Математическая модель динамически настраиваемого гироскопа

04, апрель 2013

DOI: 10.7463/0413.0550951

Никандров В. Н.

УДК 531.383

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

nkndrv@bmstu.ru

Математическая модель динамически настраиваемого гироскопа (ДНГ) с учётом упругих и неидеальных шарикоподшипниковых опор вала электродвигателя необходима для моделирования динамики ДНГ при собственной вибрации и вибрации основания, расчётов собственных частот, а также для учёта влияния конкретных дефектов на уходы гироскопа.

Математическая модель шарикоподшипников гироскопов наиболее полно разработана В.Б. Бальмонтом, В.Ф. Журавлевым и В.А. Матвеевым [1], [2], [3]. В данной статье используются работы [1], [2], [3] для построения математической модели ДНГ с учётом движения вала электродвигателя.

ДНГ рассматривается как механическая система с восемью степенями свободы. Выбор числа степеней свободы обусловлен конструктивными особенностями гироскопа. Так, шарикоподшипниковые опоры вала электродвигателя обладают большей податливостью в осевом и радиальном направлении, чем упругий подвес ротора.

Системы координат. Движение гироскопа рассматриваем на неподвижном основании.

$O\xi\eta\zeta$ - связана с корпусом ДНГ.

$O\xi_B\eta_B\zeta_B$ - совпадает с невозмущённым положением вала, вращается с угловой скоростью вала электродвигателя Ω .

$Ox_By_Bz_B$ - связана с валом электродвигателя.

$Ox_Ky_Kz_K$ - связана с кольцом так, что ось Ox_K направлена по оси наименьшей жесткости упругого подвеса, соединяющего кольцо с валом.

$Ox_Py_Pz_P$ - связана с ротором.

Принято, что оси систем координат $Ox_k y_k z_k$, $Ox_p y_p z_p$ являются главными центральными осями инерции кольца и ротора.

Угловые координаты. В качестве углов, определяющих положение вала электродвигателя, кольца подвеса и ротора относительно корпуса ДНГ, выберем следующие углы поворотов:

φ - угол поворота вала электродвигателя относительно корпуса ДНГ вокруг оси $O\xi$, γ_1 - угол поворота вала вокруг оси $O\xi_B$, γ_2 - угол поворота вала вокруг оси Oy_B , α - угол поворота кольца вместе с ротором вокруг оси Ox_B внутреннего упругого элемента подвеса, β - угол поворота ротора вокруг оси Oy_k наружного упругого элемента подвеса.

Угловая скорость вращения вала электродвигателя $\Omega = \dot{\varphi}$ поддерживается постоянной с высокой точностью, поэтому угол поворота вала электродвигателя φ в данной модели ДНГ считается циклической координатой.

Переходы между системами координат. Преобразования координат выражаются следующими матричными соотношениями

$$\begin{aligned} [\xi_B, \eta_B, \zeta_B]^T &= \mathbf{G}_\varphi [\xi, \eta, \zeta]^T, & [x'_B, y'_B, z'_B]^T &= \mathbf{G}_{\gamma_1} [\xi_B, \eta_B, \zeta_B]^T, \\ [x_B, y_B, z_B]^T &= \mathbf{G}_{\gamma_2} [x'_B, y'_B, z'_B]^T, & [x_k, y_k, z_k]^T &= \mathbf{G}_\alpha [x_B, y_B, z_B]^T, \\ [x_p, y_p, z_p]^T &= \mathbf{G}_\beta [x_k, y_k, z_k]^T, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{G}_\varphi$, $\mathbf{G}_{\gamma_1}$, $\mathbf{G}_{\gamma_2}$, $\mathbf{G}_\alpha$, $\mathbf{G}_\beta$ - матрицы поворотов (матрицы направляющих косинусов).

