Сравнительный анализ численных и алгебраических методов автоматизированного расчета оптических систем в параксиальной области

03, март 2013

DOI: 10.7463/0313.0548050

Острун А. Б., Иванов А. В.

УДК 535.317.22

Россия, СПб НИУ ИТМО

Alexostr@yandex.ru

ivanov@mail.ifmo.ru

Одним из важных этапов проектирования оптических систем является стадия параметрического синтеза («габаритного расчета») в гауссовой области. При реализации указанного этапа необходимо определить параметры оптических сил и расположения компонентов оптической системы.

Эта задача сводится к проблеме составления и решения систем уравнений и неравенств относительно неизвестных параметров схемы.

Зависимость выражений для параксиальных функций от структуры оптической схемы и способа выбора параметров сильно усложняет процесс автоматизированного формирования и последующего решения систем уравнений [1]. Поясним сказанное на примере. Известно, что оптическая сила системы двух бесконечно тонких компонентов φ_c связана с оптическими силами компонентов φ_1, φ_2 и расстоянием d между ними следующим образом:

$$\varphi_c = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2 d$$

Если в качестве переменной x выбрать оптическую силу первого компонента, то функция заднего фокального отрезка имеет вид:

$$\varphi_c = a + bx \tag{1}$$

где $a = \varphi_2$; $b = 1 - \varphi_2 d$.

Если же в качестве переменной взять осевое расстояние между компонентами, то выражение для функции (1) формально не изменится, но значения коэффициентов будут определяться совершенно иными формулами:

$$a = \varphi_1 + \varphi_2; b = -\varphi_1\varphi_2.$$

Аналогичные примеры можно привести и для других параксиальных выражений. Поэтому, вследствие множества вариантов структуры оптических систем и способов выбора переменных, уравнения для параксиального расчета практически всегда составляются специалистом «вручную», под каждую определенную схему и набор параметров.

Однако функциям координат нулевых лучей от параметров оптической системы присущи особые свойства, которые позволяют успешно решить проблему составления уравнений. Как доказано ранее [2], выходные координаты нулевых лучей представляют собой полилинейные функции оптических сил поверхностей и расстояний между ними:

$$f(\mathbf{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n c_{ij} x_i x_j + \\ + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n c_{ijk} x_i x_j x_k + \dots + c_{123\dots n} x_1 x_2 \dots x_n = 0$$

Полилинейность выходных координат нулевых лучей позволяет привести практически все широко используемые параксиальные уравнения к обобщенному виду равенств нулю полилинейных функций, коэффициенты которых определяются с помощью тривиальной интерполяции путем просчета параксиальных лучей. Решение полученной системы уравнений может быть:

- осуществлено численным алгоритмом. Суть его заключается в последовательном разбиении области изменения переменных и отбрасывании блоков в виде гиперпараллелепипедов, в которых заведомо отсутствуют решения. Критерием существования решений является перемена знаков всех полилинейных функций в углах гиперпараллелепипеда [2];

- получено методами компьютерной алгебры с помощью преобразования исходной системы уравнений по алгоритму Бухбергера с последующим нахождением корней многочлена одной переменной.

Успешность в получении результата и трудоемкость работы указанных методов в значительной степени связана со способами реализации алгоритмов, а также размерностью решаемых задач. Тем не менее, представляет отдельный интерес сравнение алгебраического и численного методов на конкретных оптических системах с небольшим количеством переменных, поскольку оно позволяет сделать определенные выводы о достоинствах и преимуществах разных подходов к решению систем алгебраических уравнений и неравенств.

В качестве первой тестовой задачи был избран параксиальный расчет объектива с фокусным расстоянием $f^*=90$ мм и задним отрезком 80 мм, который состоит из двух тонких компонентов, разделенных воздушным промежутком 2 мм. В качестве переменных x_1 , x_2 были выбраны оптические силы компонентов. Контролировалось отклонение оптической силы и заднего отрезка системы от заданных. Коэффициенты перед неизвестными могут быть легко найдены путем интерполяции с помощью расчета выходных координат четырех параксиальных лучей. Полученная система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} -2x_1x_2 + x_1 + x_2 - 0,011 = 0 \\ -150x_1x_2 + 77x_1 + 75x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Графически проиллюстрируем работу алгоритма (рис. 1)

Рис. 1. Иллюстрация работы алгоритма численного метода.

