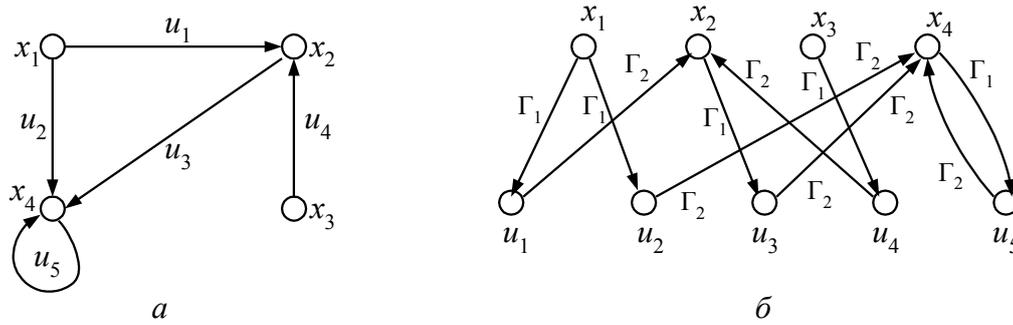


Рисунок 15 – Ориентированный граф (а) и его представление в виде двудольного (б)

**Представление ориентированного графа матрицами инцидентности.** Как и для ультраграфа полным способом формального задания ориентированного графа является его представление через две матрицы инцидентности  $A_1$  и  $A_2$ , где  $A_1$  – матрица истинности предиката  $\Gamma_1(X, U)$  и  $A_2$  – матрица истинности предиката  $\Gamma_2(U, X)$ .

Элементы этих матриц определяются по тем же правилам, что и для ультраграфа. Напомним, что матрица  $A_1$  задает инцидентность между вершинами и ребрами, а матрица  $A_2$  – между ребрами и вершинами.

Матрицы  $A_1$  и  $A_2$  ориентированного графа, показанного на рисунке 15, имеют вид:

$$A_1 = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c|ccccc} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}, \quad A_2 = \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{array} \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

В ряде работ вместо двух матриц инцидентности  $A_1$  и  $A_2$  предлагается использовать одну, обозначим ее как  $A$ . Элементы этой матрицы определяются по правилу:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{– если вершина } x_i \text{ является началом дуги } u_j, \\ -1 & \text{– если вершина } x_i \text{ является концом дуги } u_j, \\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases}$$

где  $i = 1, n$ ;  $n = |X|$ ,  $j = 1, m$ ;  $m = |U|$ .

Нетрудно убедиться, что матрица  $A$  является матрицей истинности предиката  $T(X, U) = \Gamma_1(X, U) \vee \Gamma_2^{-1}(X, U)$ , в котором истинность значения  $\Gamma_1(x_i, u_j)$  обозначена как «1», а значения  $\Gamma_2^{-1}(x_i, u_j)$  как «-1»:

$a_{i,j} = 1$  – если вершина  $x_i$  является началом дуги  $u_j$ , и  $\Gamma_1(x_i, u_j) =$  «и», если ребро  $u_j$  инцидентно вершине  $x_i$ ;

$a_{i,j} = -1$  – если вершина  $x_i$  является концом дуги  $u_j$ , и  $\Gamma_2^{-1}(x_i, u_j) =$  «и», если вершина  $x_i$  инцидентна ребру  $u_j$ .

Напомним, что предикат  $\Gamma_2^{-1}(X, U)$  является обратным к предикату  $\Gamma_2(U, X)$  – «ребрам множества  $U$  инцидентны вершины множества  $X$ ».

Матрицы истинности  $A$  – предиката  $T(X, U)$  и  $A_2^{-1}$  – предиката  $\Gamma_2^{-1}(X, U)$  для ориентированного графа, изображенного на рисунке 15, имеет вид

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{c} u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \\ \left. \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \end{array} , \quad A_2^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \\ \left. \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \end{array} . \end{array}$$

Сопоставьте матрицы истинности предиката  $\Gamma_1 - A_1$ , предиката  $\Gamma_2^{-1} - A_2^{-1}$  и матрицу  $A$ .

При указанном определении элементов матрицы  $A$  она не может быть использована для представления графов с петлями. Данный недостаток можно устранить, если элементу матрицы присваивать значение, например  $\pm 1$ , если  $u_j$  петля при вершине  $x_i$ . Такая матрица, обозначим ее через  $A'$ . для ориентированного графа, изображенного на рисунке 15, имеет вид:

$$A' = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & \pm 1 \end{array} \right. \end{matrix}.$$

**Аналитическое представление ориентированного графа – образами и прообразами множеств вершин и ребер относительно предикатов  $\Gamma_1(X, U)$  и  $\Gamma_2(U, X)$ .** В ориентированном графе образ вершины  $x_i \in X$  относительно предиката  $\Gamma_1(X, U)$ , т. е. подмножество  $U_i^+ \subseteq U$  инцидентных ей ребер, определяется аналогично ультраграфу как характеристическое множество  $\Gamma_1 x_i$  предиката-свойства  $\Gamma_1 x_i(U)$ , т. е. вектора-строки матрицы  $A_1$ . Множество подмножеств ребер, инцидентных вершинам  $x_i \in X$ , т. е. образ множества  $X$  относительно предиката  $\Gamma_1$ , будет

$$\Gamma_1 X = \{ \Gamma_1 x_i / x_i \in X \},$$

где  $\Gamma_1 x_i = U_i^+ = \{ u_j \in U : \Gamma_1 x_i(u_j) = \text{«и»} \}$ .

