

УДК 01.04.01

## **Идентификация нелинейных динамических систем с заданными типами нелинейности по годографам**

Павлов Ю. Н.<sup>1</sup>, Недашковский В. М.<sup>1,\*</sup>,  
Тихомирова Е. А.<sup>1</sup>

\* [vmniu3@bmstu.ru](mailto:vmniu3@bmstu.ru)

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

---

В статье рассматривается определение коэффициентов дифференциальных уравнений систем по экспериментальным частотным годографам и разделения похожих, но разных по существу сил: диссипативные силы при первой производной в уравнениях движения и диссипативная сила от действия сухого трения. Описан алгоритм идентификации систем с известной передаточной функцией по экспериментальному частотному годографу, содержащему случайные погрешности измерений. В качестве модели принимается передаточная функция системы. Решение задачи идентификации авторы предложили искать в классе годографов, задаваемых моделью системы. Поиск неизвестных коэффициентов передаточной функции модели системы осуществляется путем минимизации предложенной авторами меры близости экспериментального годографа системы и годографа модели системы. В результате, решение задачи идентификации было сведено к решению системы линейных уравнений. Иллюстративный вычислительный эксперимент для системы второго порядка показал, что погрешность определения значений коэффициентов передаточной функции не превышает диапазон погрешности измерений экспериментальных отсчетов годографа этой системы.

**Ключевые слова:** гармоническая линеаризация, идентификация, нелинейная динамическая система, сухое трение, линейное трение, частотный годограф

---

### **Введение**

При экспериментальной отработке силовых приводов широко применяются методы гармонических воздействий на них с целью получения реакций, по которым оцениваются качественные характеристики привода. При этом дифференциальные уравнения, которыми описываются динамические характеристики привода, содержат в себе как коэффициенты, вводимые с целью получения приемлемого качества регулирования, так и коэффициенты от нежелательных дефектов, объясняемых несовершенством конструкций или технологий изготовления привода (люфты, сухое трение, зоны нечувствительности). Поэтому целью идентификации является определение коэффициентов дифференциальных уравнений приводов по экспериментальным частотным годографам и разделения

похожих, но разных по существу сил: диссипативной силы при первой производной – это коэффициент при первой производной в уравнениях движения и диссипативная сила от действия, например, сухого трения – это коэффициент при знаке первой производной. Задача не является простой, поскольку в линеаризованных дифференциальных уравнениях эти коэффициенты выступают как единый коэффициент при первой производной. При этом информация о присутствии нежелательной нелинейности не является достоверной, поэтому в случае отсутствия предполагаемой нелинейности программа идентификации должна выдать нулевые значения коэффициентов нелинейности. В опубликованных на эту тему работах [1 – 6] авторы статьи не обнаружили подобную постановку задачи.

## 1. Постановка задачи

Предполагается, что с реальной динамической системы (силовой привод), описываемой нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка, в котором присутствует член пропорциональный первой производной и нелинейность типа "сухое трение" путем подачи гармонического сигнала получены амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики. Необходимо путем обработки экспериментальных данных определить все коэффициенты дифференциального уравнения. Провести статистическое моделирование, поскольку имеется в виду, что эксперимент сопровождается наличием помех. Определить погрешности полученных коэффициентов от действия помех.

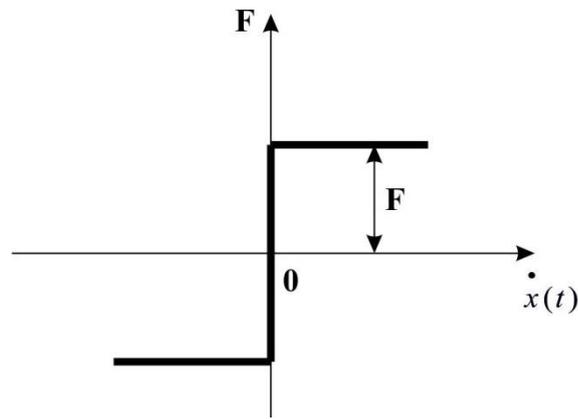
## 2. Методика решения задачи

- 1) Выбор вида динамического звена, нелинейности и коэффициента гармонической линеаризации.
- 2) Создание программы математического моделирования генерации псевдо экспериментальных данных.
- 3) Проведение вычислительного эксперимента, проведение статистического анализа ошибок в определении коэффициентов дифференциального уравнения.