На рисунке показаны кривые линии, соответствующие уравнениям (красно-бордовые линии изначальные, зелено-желтые, полученные с помощью линейных комбинаций уравнений, способы такого построения описаны в предыдущих работах [3]); заштрихованные области соответствуют удаляемым блокам на первой, второй, третьей стадиях процесса разделения начального квадрата; зоны с отсутствием штриховки охватывают остаточные площади с неопределенным расположением решения. Поиск производился на интервале, охватывающим все разумные решения (фокусные расстояния оптических элементов по модулю больше 3 мм). Решение было найдено менее чем за 0,5 сек численным методом. Такую же скорость показал и алгебраический метод.

Во втором примере требовалось рассчитать фотообъектив типа «триплет» с задним фокусным расстоянием $f^*=80$ мм и задним отрезком 65 мм, который состоит из трех тонких компонентов, разделенных воздушными промежутками 1 мм и 2 мм. В процессе синтеза следует предусмотреть коррекцию кривизны Петцваля (сумма оптических сил принимается равной нулю). Выбирая в качестве переменных оптические силы тонких компонентов, получим систему уравнений для обеспечения заданных характеристик в виде:

$$\begin{cases} -0,0125 + x_1 + x_2 + x_3 - x_1x_2 - 3x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_1x_2x_3 = 0 \\ 1 - 68x_1 - 67x_2 - 65x_3 + 4556x_1x_2 + 195x_1x_3 + 130x_2x_3 - 130x_1x_2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение было найдено менее чем за одну секунду, но метод компьютерной алгебры также породил два комплексных корня, нахождение которых в контексте задачи интереса не представляет.

Следующий пример иллюстрирует проблему синтеза оптической схемы с двумя переменными. В ходе решения этой задачи были построены кривые на плоскости переменных, соответствующие параксиальным уравнениям (рис. 2).

Рис. 2. Иллюстрация примера, не имеющего точного решения.

Как видно из построения, кривые линии проходят близко друг от друга, но нигде не пересекаются. Следовательно, точного решения у системы нет. Однако есть весьма близкое сближение линий, которое свидетельствует о наличии комбинации переменных, делающей невязку уравнений достаточно малы. Эта комбинация может иметь интерес при рассмотрении исходной задачи как некорректной, имеющей большую относительную погрешность исходных данных. В этом случае целесообразными с точки зрения синтеза становятся все решения, обеспечивающие незначительную невязку уравнений.

В данном случае метод компьютерной алгебры вычислит комплексные корни, не представляющие интереса. В то же время численный метод может выделить интервал неопределенности переменных, в котором решение достигается с определенной степенью точности. Эта точность может регулироваться пользователем.

В четвертом примере требуется рассчитать в гауссовой области панкратический объектив, имеющий в двух крайних состояниях фокусные расстояния 57,12 мм и 142,8 мм

и неизменный задний фокальный отрезок, равный 82,03 мм. Оптическую схему представим в виде набора четырех тонких компонентов, двух подвижных и двух неподвижных. Оптические силы компонентов будем считать неизвестными, а осевые расстояния для крайних состояний заимствуем из работы [4] (см. таблица 1).

Таблица 1. Осевые расстояния между компонентами и фокусное расстояние системы.

f'	d_1	d_2	d_3
57,12	15,79	41,47	26,45
142,8	62,61	6,07	15,03

Полученная система уравнений для определения оптических сил имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} -0.0175 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 15.79x_1x_2 - 57.26x_1x_3 - 83.71x_1x_4 - 41.47x_2x_3 - \\ - 67.92x_2x_4 - 26.45x_3x_4 + 654.8113x_1x_2x_3 + 1072.4568x_1x_2x_4 + \\ + 1514.527x_1x_3x_4 + 1096.8815x_2x_3x_4 - 17319.759x_1x_2x_3x_4 = 0 \\ -0.007 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 62.61x_1x_2 - 68.68x_1x_3 - 83.71x_1x_4 - 6.07x_2x_3 - \\ - 21.21x_2x_4 - 15.03x_3x_4 + 380.04x_1x_2x_3 + 1321.07x_1x_2x_4 + \\ + 1032.26x_1x_3x_4 + 91.23x_2x_3x_4 - 5712.04x_1x_2x_3x_4 = 0 \\ 1 - 165.74x_1 - 149.95x_2 - 108.48x_3 - 82.03x_4 + 2367.71x_1x_2 + 6211.56x_1x_3 + \\ + 6866.73x_1x_4 + 4498.66x_2x_3 + 5571.48x_2x_4 + 2169.69x_3x_4 - 71033.93x_1x_2x_3 - \\ - 87973.63x_1x_2x_4 - 124236.65x_1x_3x_4 - 89977.19x_2x_3x_4 + 1420739.82x_1x_2x_3x_4 = 0 \\ 1 - 165.74x_1 - 103.13x_2 - 97.06x_3 - 82.03x_4 + 6456.97x_1x_2 + 6666.08x_1x_3 + \\ + 6866.73x_1x_4 + 589.15x_2x_3 + 1730.83x_2x_4 + 1232.91x_3x_4 - 36886.94x_1x_2x_3 - \\ - 108367.45x_1x_2x_4 - 84676.32x_1x_3x_4 - 7483.77x_2x_3x_4 + 468558.79x_1x_2x_3x_4 = 0, \end{array} \right.$$