В соответствии с (33) образом ребра  $u_j \in U$  относительно предиката  $\Gamma_2(U, X)$  будет одноэлементное подмножество  $X_j^+$ . Образ множества ребер  $U$  относительно того же предиката будет задаваться множеством одноэлементных подмножеств  $X_j^+$  – характеристических подмножеств предикатов-свойств  $\Gamma_2 u_j(X)$ , т. е. строк матрицы  $A_2$ :

$$\Gamma_2 U = \{ \Gamma_2 u_j / u_j \in U \},$$

где  $\Gamma_2 u_j = X_j^+ = \{ x_i \in X : \Gamma_2 u_j(x_i) = \text{«и»} \}$ ,  $|X_j^+| = 1$ .

Ориентированный граф, заданный множествами вершин  $X$ , ребер  $U$  и их образами, т. е. множествами подмножеств  $\Gamma_1 X$  и  $\Gamma_2 U$ , будем обозначать как  $G(X, U, \Gamma_1 X, \Gamma_2 U)$ . Ориентированный граф, изображенный на рисунке 15, этим способом будет задан через:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \quad U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\},$$

$$\Gamma_1 X = \{\Gamma_1 x_i / i=1,4\},$$

где:  $\Gamma_1 x_1 = \{u_1, u_2\}$ ,  $\Gamma_1 x_2 = \{u_3\}$ ,  $\Gamma_1 x_3 = \{u_4\}$ ,  $\Gamma_1 x_4 = \{u_5\}$ ,

$$\Gamma_2 U = \{\Gamma_2 u_j / j = 1,5\},$$

где:  $\Gamma_2 u_1 = \{x_2\}$ ,  $\Gamma_2 u_2 = \{x_4\}$ ,  $\Gamma_2 u_3 = \{x_4\}$ ,  $\Gamma_2 u_4 = \{x_2\}$ ,  $\Gamma_2 u_5 = \{x_4\}$ .

Прообраз вершины  $x_i$ , т. е. множество ребер, которым она инцидентна, является характеристическим множеством  $i$ -го вектора-строки матрицы истинности  $A_2^{-1}$  предиката  $\Gamma_2^{-1}(X, U)$  или характеристическим множеством  $i$ -го вектора-столбца матрицы  $A_2$ , т. е. предиката-свойства  $\Gamma_2 x_i(U) - U_i^- = \Gamma_2 x_i$ .

Прообразом множества  $X$  относительно предиката  $\Gamma_2(U, X)$  будет множество характеристических подмножеств предикатов-свойств  $\Gamma_2 x_i(U)$ :

$$\Gamma_2 X = \{\Gamma_2 x_i / x_i \in X\},$$

где  $\Gamma_2 x_i = U_i^- = \{u_j \in U : \Gamma_2 x_i(u_j) = \text{«и»}\}$ .

Прообразом  $\Gamma_1 u_j$  ребра  $u_j \in U$  ориентированного графа относительно предиката  $\Gamma_1(X, U)$  будет одноэлементное подмножество  $X_j^-$ . Это подмножество является характеристическим множеством предиката-свойства  $\Gamma_1 u_j(X)$ , соответствующего  $j$ -у вектору-столбцу матрицы  $A_1$ .

Прообразом множества  $U$  относительно предиката  $\Gamma_1(X, U)$  является множество характеристических подмножеств предикатов-свойств  $\Gamma_1 u_j(X)$ :

$$\Gamma_1 U = \{\Gamma_1 u_j / u_j \in U\},$$

где  $\Gamma_1 u_j = X_j^- = \{x_i \in X : \Gamma_1 u_j(x_i) = \text{«и»}\}$ ,  $|X_j^-| = 1$ .

У ориентированного графа, показанного на рисунке 15,

$$\Gamma_2 X : \Gamma_2 x_1 = \emptyset, \Gamma_2 x_2 = \{u_1, u_4\}, \Gamma_2 x_3 = \emptyset, \Gamma_2 x_4 = \{u_2, u_3, u_5\},$$

$\Gamma_1 U: \Gamma_1 u_1 = \{x_1\}, \Gamma_1 u_2 = \{x_1\}, \Gamma_1 u_3 = \{x_2\}, \Gamma_1 u_4 = \{x_3\}, \Gamma_1 u_5 = \{x_4\}$ .

Для данного способа представления ориентированный граф будем обозначать  $G(X, U, \Gamma_1 X, \Gamma_2 X, \Gamma_1 U, \Gamma_2 U)$ .

**Предикаты смежности  $F_1(X, X)$  вершин и  $F_2(U, U)$  ребер ориентированного графа.** Связь предиката смежности  $F_1(X, X)$  вершин ориентированного графа с предикатами инцидентности  $\Gamma_1(X, U)$  и  $\Gamma_2(U, X)$  устанавливает выражение (4). Вершины, смежные вершине  $x_i$ , задаются предикатом – свойством, который определяется по формуле (5). Например, у ориентированного графа, показанного на рисунке 15,  $\Gamma_1 x_1 = \{u_1, u_2\}$ , характеристические вектора предикатов  $\Gamma_2 u_1(X)$ ,  $\Gamma_2 u_2(X)$  и  $F_1 x_1(X)$  будут:

$$\Gamma_2 u_1(X) = \{0, 1, 0, 0\}, \Gamma_2 u_2(X) = \{0, 0, 0, 1\} \text{ и}$$

$$F_1 x_1(X) = \Gamma_2 u_1(X) \vee \Gamma_2 u_2(X) = \{0, 1, 0, 1\}.$$

Предикат-отношение смежности  $F_1(X, X)$  получается по выражению (6).