Определим матрицы поворотов $\mathbf{G}_\varphi, \mathbf{G}_{\gamma_1}, \mathbf{G}_{\gamma_2}, \mathbf{G}_\alpha, \mathbf{G}_\beta$, используя рисунки 1÷5:

Рис. 1. Поворот вала вокруг оси $O\xi$.

$$\text{Матрица поворота } \mathbf{G}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Рис. 2. Поворот вала вокруг оси $O\xi_B$.

$$\text{Матрица поворота } \mathbf{G}_{\gamma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_1 & \sin \gamma_1 \\ 0 & -\sin \gamma_1 & \cos \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Рис. 3. Поворот вала вокруг оси Oy'_B .

$$\text{Матрица поворота } \mathbf{G}_{\gamma_2} = \begin{pmatrix} \cos \gamma_2 & 0 & -\sin \gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma_2 & 0 & \cos \gamma_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Рис. 4. Поворот кольца вместе с ротором вокруг оси OX_B .

$$\text{Матрица поворота } \mathbf{G}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad (5)$$

Рис. 5. Поворот ротора вокруг оси OY_K .

$$\text{Матрица поворота } \mathbf{G}_\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \quad (6)$$

Определение угловых скоростей. Определим проекции абсолютной угловой скорости вала $\omega_{XB}, \omega_{YB}, \omega_{ZB}$; кольца $\omega_{XK}, \omega_{YK}, \omega_{ZK}$ и ротора $\omega_{XP}, \omega_{YP}, \omega_{ZP}$ на оси связанных с ними систем координат $OX_BY_BZ_B, OX_KY_KZ_K, OX_PY_PZ_P$ соответственно. Будем использовать матрицы поворотов (3)÷(5).

Проекции угловой скорости вала электродвигателя

$$\begin{aligned} [\omega_{xB}, \omega_{yB}, \omega_{zB}]^T &= [0, \dot{\gamma}_2, 0]^T + \mathbf{G}_{\gamma 2} [\dot{\gamma}_1, 0, 0]^T + \mathbf{G}_{\gamma 2} \mathbf{G}_{\gamma 1} [0, 0, \Omega]^T, \\ \omega_{xB} &= \dot{\gamma}_1 \cos \gamma_2 - \Omega \cos \gamma_1 \sin \gamma_2, \\ \omega_{yB} &= \dot{\gamma}_2 + \Omega \sin \gamma_1, \\ \omega_{zB} &= \dot{\gamma}_1 \sin \gamma_2 + \Omega \cos \gamma_1 \cos \gamma_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Проекции угловой скорости кольца

$$\begin{aligned} [\omega_{xK}, \omega_{yK}, \omega_{zK}]^T &= [\dot{\alpha}, 0, 0]^T + \mathbf{G}_{\alpha} [\omega_{xB}, \omega_{yB}, \omega_{zB}]^T, \\ \omega_{xK} &= \dot{\gamma}_1 \cos \gamma_2 - \Omega \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 + \dot{\alpha}, \\ \omega_{yK} &= (\dot{\gamma}_2 + \Omega \sin \gamma_1) \cos \alpha + (\dot{\gamma}_1 \sin \gamma_2 + \Omega \cos \gamma_1 \cos \gamma_2) \sin \alpha, \\ \omega_{zK} &= -(\dot{\gamma}_2 + \Omega \sin \gamma_1) \sin \alpha + (\dot{\gamma}_1 \sin \gamma_2 + \Omega \cos \gamma_1 \cos \gamma_2) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (8)$$

Проекции угловой скорости ротора

$$\begin{aligned} [\omega_{xP}, \omega_{yP}, \omega_{zP}]^T &= [0, \dot{\beta}, 0]^T + \mathbf{G}_{\beta} [\omega_{xK}, \omega_{yK}, \omega_{zK}]^T, \\ \omega_{xP} &= (\dot{\gamma}_1 \cos \gamma_2 - \Omega \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 + \dot{\alpha}) \cos \beta - \\ &\quad - (-(\dot{\gamma}_2 + \Omega \sin \gamma_1) \sin \alpha + (\dot{\gamma}_1 \sin \gamma_2 + \Omega \cos \gamma_1 \cos \gamma_2) \cos \alpha) \sin \beta, \\ \omega_{yP} &= (\dot{\gamma}_2 + \Omega \sin \gamma_1) \cos \alpha + (\dot{\gamma}_1 \sin \gamma_2 + \Omega \cos \gamma_1 \cos \gamma_2) \sin \alpha + \dot{\beta}, \\ \omega_{zP} &= (\dot{\gamma}_1 \cos \gamma_2 - \Omega \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 + \dot{\alpha}) \sin \beta + \\ &\quad + (-(\dot{\gamma}_2 + \Omega \sin \gamma_1) \sin \alpha + (\dot{\gamma}_1 \sin \gamma_2 + \Omega \cos \gamma_1 \cos \gamma_2) \cos \alpha) \cos \beta. \end{aligned} \quad (9)$$