В статье рассматривается система, описываемая дифференциальным уравнением второго порядка с нелинейным звеном типа «сухое трение». При подаче на вход системы синусоидального сигнала  $q \sin \omega_i$  в системе установятся незатухающие колебания с амплитудой  $A_i$  и частотой  $\omega_i$ , что и позволяет для решения поставленной задачи применить метод гармонической линеаризации. Дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее вынужденное движение динамической системы с нелинейным звеном типа «сухое трение», имеет вид

$$e_2 \ddot{x}(t) + F \operatorname{sign} \dot{x}(t) + e_1 \dot{x}(t) + e_0 x(t) = q \sin \omega t \quad (1)$$

График нелинейности типа «сухое трение» приведен на рис. 1



**Рис.1.** График нелинейности типа «сухое трение».

Неизвестные коэффициенты  $e_0, e_1, e_2, F$  дифференциального уравнения (1) должны быть определены в результате решения задачи идентификации.

В статье предложен алгоритм получения оценок неизвестных коэффициентов  $e_0, e_1, e_2, F$  дифференциального уравнения (1) по полученному экспериментальному годографу. В описываемом алгоритме для определения неизвестных коэффициентов  $e_0, e_1, e_2, F$  предлагается воспользоваться методом гармонической линеаризации и сухое трение аппроксимировать линейным трением с соответствующим коэффициентом гармонической линеаризации [7].

Вынужденное движение с использованием метода гармонической линеаризации описывается уравнением

$$e_2 \ddot{x}(t) + E_1(\omega) \dot{x}(t) + e_0 x(t) = q \sin \omega t, \quad (2)$$

где

$$E_1(\omega) = \frac{4F}{\pi A(\omega)\omega} + e_1; \quad (3)$$

$A(\omega)$  - амплитуда синусоидальной составляющей выхода  $x(t)$  системы, имеющей частоту  $\omega$ .

Введем обозначение

$$c = \frac{4F}{\pi}.$$

Тогда с учетом (3) получим

$$E_1(\omega) = \frac{c}{A(\omega)\omega} + e_1. \quad (4)$$

Из уравнения (2) следует, что при использовании метода гармонической линеаризации частотная передаточная функция динамической системы второго порядка с сухим трением имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{1}{e_0 + E_1(\omega)j\omega + e_2(j\omega)^2}.$$

Частотную передаточную функцию  $W(j\omega)$  можно также записать в виде [8]

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) . \quad (5)$$

Здесь  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  - вещественная и мнимая части частотной передаточной функции соответственно, которые задаются соотношениями

$$P(\omega) = \frac{e_0 - e_2\omega^2}{(e_0 - e_2\omega^2)^2 + E_1^2(\omega)\omega^2} , \quad (6)$$

$$Q(\omega) = -\frac{E_1(\omega)\omega}{(e_0 - e_2\omega^2)^2 + E_1^2(\omega)\omega^2} .$$

Тогда квадрат значения амплитудно-частотной характеристики динамической системы для частоты  $\omega$  можно определить по формуле

$$A^2(\omega) = P^2(\omega) + Q^2(\omega) . \quad (7)$$

С учетом (4), (6) получим

$$A^2(\omega) = \frac{1}{(e_0 - e_2\omega^2)^2 + \left(\frac{c}{A(\omega)\omega} + e_1\right)^2 \omega^2} . \quad (8)$$

Разрешив уравнение (8) относительно  $A(\omega)$ , получим

$$A(\omega) = \frac{-ce_1\omega + \sqrt{(e_0 - e_2\omega^2)^2(1 - c^2) + e_1^2\omega^2}}{(e_0 - e_2\omega^2)^2 + e_1^2\omega^2} . \quad (9)$$