Значения элементов  $r_{1i,t}$  ( $i, t = 1, n; n = |X|$ ) матрицы смежности  $R_1$  вершин ориентированного графа определяются по тому же правилу, что и ультраграфа. Матрица смежности  $R_1$  ориентированного графа, изображенного на рисунке 15, имеет вид:

$$R_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Изображение графа смежности вершин ориентированного графа без кратных ребер совпадает с его представлением, показанном на рисунке 15,а, так как истинность отношений инцидентности  $\Gamma_1(X, U)$  и  $\Gamma_2(U, X)$  при данном способе не отображается. Очевидно, что в графе

смежности вершин ориентированного мультиграфа не будет кратных ребер.

Вершины, которым смежны вершины множества  $X$ , задает предикат  $F_1^{-1}(X, X)$ . Связь предиката  $F_1^{-1}(X, X)$ , обратного к предикату  $F_1(X, X)$ , с предикатами инцидентности  $\Gamma_1(X, U)$  и  $\Gamma_2(U, X)$  устанавливает выражение (7). Вершины, которым смежна вершина  $x_i$ , задаются предикатом – свойством  $F^{-1}x_i(X)$ , определяемым по формуле (8). Например, у ориентированного графа, показанного на рисунке 15,  $\Gamma_2x_4 = \{u_2, u_3, u_5\}$ , характеристические вектора предикатов  $\Gamma_1u_2(X)$ ,  $\Gamma_1u_3(X)$ ,  $\Gamma_1u_5(X)$  и  $F_1^{-1}x_4(X)$  будут:

$$\Gamma_1u_2(X) = \{1, 0, 0, 0\}, \Gamma_1u_3(X) = \{0, 1, 0, 0\}, \Gamma_1u_5(X) = \{0, 0, 0, 1\} \text{ и} \\ F_1^{-1}x_4(X) = \Gamma_1u_2(X) \vee \Gamma_1u_3(X) \vee \Gamma_1u_5(X) = \{1, 1, 0, 1\}.$$

Предикат-отношение смежности  $F_1^{-1}(X, X)$  получается по выражению (9).

Матрица истинности  $R_1^{-1}$  предиката  $F_1^{-1}(X, X)$  по матрице смежности  $R_1$  в соответствии с (10) получается транспонированием последней и для графа, изображенного на рисунке 15, имеет вид:

$$R_1^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Смежность ребер ориентированного графа определяется так же, как и ультраграфа. Связь предиката  $F_2(U, U)$  смежности ребер ориентированного графа с предикатами инцидентности  $\Gamma_1(X, U)$  и  $\Gamma_2(U, X)$  устанавливает выражение (11), а предиката  $F_2^{-1}(U, U)$  с теми же предикатами – выражение (13). С учетом (33), т. е. того факта, что в обыкновенном ориентированном графе ребру инцидентна только одна вершина и

ребро инцидентно так же одной вершине, ребра, смежные ребру  $u_j$ , будут определяться по формуле:

$$F_2 u_j(U) = \Gamma_1 x_i(U), x_i = \Gamma_2 u_j, \quad (34)$$

а ребра, которым смежно ребро  $u_j$ , – по формуле:

$$F_2^{-1} u_j(U) = \Gamma_2 x_i(U), x_i = \Gamma_1 u_j \quad (35)$$

(сравните с выражениями (12) и (14) соответственно).

Для ребра  $u_3$  ориентированного графа, изображенного на рисунке 16:

$\Gamma_2 u_3 = \{x_1\}$  и характеристический вектор  $F_2 u_3(U) = \Gamma_1 x_1(U) = \{1,1,0,0\}$ ,

$\Gamma_1 u_3 = \{x_3\}$  и характеристический вектор  $F_2^{-1} u_3(U) = \Gamma_2 x_3(U) = \{0,1,0,1\}$ .

Предикаты-отношения смежности ребер ориентированного графа  $F_2(U,U)$  и  $F_2^{-1}(U,U)$  по предикатам инцидентности  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  будут определяться по следующим выражениям:

$$F_2(U, U) = \{ \Gamma_1 x_i(U), x_i = \Gamma_2 u_j / u_j \in U \} \quad (36)$$

и  $F_2^{-1}(U, U) = \{ \Gamma_2 x_i(U), x_i = \Gamma_1 u_j / u_j \in U \} . \quad (37)$

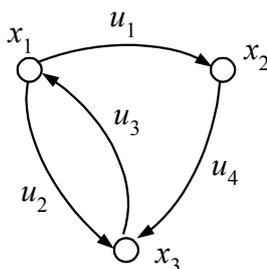


Рисунок 16 – Ориентированный граф (к определению смежности вершин и ребер)

Элементы матрицы смежности  $R_2$  ребер ориентированного графа определяются по правилу:

$$r_{2j,k} = \begin{cases} 1 - \text{если } a_{2j,i}=1 \ \& \ a_{1i,k}=1, \\ 0 - \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где  $j, k = 1, m$ ;  $m = |U|$ ,  $i = 1, n$ ;  $n = |X|$ ,  $a_{2j,i}$  и  $a_{1i,k}$  – элементы матриц инцидентности  $A_2$  и  $A_1$  соответственно. Матрицы инцидентности  $A_1, A_2$

и смежности  $R_2$  ребер ориентированного графа, изображенного на рисунке 16, будут:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad R_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Граф смежности  $G(U, U)$  ребер ориентированного графа, соответствующий матрице  $R_2$ , показан на рисунке 17. Здесь ребра изображены кружками, а истинность  $F_2(u_j, u_k)$  – стрелками.

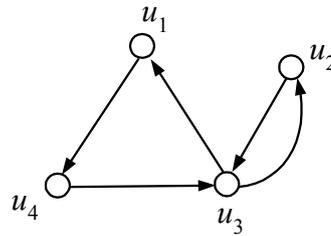


Рисунок 17 – Граф смежности ребер ориентированного графа, изображенного на рисунке 16

Матрица истинности  $R_2^{-1}$  предиката  $F_2^{-1}(U, U)$  на основании (15) получается транспонированием матрицы  $R_2$ .