Движение центра масс вала, кольца и ротора. Линейные координаты и скорости. Вследствие деформаций шарикоподшипниковых опор вала электродвигателя, наряду с угловым движением возможно и поступательное движение вала, кольца подвеса и ротора. Будем рассматривать движение в плоскости, перпендикулярной оси вращения вала (радиальное движение), и вдоль оси вращения вала (осевое движение). Примем, что в рассматриваемом гироскопе совпадают центры масс ротора, кольца и вала. Деформации упругого подвеса малы, поэтому при поворотах кольца и ротора относительно вала не меняется взаимное положение центров масс.

В этом случае радиальное перемещение вала относительно корпуса будет определяться координатами x и y , а осевое перемещение вала относительно корпуса будет определяться координатой z .

Пусть $\bar{V}$ - вектор скорости движения центра масс. Проекции $\bar{V}$ на оси системы координат $Ox_B y_B z_B$ вычисляются по формуле

$$V_x = \dot{x}, \quad V_y = \dot{y}, \quad V_z = \dot{z}. \quad (10)$$

Таким образом, скорость центра масс будет определяться

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (11)$$

Кинетическая энергия ДНГ. Введем для ротора, кольца подвеса и вала следующие обозначения:

m_p, m_k, m_v – масса ротора, кольца и вала соответственно, A_p, B_p, C_p – главные экваториальные и осевой моменты инерции ротора, A_k, B_k, C_k – главные экваториальные и осевой моменты инерции кольца, A_v, B_v, C_v – главные экваториальные и осевой моменты инерции вала.

Для симметричного ротора, колец и вала экваториальные моменты инерции равны: $A_p = B_p$, $A_k = B_k$, $A_v = B_v$.

Кинетическая энергия T складывается из кинетической энергии вращательного движения ротора, кольца, вала $T_{вр}$ и кинетической энергии поступательного движения ротора, кольца и вала вдоль оси вращения вала и в плоскости, перпендикулярной оси вращения вала $T_{п}$:

$$T = T_{вр} + T_{п}. \quad (12)$$

Кинетическая энергия $T_{вр}$ записывается в следующем виде

$$T_{вр} = \sum_i \left(\frac{1}{2} A_i \omega_{xi}^2 + \frac{1}{2} B_i \omega_{yi}^2 + \frac{1}{2} C_i \omega_{zi}^2 \right), \quad (13)$$

где i – ротор, кольцо и вал.

Кинетическая энергия $T_{п}$ записывается в следующем виде

$$T_{п} = \frac{1}{2} (m_p + m_k + m_v) V^2. \quad (14)$$

Потенциальная энергия ДНГ. Потенциальная энергия гироскопа при его перемещениях складывается из энергии упругой деформации подвеса и шарикоподшипникового узла, энергии, зависящей от положения центров масс вала, кольца подвеса и ротора в гравитационном поле.

Потенциальная энергия упругой деформации подвеса

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_\alpha \alpha^2 + c_\beta \beta^2), \quad (15)$$

где c_α, c_β – жесткости подвеса кольца и ротора.