Из соотношения (9) следует, что при  $\omega = 0$  имеет место равенство

$$A(0) = \frac{\sqrt{1 - c^2}}{e_0} ,$$

а при

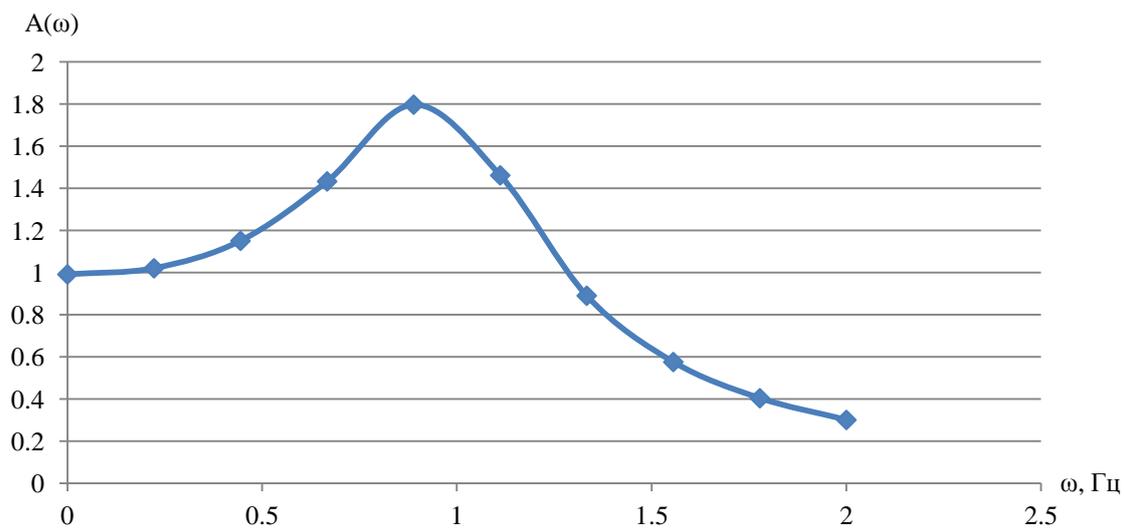
$$\omega = \omega_r = \sqrt{\frac{e_0}{e_2}} -$$

равенство

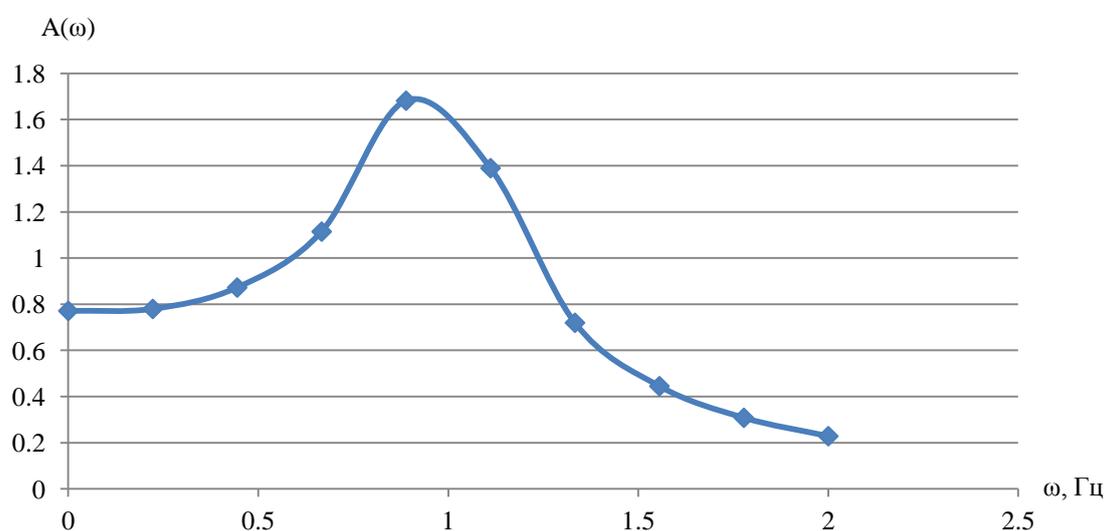
$$A(\omega_r) = \frac{1 - c}{e_1 \sqrt{\frac{e_0}{e_2}}} .$$

Видим, что амплитуда  $A(0)$  амплитудно-частотной характеристики системы имеет действительное значение лишь при условии  $1 - c^2 > 0$ .