**Образы и прообразы множеств вершин и ребер ориентированного графа относительно предикатов их смежности  $F_1(X, X)$  и  $F_2(U, U)$  соответственно.** Для каждой вершины  $x_i \in X$  ориентированного графа ее образ  $F_1 x_i$  относительно предиката смежности  $F_1(X, X)$  (множество смежных ей вершин  $X_i^+$ ) определяется характеристическим множеством предиката-свойства  $F_1 x_i(X)$ . Истинность предиката-свойства  $F_1 x_i(X)$  задается  $i$ -м вектором-строкой матрицы  $R_1$ .

Множество вершин  $X_i^-$ , которым смежна вершина  $x_i$ , т. е. ее прообраз  $F_1^{-1} x_i$  относительно предиката  $F_1(X, X)$ , является характеристическим множеством предиката-свойства  $F_1^{-1} x_i(X)$ . Истинность предиката-

свойства  $F_1^{-1}x_i (X)$  задается  $i$ -м вектором-строкой матрицы  $R_1^{-1}$  или соответствующим вектором-столбцом матрицы  $R_1$ .

По аналитическому представлению ориентированного графа в виде  $G (X, U, \Gamma_1X, \Gamma_2X, \Gamma_1U, \Gamma_2U)$  для каждой вершины  $x_i \in X$  ее образ  $F_1x_i$  определяется по выражению (16), а прообраз  $F_1^{-1}x_i$  – по выражению (17).

Если в ориентированном графе нет кратных ребер, то с учетом (33) эти формулы упрощаются и имеют соответственно вид:

$$F_1x_i = \{ \Gamma_2u_j / u_j \in \Gamma_1 x_i \} \quad (38)$$

$$\text{и} \quad F_1^{-1}x_i = \{ \Gamma_1u_j / u_j \in \Gamma_2 x_i \} . \quad (39)$$

У ориентированного графа, изображенного на рисунке 16, на основании (38) и (39) образ вершины  $x_1$  и прообраз вершины  $x_3$  будут получены так:

$$\Gamma_1 x_1 = \{u_1, u_2\}, \Gamma_2 u_1 = \{x_2\}, \Gamma_2 u_2 = \{x_3\}, F_1 x_1 = \{x_2, x_3\};$$

$$\Gamma_2 x_3 = \{u_2, u_4\}, \Gamma_1 u_2 = \{x_1\}, \Gamma_1 u_4 = \{x_2\}, F_1^{-1}x_1 = \{x_1, x_2\}.$$

Образ и прообраз множества вершин  $X$  относительно предиката смежности  $F_1 (X, X)$  будут:

$$F_1X = \{F_1x_i / x_i \in X\}$$

$$\text{и} \quad F_1^{-1}X = \{F_1^{-1}x_i / x_i \in X\}.$$

Для того же ориентированного графа множества образов  $F_1 X$  и прообразов  $F_1^{-1} X$  его вершин относительно предиката смежности  $F_1$  будут:

$$F_1 X = \{F_1x_i / i = 1,3\}: F_1x_1 = \{x_2, x_3\}, F_1x_2 = \{x_3\}, F_1x_3 = \{x_1\};$$

$$F_1^{-1} X = \{F_1^{-1}x_i / i = 1,3\}: F_1^{-1}x_1 = \{x_3\}, F_1^{-1}x_2 = \{x_1\}, F_1^{-1}x_3 = \{x_1, x_2\}.$$

Образ  $F_2u_j$  и прообраз  $F_2^{-1}u_j$  ребра  $u_j \in U$  относительно предиката  $F_2 (U, U)$ , т. е. множества  $U_j^+$  смежных ему ребер и  $U_j^-$  ребер, которому это ребро смежно, являются характеристическими множествами предикатов-свойств  $F_2u_j (U)$  и  $F_2^{-1}u_j (U)$  соответственно. Истинность предиката

$F_2 u_j(U)$  задается  $j$ -м вектором-строкой матрицы  $R_2$ , а истинность предиката  $F_2^{-1} u_j(U)$  –  $j$ -м вектором-строкой матрицы  $R_2^{-1}$  или соответствующим вектором-столбцом матрицы  $R_2$ .

По аналитическому представлению ориентированного графа для каждого ребра  $u_j \in U$  его образ  $F_2 u_j$  и прообраз  $F_2^{-1} u_j$  определяются на основании (34) и (35) :

$$F_2 u_j = \Gamma_1 x_i, \quad x_i = \Gamma_2 u_j, \quad (40)$$

$$\text{и} \quad F_2^{-1} u_j = \Gamma_2 x_i, \quad x_i = \Gamma_1 u_j. \quad (41)$$

Образ и прообраз множества ребер  $U$  относительно предиката смежности  $F_2(U, U)$  будут:

$$F_2 U = \{ \Gamma_1 x_i, x_i = \Gamma_2 u_j / u_j \in U \}$$

$$\text{и} \quad F_2^{-1} U = \{ \Gamma_2 x_i, x_i = \Gamma_1 u_j / u_j \in U \}.$$

Для ориентированного графа, изображенного на рисунке 16, множества образов  $F_2 U$  и прообразов  $F_2^{-1} U$  его ребер относительно предиката смежности  $F_2$  будет:

$$F_2 U = \{ F_2 u_j / j = 1, 4 \}: F_2 u_1 = \{ u_4 \}, F_2 u_2 = \{ u_3 \}, F_2 u_3 = \{ u_1, u_2 \}, F_2 u_4 = \{ u_3 \},$$

$$F_2^{-1} U = \{ F_2^{-1} u_j / j = 1, 4 \}: F_2^{-1} u_1 = F_2^{-1} u_2 = \{ u_3 \}, F_2^{-1} u_3 = \{ u_2, u_4 \}, F_2^{-1} u_4 = \{ u_1 \}.$$

Задание ориентированного графа множествами вершин  $X$ , ребер  $U$  и их образами и прообразами относительно предикатов смежности  $F_1(X, X)$  и  $F_2(U, U)$  соответственно будем обозначать  $G(X, U, F_1 X, F_1^{-1} X, F_2 U, F_2^{-1} U)$ .