Потенциальная энергия упругой деформации шарикоподшипникового узла вала электродвигателя определяется согласно [2, 3] по формуле

$$\begin{aligned}
\Pi = & \frac{2K_{\Gamma}}{5} \sum_{i=1}^n \{ \sin \tau [\delta' + z + r(\gamma_1 \sin \varphi'_i - \gamma_2 \cos \varphi'_i)] + \\
& + \cos \tau [(x + l_1 \gamma_2) \cos \varphi'_i + (y - l_1 \gamma_1) \sin \varphi'_i] + \sum_{s=1}^7 T'_s \Delta p_i'^s \}^{2,5} + \\
& + \frac{2K_{\Gamma}}{5} \sum_{i=1}^n \{ -\sin \tau [-\delta'' + z + r(\gamma_1 \sin \varphi''_i - \gamma_2 \cos \varphi''_i)] + \\
& + \cos \tau [(x - l_2 \gamma_2) \cos \varphi''_i + (y - l_2 \gamma_1) \sin \varphi''_i] + \sum_{s=1}^7 T''_s \Delta p_i''^s \}^{2,5},
\end{aligned} \tag{16}$$

где:

K_{Γ} – константа Герца, одинаковая для обоих подшипников,

τ – угол контакта, одинаковый для обоих подшипников,

r – радиус окружности, по которой движутся шарики,

δ', δ'' – осевые натяги первого и второго подшипников,

φ'_i, φ''_i – углы, определяющие положение i -го шарика в первом и втором подшипниках относительно неподвижной системы координат.

$\{T'_s\} = \{\cos \tau - 1, \cos \tau - 1, -\cos \tau, \cos \tau, -\sin \tau, \sin \tau\}$ – вектор коэффициентов влияния первого подшипника,

$\{T''_s\} = \{\cos \tau - 1, \cos \tau - 1, -\cos \tau, \cos \tau, \sin \tau, -\sin \tau\}$ – вектор коэффициентов влияния второго подшипника,

Δp_i^s – дефект подшипника, вычисляется по формуле

$$\Delta p_i^s = \begin{cases} \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda}^s \sin \left[\lambda \omega_s t - (-1)^s \frac{2\pi\lambda}{n} (i-1) + \psi_{\lambda}^s \right], & s = 1, \dots, 6 \\ \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda}^s \sin (2\lambda \omega_s t + \psi_{\lambda}^s), & s = 7. \end{cases} \tag{17}$$

где:

$a_{\lambda}^s, \psi_{\lambda}^s$ – амплитуды и фазы разложений в ряды Фурье поверхностей, $\omega_1 = \omega_3 = \omega_5$ – угловая скорость сепаратора относительно наружного кольца, $\omega_2 = \omega_4 = \omega_6$ – угловая скорость сепаратора относительно внутреннего кольца, ω_7 – угловая скорость шарика, n – количество шариков в подшипнике, s – индекс, характеризующий тип дефекта.

Для получения уравнений вибрации ДНГ, преобразуем потенциальную энергию упругой деформации шарикоподшипникового узла вала к линейной части и квадратичной форме

$$\begin{aligned}
\Pi = & x \left(\sum_{s,i} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial p_i^s} \Delta p_i'^s \right) + y \left(\sum_{s,i} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial p_i^s} \Delta p_i'^s \right) + z \left(\sum_{s,i} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial p_i^s} \Delta p_i'^s \right) + \\
& + \gamma_1 \left(\sum_{s,i} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \gamma_1 \partial p_i^s} \Delta p_i'^s \right) + \gamma_2 \left(\sum_{s,i} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \gamma_2 \partial p_i^s} \Delta p_i'^s \right) + x \left(\sum_{s,i} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial p_i^s} \Delta p_i''^s \right) + \\
& + y \left(\sum_{s,i} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial p_i^s} \Delta p_i''^s \right) + z \left(\sum_{s,i} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial p_i^s} \Delta p_i''^s \right) + \gamma_1 \left(\sum_{s,i} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \gamma_1 \partial p_i^s} \Delta p_i''^s \right) + \\
& + \gamma_2 \left(\sum_{s,i} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \gamma_2 \partial p_i^s} \Delta p_i''^s \right) + x^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + \gamma_1^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \gamma_1^2} + \gamma_2^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \gamma_2^2},
\end{aligned} \tag{18}$$