Пример амплитудно-частотной характеристики системы приведен на рис. 2а для конкретных значений коэффициентов передаточной функции  $e_0 = 1$ ,  $e_1 = 0,5$ ,  $e_2 = 1$ ,  $F = 0,1$ .



a)  $e_0 = 1; e_1 = 0,5; e_2 = 1; F = 0,1$



b)  $e_0 = 1; e_1 = 0,2; e_2 = 1; F = 0,5$

**Рис. 2.** Примеры амплитудно-частотной характеристики нелинейной динамической системы второго порядка с сухим и линейным трением с соответствующими коэффициентами передаточной функции  $e_0, e_1, e_2, F$ .

В данном примере коэффициент уравнения при первой производной существенно превышает значение коэффициента сухого трения.

Пример для значений коэффициентов  $e_0 = 1, e_1 = 0,2, e_2 = 1, F = 0,5$ , то есть для случая со значительным превышением коэффициента сухого трения над коэффициентом при первой производной, амплитудно-частотной характеристики представлен на рис. 2б.

Обратим внимание, что при  $e_0 - e_2\omega^2 = 0$  или при  $\omega = \omega_r = \sqrt{\frac{e_0}{e_2}}$  амплитудно-частотная характеристика системы второго порядка на резонансной частоте не имеет разрыва.

С учетом (6) найдем выражение для значений  $\varphi(\omega)$  фазо-частотной характеристики системы [8]

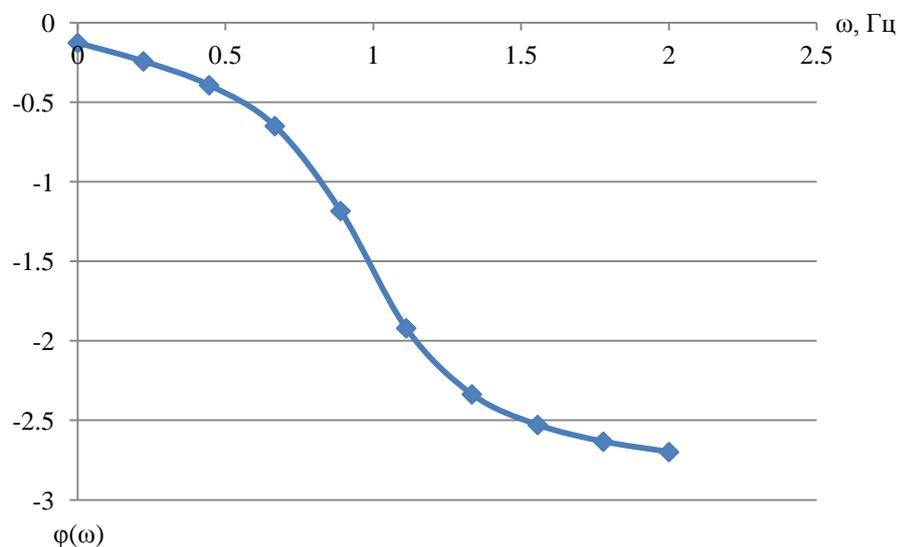
$$\operatorname{tg}(\varphi(\omega)) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\frac{\frac{c}{A(\omega)} + e_1\omega}{e_0 - e_2\omega^2}. \quad (10)$$

Если учесть, что при  $e_0 - e_2\omega^2 > 0$  справедливы неравенства  $P(\omega) > 0$ ,  $Q(\omega) < 0$ , а при  $e_0 - e_2\omega^2 < 0$  –  $P(\omega) < 0$ ,  $Q(\omega) < 0$ , то из соотношения (10) получим