Отметим в заключение, что представление ориентированного графа через предикаты смежности вершин и ребер задает его не полностью.

**Характеристики вершин и ребер ориентированного графа.** К характеристикам вершин относятся:

- $\rho^+(x_i)$  – полустепень исхода, т. е. количество ребер, инцидентных вершине  $x_i \in X$ ;

- $\rho^-(x_i)$  – полустепень захода, т. е. количество ребер, которым инцидентна вершина  $x_i \in X$ .

По матрицам инцидентности  $A_1$  и  $A_2$ , а также при аналитическом представлении ориентированного графа эти показатели рассчитываются по тем же формулам, что и для ультраграфа.

Для графа, изображенного на рисунке 16, полустепень исхода вершины  $x_1$  по матрице  $A_1$  будет

$$\rho^+(x_1) = \sum_{j=1}^4 a_{1,j} = 2$$

и вершины  $x_2$  по аналитическому представлению  $\rho^+(x_2) = |\Gamma_1 x_2| = 1$ ;

полустепень захода вершин  $x_3$  и  $x_1$  по матрице  $A_2$  и по аналитическому представлению соответственно –

$$\rho^-(x_3) = \sum_{j=1}^4 a_{2,j,3} = 2 \text{ и } \rho^-(x_1) = |\Gamma_2 x_1| = 1;$$

- $s^+(x_i)$  – количество вершин, смежных вершине  $x_i \in X$ ;
- $s^-(x_i)$  – количество вершин, которым смежна вершина  $x_i \in X$ .

Эти показатели имеют смысл только для мультиграфа, так как для графа без кратных ребер они совпадают с полустепенями исхода и захода соответственно. По матрицам смежности  $R_1$  и  $R_1^{-1}$  и при известных образах и прообразах вершин относительно предиката смежности  $F_1(X, X)$  эти показатели рассчитываются по тем же формулам, что и для ультраграфа.

Для вершины  $x_1$  ориентированного графа, показанного на рисунке 18,  $\rho^+(x_1) = 3$ , а  $s^+(x_1) = 2$  и  $\rho^-(x_1) = 1$ , а  $s^-(x_1) = 1$ ;

- $e(x_i) = |\{u_j \in U : \Gamma_1 u_j = \Gamma_2 u_j = x_i\}|$  – количество петель при вершине  $x_i$ .

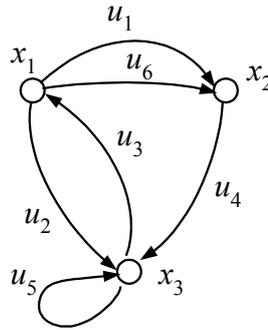


Рисунок 18 – Ориентированный мультиграф

*Характеристики ребер ориентированного графа:*

- $s^+(u_j)$  – количество ребер, смежных ребру  $u_j \in U$ ;
- $s^-(u_j)$  – количество ребер, которым смежно ребро  $u_j \in U$ .

По матрицам смежности  $R_2$  или  $R_2^{-1}$  и при известных образах и прообразах ребер относительно предиката смежности  $F_2(U, U)$  эти показатели рассчитываются по тем же формулам, что и для ультраграфа.

Например, для ребер  $u_3$  и  $u_1$  ориентированного графа, показанного на рисунке 16,

$$s^+(u_3) = \sum_{j=1}^4 r_{23,j} = 2 \quad \text{и} \quad s^-(u_1) = \sum_{i=1}^4 r_{2i,1} = 1 \quad \text{или}$$

$$s^+(u_3) = |F_2 u_3| = 2 \quad \text{и} \quad s^-(u_1) = |F_2^{-1} u_1| = 1.$$

Если образы и прообразы ребер относительно предиката смежности  $F_2(U, U)$  не заданы, эти показатели при известных образах  $\Gamma_1 X$  множества вершин  $X$  относительно предиката  $\Gamma_1(X, U)$  и прообразах  $\Gamma_2 X$  относительно предиката  $\Gamma_2(U, X)$ , а также образах и прообразах множества ребер относительно соответствующих предикатов, на основании (38) и (39) будут определяться по формулам:

$$s^+(u_j) = |\Gamma_1 x_i|, \quad x_i = \Gamma_2 u_j \quad \text{и} \quad s^-(u_j) = |\Gamma_2 x_i|, \quad x_i = \Gamma_1 u_j.$$

**Обыкновенные неориентированные графы.** Данный вид графа можно определить как два непересекающихся множества вершин  $X$  и ребер  $U$ , на элементах которых задана пара двуместных предикатов-

отношений инцидентности  $\Gamma_1(X, U)$  и  $\Gamma_2(U, X)$ , удовлетворяющих условиям (1), (20) и выражению:

$$\forall u_j \in U (|\Gamma_1 u_j| = |\Gamma_2 u_j| = 2).$$

Таким образом ребра обыкновенного неориентированного графа соединяют вершины попарно, а предикат  $\Gamma_2(U, X)$  на основании (20) является обратным к предикату  $\Gamma_1(X, U)$ . Обыкновенный неориентированный граф будет задан, если заданы множества  $X, U$  и один из этих предикатов. Из сказанного выше следует, что он является частным случаем гиперграфа. Изображение неориентированного графа дано на рисунке 19.