или, используя скалярные произведения векторов, получим

$$\begin{aligned}
\Pi = & -x M(\mathbf{X}', \mathbf{D}'_x) - y M(\mathbf{X}', \mathbf{D}'_y) - z M(\mathbf{Z}', \mathbf{D}'_z) - \gamma_1 A(\mathbf{Y}', \mathbf{D}'_y) + \\
& + \gamma_2 A(\mathbf{Y}', \mathbf{D}'_x) - x M(\mathbf{X}'', \mathbf{D}''_x) - y M(\mathbf{X}'', \mathbf{D}''_y) + z M(\mathbf{Z}'', \mathbf{D}''_z) + \\
& + \gamma_1 A(\mathbf{Y}'', \mathbf{D}''_y) - \gamma_2 A(\mathbf{Y}'', \mathbf{D}''_x) + \frac{1}{2} K_x x^2 + \frac{1}{2} K_y y^2 + \frac{1}{2} K_z z^2 + \\
& + \frac{1}{2} K_{\gamma 1} \gamma_1^2 + \frac{1}{2} K_{\gamma 2} \gamma_2^2 - \varepsilon x \gamma_2 + \varepsilon y \gamma_1,
\end{aligned} \tag{19}$$

где:

$M = m_p + m_k + m_b$ - суммарная масса подвижных частей,

$K_z = K'_z + K''_z = \frac{3}{2} n K_\Gamma \sin^{2,5} \tau (\sqrt{\delta'} + \sqrt{\delta''})$ - осевая жесткость ДНГ,

$K_x = K_y = K'_x + K''_x = \frac{3}{4} n K_\Gamma \sqrt{\sin \tau} \cos^2 \tau (\sqrt{\delta'} + \sqrt{\delta''})$ - радиальная

жесткость ДНГ,

$K_{\gamma 1} = K_{\gamma 2} = K'_{\gamma 1} + K''_{\gamma 2} = K'_x [r \operatorname{tg} \tau + l']^2 + K''_x [r \operatorname{tg} \tau + l'']^2$ - угловая

жесткость ДНГ,

$\varepsilon = K'_x [r \operatorname{tg} \tau + l'] - K''_x [r \operatorname{tg} \tau + l'']$ - коэффициент, характеризующий перекрёстные связи,

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}' &= \frac{2K'_x}{nM} \mathbf{T}', & \mathbf{X}'' &= \frac{2K''_x}{nM} \mathbf{T}'', \\
\mathbf{Y}' &= [r \operatorname{tg} \tau + l'] \frac{M}{A} \mathbf{X}', & \mathbf{Y}'' &= [r \operatorname{tg} \tau + l''] \frac{M}{A} \mathbf{X}'', \\
\mathbf{Z}' &= \mathbf{X}' \operatorname{tg} \tau, & \mathbf{Z}'' &= \mathbf{X}'' \operatorname{tg} \tau, \\
\mathbf{D}'_x &= \{D'^s_x\}, & \mathbf{D}'_y &= \{D'^s_y\}, & \mathbf{D}'_z &= \{D'^s_z\}, \\
\mathbf{D}''_x &= \{D''^s_x\}, & \mathbf{D}''_y &= \{D''^s_y\}, & \mathbf{D}''_z &= \{D''^s_z\}, \\
D'^s_x &= \sum_{i=1}^n \Delta p'^s_i \cos \varphi'_i, & D'^s_y &= \sum_{i=1}^n \Delta p'^s_i \sin \varphi'_i, & D'^s_z &= \sum_{i=1}^n \Delta p'^s_i, \\
D''^s_x &= \sum_{i=1}^n \Delta p''^s_i \cos \varphi''_i, & D''^s_y &= \sum_{i=1}^n \Delta p''^s_i \sin \varphi''_i, & D''^s_z &= \sum_{i=1}^n \Delta p''^s_i.
\end{aligned}$$