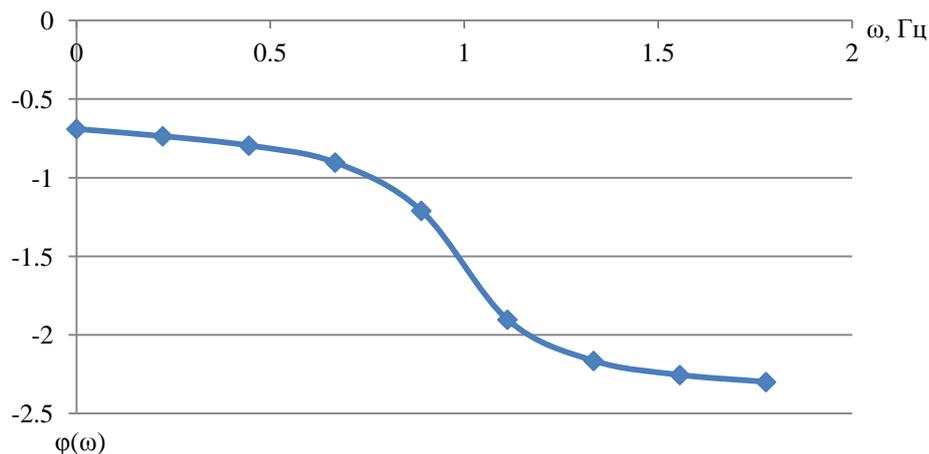
$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\frac{c}{A(\omega)} + e_1\omega}{e_0 - e_2\omega^2}\right), \text{ если } e_0 - e_2\omega^2 > 0, \quad (11)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\frac{c}{A(\omega)} + e_1\omega}{e_2\omega^2 - e_0}\right) - \pi, \text{ если } e_0 - e_2\omega^2 < 0.$$

Примеры фазо-частотных характеристик системы, вычисленные по формулам (11) с учетом (9), приведены на рис.3.



а)  $e_0 = 1; e_1 = 0,5; e_2 = 1; F = 0,1$



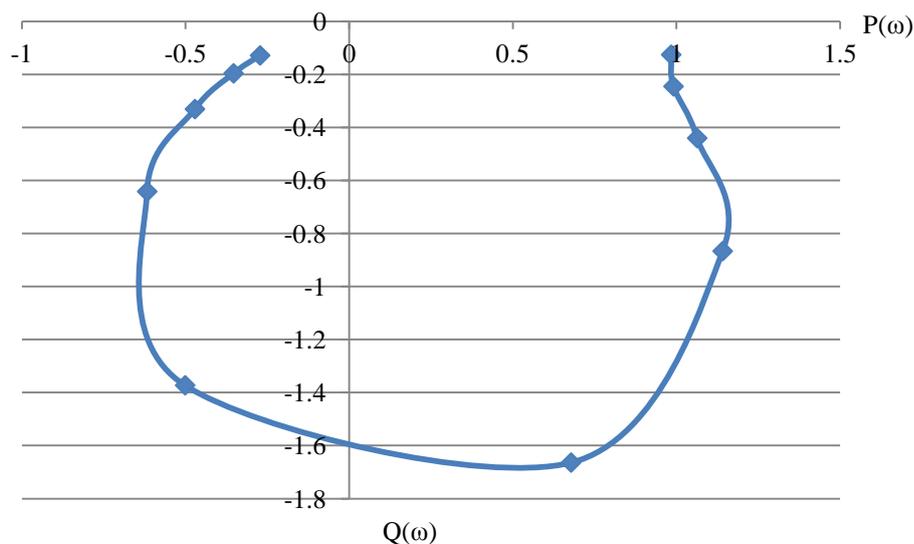
b)  $e_0 = 1; e_1 = 0,2; e_2 = 1; F = 0,5$

**Рис. 3.** Примеры фазо-частотной характеристики нелинейной динамической системы второго порядка с сухим и линейным трением с соответствующими параметрами  $e_0, e_1, e_2, F$ .

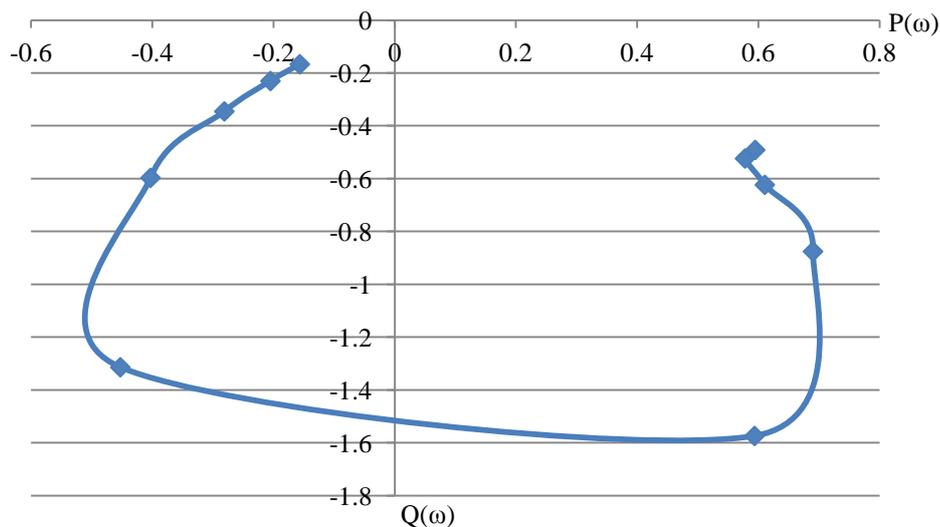
Из рис. 3а, 3б видно, что фазо-частотная характеристика плавно изменяет свое значение в окрестности резонансной частоты  $\omega_r = \sqrt{\frac{e_0}{e_2}}$ .