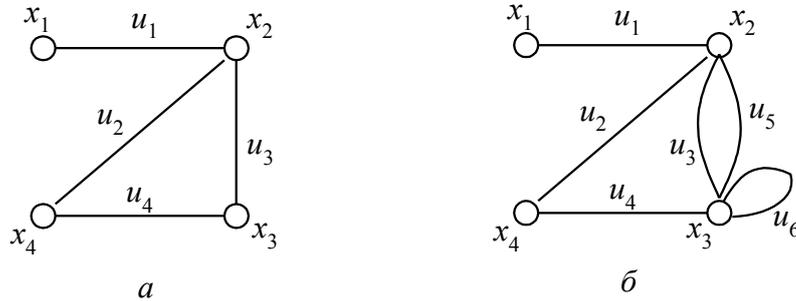


Рисунок 19 – Неориентированный граф (а) и мультиграф (б)

**Представление неориентированного графа матрицей инцидентности.** Так как матрица предиката  $\Gamma_2(U, X)$  является транспонированной матрицей предиката  $\Gamma_1(X, U)$ , для матричного представления неориентированного графа достаточно одной из них. В качестве матрицы инцидентности  $A$  будем использовать матрицу истинности предиката  $\Gamma_1(X, U)$ , размером  $n \times m$ , где  $n = |X|$ , а  $m = |U|$ . Элементы этой матрицы определяются по тому же правилу, что и для гиперграфа.

Матрица инцидентности графа, показанного на рисунке 19,б, имеет вид

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right| \end{array} .$$

**Представление неориентированного графа образами вершин и ребер относительно предикатов  $\Gamma_1(X, U)$  и  $\Gamma_2(U, X)$ .** В неориентированном графе образ  $\Gamma_1 x_i$  вершины  $x_i \in X$  относительно предиката  $\Gamma_1(X, U)$  является характеристическим множеством предиката-свойства  $\Gamma_1 x_i(U)$ , т. е. вектора-строки матрицы  $A$ . Множество подмножеств ребер, инцидентных вершинам  $x_i \in X$ , т. е. образ множества  $X$  относительно указанного предиката, определяется по выражениям (23).

Образ множества ребер  $U$  относительно предиката  $\Gamma_2(U, X)$ , т. е. множество подмножеств  $\Gamma_2 u_j$ , будет задаваться множеством характеристических подмножеств предикатов-свойств  $\Gamma_2 u_j(X)$ , т. е. столбцов матрицы  $A$  и определяется по выражениям (24). На основании (20) и (33) количество вершин, инцидентных каждому ребру неориентированного графа без петель,  $|\Gamma_2 u_j| = 2$ .

Неориентированный граф данным способом будет задан, если заданы множества вершин  $X$ , ребер  $U$  и их образы, т. е. множества подмножеств  $\Gamma_1 X$  и  $\Gamma_2 U$ . Граф в данном случае будем обозначать как  $G(X, U, \Gamma_1 X, \Gamma_2 U)$ . Неориентированный граф, изображенный на рисунке 19,б, этим способом будет представлен:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \quad U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\},$$

$$\Gamma_1 X = \{\Gamma_1 x_i / i = 1, 4\},$$

где:  $\Gamma_1 x_1 = \{u_1\}$ ,  $\Gamma_1 x_2 = \{u_1, u_2, u_3, u_5\}$ ,  $\Gamma_1 x_3 = \{u_1, u_4, u_5, u_6\}$ ,  $\Gamma_1 x_4 = \{u_2, u_4\}$ ,

$$\Gamma_2 U = \{\Gamma_2 u_j / j = 1, 6\},$$

где:  $\Gamma_{2u_1} = \{x_1, x_2\}$ ,  $\Gamma_{2u_2} = \{x_2, x_4\}$ ,  $\Gamma_{2u_3} = \{x_2, x_3\}$ ,  $\Gamma_{2u_4} = \{x_3, x_4\}$ ,  $\Gamma_{2u_5} = \{x_2, x_3\}$ ,  $\Gamma_{2u_6} = \{x_3\}$ .

Рассмотренное представление неориентированного графа, так же как и матричное, является полным.

**Предикаты смежности  $F_1(X, X)$  вершин и  $F_2(U, U)$  ребер неориентированного графа.** Для вершин  $x_i, x_k \in X$  связь предиката смежности  $F_1(X, X)$  с предикатами  $\Gamma_1(X, U)$  и  $\Gamma_2(U, X)$  определяется выражением (25).

Инцидентные вершине  $x_i$  ребра задает характеристическое множество  $U_i = \Gamma_{1x_i}$  предиката-свойства  $\Gamma_{1x_i}(U)$ . Вершины, инцидентные ребру  $u_j \in U$ , определяет предикат-свойство  $\Gamma_{2u_j}(X)$ . Если  $u_j$  не является петлей, подмножество  $\Gamma_{2u_j}$  состоит из двух вершин, одна из которых  $x_i$  (смотри первые пять столбцов матрицы  $A$ ). Таким образом, вершины, смежные вершине  $x_i$ , будут задаваться предикатом – свойством, определяемым по выражению (26).

У графа, показанного на рисунке 19,б,  $U_2 = \Gamma_{1x_2} = \{u_1, u_2, u_3, u_5\}$  и характеристические вектора предикатов  $\Gamma_{2u_1}(X)$ ,  $\Gamma_{2u_2}(X)$ ,  $\Gamma_{2u_3}(X)$ ,  $\Gamma_{2u_5}(X)$  равны:

$\Gamma_{u_1}(X) = \{1, 1, 0, 0\}$ ,  $\Gamma_{u_2}(X) = \{0, 1, 0, 1\}$ ,  $\Gamma_{u_3}(X) = \{0, 1, 1, 0\}$ ,  $\Gamma_{u_5}(X) = \{0, 1, 1, 0\}$ .