Пусть вектор $\bar{g}$ задается в проекциях на оси системы координат $O\xi\eta\zeta$, связанной с корпусом. Вектор $\bar{g}$ в проекциях на оси системы координат $O\xi_B\eta_B\zeta_B$ определяется выражением

$$\begin{aligned}
[g_{\xi_B}, g_{\eta_B}, g_{\zeta_B}]^T &= G_\varphi [g_\xi, g_\eta, g_\zeta]^T, \\
g_{\xi_B} &= g_\xi \cos \varphi + g_\eta \sin \varphi, \\
g_{\eta_B} &= -g_\xi \sin \varphi + g_\eta \cos \varphi, \\
g_{\zeta_B} &= g_\zeta.
\end{aligned} \tag{20}$$

Потенциальная энергия ДНГ в гравитационном поле имеет вид

$$\Pi_g = -A(m\bar{g}) = -(m_p + m_k + m_b)(g_{\xi_B} x + g_{\eta_B} y + g_{\zeta_B} z). \tag{21}$$

Для вычисления обобщённых сил необходимо найти производные (22)

$$\begin{aligned}
Q_\alpha &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha}, & Q_\beta &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \beta}, & Q_{\gamma 1} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_1}, & Q_{\gamma 2} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_2}, \\
Q_x &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, & Q_y &= -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, & Q_z &= -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Обобщённые силы имеют вид

$$\begin{aligned}
Q_\alpha &= -c_\alpha \alpha, \quad Q_\beta = -c_\beta \beta, \\
Q_{\gamma_1} &= -K_{\gamma_1} \gamma_1 - \varepsilon y + A(\mathbf{Y}', \mathbf{D}'_y) + A(\mathbf{Y}'', \mathbf{D}''_y), \\
Q_{\gamma_2} &= -K_{\gamma_2} \gamma_2 + \varepsilon x - A(\mathbf{Y}', \mathbf{D}'_x) + A(\mathbf{Y}'', \mathbf{D}''_x), \\
Q_x &= -K_x x + \varepsilon \gamma_2 + M(\mathbf{X}', \mathbf{D}'_x) + M(\mathbf{X}'', \mathbf{D}''_x) + M(g_\xi \cos \varphi + g_\eta \sin \varphi), \\
Q_y &= -K_y y - \varepsilon \gamma_1 + M(\mathbf{X}', \mathbf{D}'_y) + M(\mathbf{X}'', \mathbf{D}''_y) + M(-g_\xi \sin \varphi + g_\eta \cos \varphi), \\
Q_z &= -K_z z + M(\mathbf{Z}', \mathbf{D}'_z) + M(\mathbf{Z}'', \mathbf{D}''_z) + M g_\zeta.
\end{aligned} \tag{23}$$

Уравнения вибрации ДНГ.

При определении производных от кинетической энергии будем считать переменные α , β , γ_1 , γ_2 , x , y , z и их производные малыми.

$$\begin{aligned}
&(A_p + A_k) \ddot{\alpha} + (A_p + A_k) \ddot{\gamma}_1 + (C_p - 2A_p) \Omega \dot{\beta} + (C_p - 2A_p + C_k - 2A_k) \Omega \dot{\gamma}_2 + \\
&+ (C_p - A_p + C_k - A_k) \Omega^2 \alpha + (C_p - A_p + C_k - A_k) \Omega^2 \gamma_1 + c_\alpha \alpha = 0, \\
\\
&A_p \ddot{\beta} + A_p \ddot{\gamma}_2 - (C_p - 2A_p) \Omega \dot{\alpha} - (C_p - 2A_p) \Omega \dot{\gamma}_1 + (C_p - A_p) \Omega^2 \beta + \\
&+ (C_p - A_p) \Omega^2 \gamma_2 + c_\beta \beta = 0, \\
\\
&(A_p + A_k + A_b) \ddot{\gamma}_1 + (A_p + A_k) \ddot{\alpha} + (C_p - 2A_p + C_k - 2A_k + C_b - 2A_b) \Omega \dot{\gamma}_2 + \\
&+ (C_p - 2A_p) \Omega \dot{\beta} + (C_p - A_p + C_k - A_k + C_b - A_b) \Omega^2 \gamma_1 + K_{\gamma_1} \gamma_1 + \varepsilon y + \\
&+ (C_p - A_p + C_k - A_k) \Omega^2 \alpha = A(\mathbf{Y}', \mathbf{D}'_y) + A(\mathbf{Y}'', \mathbf{D}''_y), \\
\\
&(A_p + A_k + A_b) \ddot{\gamma}_2 + A_p \ddot{\beta} - (C_p - 2A_p + C_k - 2A_k + C_b - 2A_b) \Omega \dot{\gamma}_1 - \\
&- (C_p - 2A_p + C_k - 2A_k) \Omega \dot{\alpha} + (C_p - A_p + C_k - A_k + C_b - A_b) \Omega^2 \gamma_2 + K_{\gamma_2} \gamma_2 - \\
&- \varepsilon x + (C_p - A_p) \Omega^2 \beta = -A(\mathbf{Y}', \mathbf{D}'_x) + A(\mathbf{Y}'', \mathbf{D}''_x),
\end{aligned}$$