Частотная передаточная функция  $W(j\omega)$  может быть изображена на комплексной плоскости в виде годографа [8].

Примеры годографа системы, вычисленные по формулам (6) с учетом (9), приведены на рис.4а, 4б.



a)  $e_0 = 1; e_1 = 0,5; e_2 = 1; F = 0,1$



b)  $e_0 = 1; e_1 = 0,2; e_2 = 1; F = 0,5$

**Рис. 4.** Примеры годографа нелинейной системы второго порядка с сухим и линейным трением с соответствующими параметрами  $e_0, e_1, e_2, F$ .

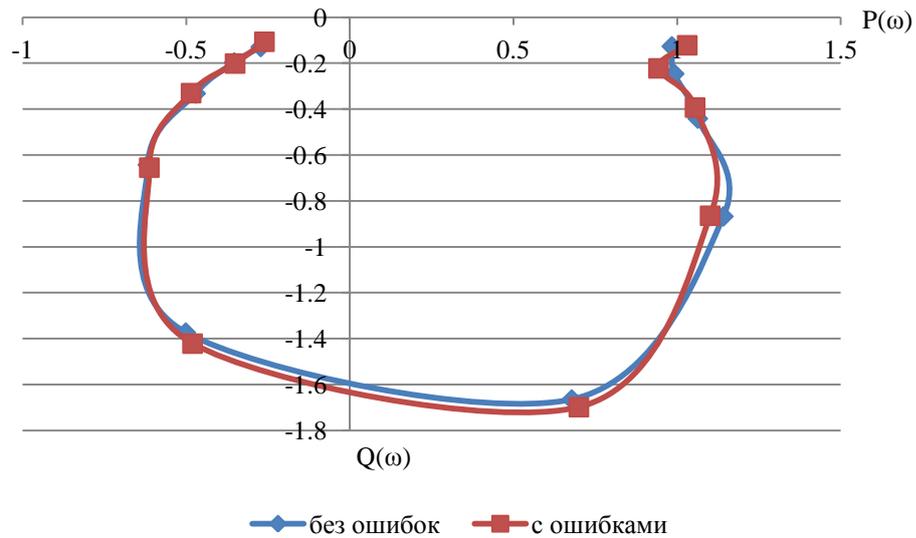
На рис 4а, 4б видна трансформация годографа с изменением величины сухого трения.