В этом случае методы компьютерной алгебры либо вообще не находят решения, либо находят корни, не являющиеся решением, либо находят приближенное решение, которое требует уточнения. Численный метод находит все действительные решения за удовлетворительный промежуток времени (около 1 сек.).

Рассмотренные алгоритмы достаточно успешно решают предложенные типы задач. В ряде примеров методы компьютерной алгебры оказываются быстрее. Однако они могут порождать ненужные решения или не находить комбинации переменных, представляющие интерес, но не являющиеся решением. Численный метод является универсальным и позволяет находить решение с заданной точностью. Его быстроедействие можно заранее предсказать, зная количество переменных.

Список литературы

1. Иванов А.В. Универсальные методы решения модельных уравнений при габаритном расчете оптических систем // Оптический журнал. 2007. Т. 74, вып. 5, С. 7-11.
2. Иванов А.В. Универсальная модель для автоматизированного параметрического синтеза центрированных оптических систем в гауссовой области // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. 2006. Вып. 11 (34). С. 298-303.
3. Иванов А.В., Острун А.Б. Усовершенствованный универсальный метод габаритного расчета центрированных оптических систем // Оптический журнал. 2012. Т. 79, вып. 5. С. 35-39.
4. Smith W.J. Modern lens design. McGraw-Hill, Inc., 1992. 380 p.

Comparative analysis of numerical and algebraic methods of automated calculation of optical systems in the paraxial region

03, March 2013

DOI: 10.7463/0313.0548050

Ostrun A.B., Ivanov A.V.

Russia, St. Petersburg ITMO

Alexostr@yandex.ruivanov@mail.ifmo.ru

In this article the authors present an efficiency comparison of numerical and algebraic methods for solving polylinear model equations in order to determine an optimal algorithm of parametric synthesis of a centered optical system in Gaussian optics. The performance analysis was carried out with case studies of varying complexity that illustrate features of both methods. Generation of multilinear equations was produced in a semi-automatic mode while optical powers of components were considered to be unknown. Recommendations on usage of each method for the computer-aided parametric synthesis based on results of comparative analysis are given.

Publications with keywords: [parametric synthesis](#), [optical system](#), [system of polylinear equations](#)

Publications with words: [parametric synthesis](#), [optical system](#), [system of polylinear equations](#)

References

1. Ivanov A.V. Universal'nye metody resheniia model'nykh uravnenii pri gabaritnom raschete opticheskikh sistem [Universal methods for solving model equations for the dimensional calculation of optical systems]. *Opticheskii zhurnal*, 2007, vol. 74, no. 5, pp. 7-11. (Trans. version: *Journal of Optical Technology*, 2007, vol. 74, no. 5, pp. 302-306.).
2. Ivanov A.V. Universal'naia model' dlia avtomatizirovannogo parametricheskogo sinteza tsentrirovannykh opticheskikh sistem v gaussovoi oblasti [Universal model for automated parametrical synthesis of centered optical systems in Gaussian field]. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik SPbGU ITMO* [Scientific and technical Bulletin of Saint-Petersburg state University of information technologies, mechanics and optics], 2006, no. 11 (34), pp. 298-303.
3. Ivanov A.V., Ostrun A.B. Uovershenstvovannyi universal'nyi metod gabaritnogo rascheta tsentrirovannykh opticheskikh sistem [Improved universal method for a size calculation of centered optical systems]. *Opticheskii zhurnal*, 2012, vol. 79, no. 5. S, pp. 35-39.). (Trans. version: *Journal of Optical Technology*, 2012, vol. 79, no. 5, pp. 285-288.).
4. Smith W.J. *Modern lens design*. McGraw-Hill, Inc., 1992. 380 p.