После присваивания  $\Gamma_{2u_1}(x_2)$ ,  $\Gamma_{2u_2}(x_2)$ ,  $\Gamma_{2u_3}(x_2)$  и  $\Gamma_{2u_5}(x_2)$  значения «0» получаем

$F_{1x_2}(X) = \Gamma_{2u_1}(X) \vee \Gamma_{2u_2}(X) \vee \Gamma_{2u_3}(X) \vee \Gamma_{2u_5}(X) = \{1, 0, 1, 1\}$ , т. е. вершина  $x_2$  смежна вершинам  $x_1, x_3, x_4$ .

Предикат-отношение  $F_1(X, X)$  смежности вершин неориентированного графа определяется выражением (27).

Матрица истинности этого предиката является матрицей смежности вершин неориентированного графа. Элементы этой матрицы по матрице инцидентности  $A$  определяются по тому же правилу, что и для гиперграфа.

Матрицы смежности  $R_1$  и  $R_1'$ , вершин графов, изображенных на рисунках 19,а и б, будут иметь вид:

$$R_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad R_1' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

В соответствии со свойством (20) матрицы симметричны относительно главной диагонали. Изображение графа смежности вершин неориентированного графа, показанного на рисунке 19,а, имеет тот же вид, а для мультиграфа, представленного на рисунке 19,б, отличается отсутствием кратных ребер.

Для ребер  $u_j, u_r \in U$  связь предиката смежности  $F_2(U, U)$  с предикатами  $\Gamma_2(U, X)$  и  $\Gamma_1(X, U)$  определяется выражением (26). Вершины, инцидентные ребру  $u_j \in U$ , задают характеристическое множество  $X_j = \Gamma_2 u_j$  предиката-свойства  $\Gamma_2 u_j(X)$ . Ребра, инцидентные вершине  $x_i \in X$ , определяют предикат-свойство  $\Gamma_1 x_i(U)$ . Подставляя в  $\Gamma_1(X, U)$  вершины множества  $X_j$  ( $|X_j| = 2$ ), получаем пару предикатов-свойств  $\{\Gamma_1 x_i(U)\}$ ,  $x_i \in X_j$ , каждый из которых задает ребра, смежные ребру  $u_j$  по вершине  $x_i$ . Предикат-свойство  $F_2 u_j(U)$ , задающий ребра, смежные ребру  $u_j \in U$  в неориентированном графе, определяется по выражению (29).

У графа, показанного на рисунке 19,б,  $\Gamma_2 u_1 = \{x_1, x_2\}$  и характеристические вектора предикатов  $\Gamma_1 x_1(U)$  и  $\Gamma_1 x_2(U)$  имеют значения:

$$\Gamma_1 x_1(U) = \{1, 0, 0, 0, 0, 0\} \text{ и } \Gamma_1 x_2(U) = \{1, 1, 1, 0, 1, 0\}.$$

Так как  $|\Gamma_2 u_1| = 2$ , присваиваем  $\Gamma_{1x_1}(u_1)$  и  $\Gamma_{1x_2}(u_1)$  значения «0» и получаем

$$F_2 u_1(U) = \{0, 0, 0, 0, 0, 0\} \vee \{0, 1, 1, 0, 1, 0\} = \{0, 1, 1, 0, 1, 0\}, \text{ т. е.}$$

ребро  $u_1$  смежно ребрам  $u_2, u_3$  и  $u_5$ .

Предикат-отношение  $F_2(U, U)$  смежности ребер неориентированного графа определяет выражение (30). Элементы матрицы смежности ребер  $R_2$  по матрице инцидентности  $A$  определяются по тому же правилу, что и гиперграфа. Матрица смежности ребер неориентированного мультиграфа, изображенного на рисунке 19,б, имеет вид:

$$R_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Граф смежности ребер этого же графа представлен на рисунке 20.

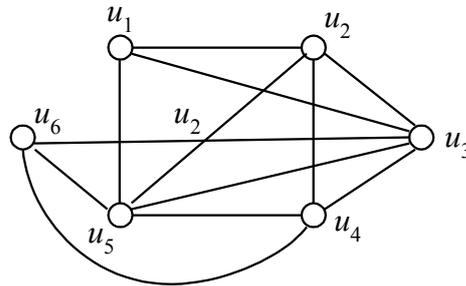


Рисунок 20 – Граф смежности ребер графа, изображенного на рисунке 19,б

Здесь ребра неориентированного графа изображены кружками, а истинность  $F_2(u_j, u_r)$  – линиями.

**Образы множеств  $X$  и  $U$  относительно предикатов смежности вершин  $F_1(X, X)$  и ребер  $F_2(U, U)$  соответственно.** Для каждой вершины  $x_i \in X$  неориентированного графа  $G(X, U)$  множество смежных ей

вершин  $X_i = F_1x_i$  определяется характеристическим множеством предиката-свойства  $F_1x_i (X)$ , истинность которого задается  $i$ -м вектором-строкой матрицы  $R_1$ .