$$M \ddot{x} + K_x x - \varepsilon \gamma_2 = M(\mathbf{X}', \mathbf{D}'_x) + M(\mathbf{X}'', \mathbf{D}''_x) + M(g_\xi \cos \varphi + g_\eta \sin \varphi),$$

$$M \ddot{y} + K_y y + \varepsilon \gamma_1 = M(\mathbf{X}', \mathbf{D}'_y) + M(\mathbf{X}'', \mathbf{D}''_y) + M(-g_\xi \sin \varphi + g_\eta \cos \varphi), \tag{24}$$

$$M \ddot{z} + K_z z = M(\mathbf{Z}', \mathbf{D}'_z) + M(\mathbf{Z}'', \mathbf{D}''_z) + M g_\zeta.$$

Выводы.

Получены уравнения вибрации ДНГ с учётом упругих и неидеальных шарикоподшипниковых опор вала электродвигателя, необходимые для моделирования динамики ДНГ при собственной вибрации, расчётов собственных частот, а также для учёта влияния конкретных дефектов на уходы гироскопа. Уравнения вибрации ДНГ учитывают угловое и поступательное движение ротора, колец и вала привода ДНГ.

Список литературы

1. Журавлев В.Ф. Теория вибрации гироскопов. М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1972. 48 с. (Препринт; № 22).
2. Бальмонт В.Б., Матвеев В.А. Опоры качения приборов. М.: Машиностроение, 1984. 240 с.
3. Журавлев В.Ф., Бальмонт В.Б. Механика шарикоподшипников гироскопов. М., Машиностроение, 1986. 272 с.

Mathematical model of a dynamically tuned gyroscope

04, April 2013

DOI: **10.7463/0413.0550951**

Nikandrov V.N.

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation

nkndrv@bmstu.ru

Mathematical model of a dynamically tuned gyroscope (DTG) includes an elastic and not ideal ball bearings of the gyro spin motor. The DTG is considered as a mechanical system with eight degrees of freedom. Selection of the number of degrees of freedom is based on the gyroscope design features. The angular and linear displacements of the gyro spin shaft, suspension ring and rotor became possible due to deformation of ball bearings. This model is necessary for modeling the DTG dynamics caused by natural vibration of bearings, for calculation of natural frequencies and for considering the influence of particular defects of ball bearings on the gyroscope drifts.

Publications with keywords: [dynamically tuned gyroscope](#), [ball bearing vibration](#), [ball bearing defects](#)

Publications with words: [dynamically tuned gyroscope](#), [ball bearing vibration](#), [ball bearing defects](#)

References

1. Zhuravlev V.F. *Teoriia vibratsii giroskopov* [The theory of vibration of gyroscopes]. Moscow, Institute for Problems in Mechanics of AS USSR, 1972. 48 p. Non published .
2. Bal'mont V.B., Matveev V.A. *Opory kacheniiia priborov* [Rolling-contact bearings of devices]. Moscow, Mashinostroenie, 1984. 240 p.
3. Zhuravlev V.F., Bal'mont V.B. *Mekhanika sharikopodshipnikov giroskopov* [Mechanics of ball bearings of gyroscopes]. Moscow, Mashinostroenie, 1986. 272 p.