По аналитическому представлению графа в форме  $G(X, U, \Gamma_1X, \Gamma_2U)$  для каждой вершины  $x_i \in X$  ее образ  $Fx_i$  на основании (26) определяется по правилу (31). Для неориентированного графа без кратных ребер формула упрощается и имеет вид:

$$F_1x_i = \{ \Gamma_2u_j \setminus x_i : |\Gamma_2u_j| = 2 \vee \Gamma_2u_j : |\Gamma_2u_j| = 1 / u_j \in \Gamma_1x_i \}. \quad (42)$$

Для графа, изображенного на рисунке 19,а, множество ребер, инцидентных вершине  $x_2$ , т. е. ее образ относительно предиката  $\Gamma_1(X, U)$ , –  $\Gamma_1x_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$  и образы каждого из этих ребер относительно предиката  $\Gamma_2(U, X)$  будут:  $\Gamma_2u_1 = \{x_1, x_2\}$ ,  $\Gamma_2u_2 = \{x_2, x_4\}$ ,  $\Gamma_2u_3 = \{x_2, x_3\}$ . Исключив из  $\Gamma_2u_j$  вершину  $x_2$ , получим  $F_1x_2 = \{x_1, x_4, x_3\}$ .

Множество образов  $F_1X = \{ F_1x_i / x_i \in X \}$  вершин этого графа относительно предиката смежности  $F_1(X, X)$  будет:

$$F_1X = \{ F_1x_i / i = 1, 4 \}:$$

$$F_1x_1 = \{x_2\}, F_1x_2 = \{x_1, x_4, x_3\}, F_1x_3 = \{x_2, x_4\}, F_1x_4 = \{x_2, x_3\}.$$

Для каждого ребра  $u_j \in U$  неориентированного графа  $G(X, U)$  множество смежных ему ребер  $U_j = F_2u_j$  определяется характеристическим множеством предиката-свойства  $F_2u_j (U)$ , истинность которого задается  $j$ -м вектором-строкой матрицы  $R_2$ .

По аналитическому представлению графа образ ребра  $F_2u_j$  на основании (32) определяется по правилу

$$F_2u_j = \{ \Gamma_1x_i \setminus u_j : |\Gamma_2u_j| = 2 \vee \Gamma_1x_i : |\Gamma_2u_j| = 1 / x_i \in \Gamma_2u_j \}. \quad (43)$$

Для графа, изображенного на рисунке 19,а, множество вершин, инцидентных ребру  $u_2$ , т. е. его образ относительно предиката  $\Gamma_2(U, X)$  –  $\Gamma_2u_2 = \{x_2, x_4\}$  и образы каждой из этих вершин относительно предиката

$\Gamma_1(X, U)$  будут:  $\Gamma_1x_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ ,  $\Gamma_1x_4 = \{u_2, u_4\}$ . Исключив из  $\Gamma_1x_i$  ребро  $u_2$ , получим  $F_2u_2 = \{u_1, u_3, u_4\}$ .

Множество образов  $F_2U = \{F_2u_j / u_j \in U\}$  ребер этого графа относительно предиката смежности  $F_2(U, U)$  будет:

$$F_2U = \{F_2u_j / j = 1, 4\}:$$

$$F_2u_1 = \{u_2, u_3\}, F_2u_2 = \{u_1, u_3, u_4\}, F_2u_3 = \{u_1, u_2, u_4\}, F_2u_4 = \{u_2, u_3\}.$$

Аналитическое представление неориентированного графа множествами вершин  $X$ , ребер  $U$  и их образами относительно предикатов смежности  $F_1(X, X)$  и  $F_2(U, U)$  соответственно будем обозначать  $G(X, U, F_1X, F_2U)$ .

Задание неориентированного графа только через предикаты смежности вершин и ребер является неполным.

**Характеристики вершин и ребер неориентированного графа.** К характеристикам вершин относятся:

- $\rho(x_i)$  – локальная степень вершины, т. е. количество ребер, инцидентных вершине  $x_i \in X$ .

По матрице инцидентности  $A$ , а также при аналитическом представлении неориентированного графа этот показатель рассчитывается по тем же формулам, что и для гиперграфа.

Для графа, изображенного на рисунке 19,б, локальная степень вершины  $x_2$  по матрице  $A$  будет

$$\rho(x_2) = \sum_{j=1}^6 a_{2,j} = 4$$

и вершины  $x_4$  по аналитическому представлению –

$$\rho(x_4) = |\Gamma_1x_4| = 2;$$

- $s(x_i)$  – количество вершин, смежных вершине  $x_i \in X$ . Этот показатель имеет смысл только для мультиграфа, так как для графа без крат-

ных ребер он совпадает с локальной степенью. По матрице смежности  $R_1$  и при известных образах вершин относительно предиката смежности  $F_1(X, X)$  этот показатель определяется по тем же формулам, что и для гиперграфа.

Для вершины  $x_2$  того же графа  $s(x_2) = \sum_{j=1}^4 r_{12,j} = 3$  – сравните с  $s(x_3) = 4$ .

- $e(x_i)$  – количество петель при вершине  $x_i$ . По матрице инцидентности  $A$  и при аналитическом представлении характеристика определяется по тем же выражениям, что и для гиперграфа.

*Характеристики ребер неориентированного графа:*

- $s(u_j)$  – количество ребер, смежных ребру  $u_j \in U$ .

По матрице смежности  $R_2$  и при известных образах ребер относительно предиката смежности  $F_2(U, U)$  этот показатель рассчитывается по тем же формулам, что и для гиперграфа.

Например, для ребер  $u_3$  и  $u_1$  неориентированного мультиграфа, показанного на рисунке 19,б,

$s(u_3) = \sum_{j=1}^6 r_{23,j} = 5$  и для ребра  $u_1$  графа, изображенного на рисунке 19,а,

$s(u_1) = |F_2 u_1| = 2$ .

### **Литература**

1. Овчинников В.А. Автоматизация комбинаторно-оптимизационных задач при проектировании ЭВМ и систем: Учеб. для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.