### 3. Математическое моделирование с целью получения псевдоэкспериментальных данных

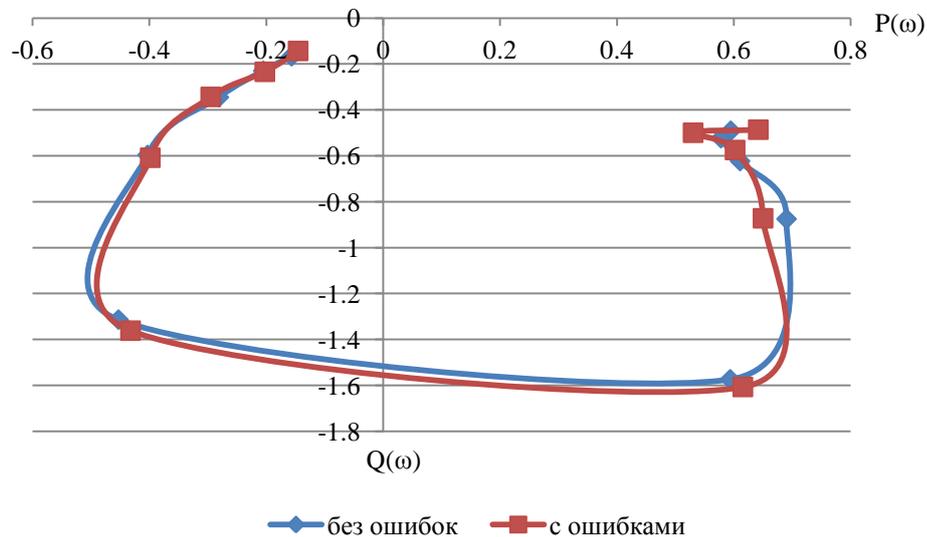
При получении частотных характеристик реальных систем в эксперименты вмешиваются помехи, в результате которых точки годографа смещаются случайным образом. Введем обозначения для определенных с погрешностями вещественных и мнимых значений отсчетов, полученных с учетом соотношений (6), (9) для значений псевдоэкспериментального годографа динамической системы для  $n_{exp}$  значений частот  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_{exp}}$ :

$$P_1 = P(\omega_1), \dots, P_{n_{exp}} = P(\omega_{n_{exp}}), Q_1 = Q(\omega_1), \dots, Q_{n_{exp}} = Q(\omega_{n_{exp}}). \quad (12)$$

На рис. 5а, 5б показаны примеры искаженных псевдоэкспериментальных годографов нелинейного звена второго порядка с сухим и линейным трением относительно годографов, приведенных на рис. 4а, 4б соответственно, при наличии случайных погрешностей в диапазоне  $[-0,05, 0,05]$  в псевдоэкспериментальных данных для  $n_{exp}=10$ .



a)  $e_0 = 1; e_1 = 0,5; e_2 = 1; F = 0,1$



b)  $e_0 = 1; e_1 = 0,2; e_2 = 1; F = 0,5$

**Рис. 5.** Примеры искаженного годографа нелинейной системы второго порядка с сухим и линейным трением при наличии в псевдоэкспериментальных соответствующих случайных погрешностей  $e_0, e_1, e_2, F$ .

Решение задачи идентификации для нелинейной системы второго порядка с сухим и линейным трением будем искать в классе годографов, задаваемых моделью

$$W_M(j\omega) = \frac{1}{a_0 + \left( \frac{4G}{\pi A(\omega)} + a_1 \omega \right) j + a_2 (j\omega)^2} \quad (13)$$

или моделью

$$W_M(j\omega) = \frac{\alpha + j\beta}{\gamma + j\delta}, \quad (14)$$

где

$$\alpha = 1; \beta = 0; \gamma = a_0 - a_2 \omega^2; \delta = \frac{4G}{\pi A(\omega)} + a_1 \omega. \quad (15)$$

Отклонение  $\Delta W_i$   $i$ -го отсчета  $W_m(j\omega_i)$  годографа модели на частоте  $\omega_i$  от  $i$ -го отсчета  $W_s(j\omega_i)$  экспериментального годографа идентифицируемой системы равно

$$\Delta W_i = W_s(j\omega_i) - W_m(j\omega_i).$$

С учетом (5), (14) можно записать в виде

$$\Delta W_i = P_i + jQ_i - \frac{\alpha_i + j\beta_i}{\gamma_i + j\delta_i}, \quad (16)$$

где параметры  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$  соответствуют частоте  $\omega_i$ .

Необходимо ввести приемлемый критерий, характеризующий близость двух годографов на всей совокупности экспериментальных точек, и минимизировать его по параметрам модели системы  $a_0, a_1, a_2, G$ . В качестве критерия (меры) близости можно выбрать сумму квадратов модулей расхождений  $\Delta W_i$ :

$$I = \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} |\Delta W_i|^2. \quad (17)$$

Минимизация меры  $I$  приводит к нелинейной системе уравнений для определения коэффициентов  $a_0, a_1, a_2, G$  модели. В работах [9 – 11] применен способ, которым мы воспользуемся, и который состоит в следующем. Соотношение (16) умножим на отличный от нуля комплексный множитель  $(\gamma_i + j\delta_i)$ :

$$\Delta H_i = \Delta W_i(\gamma_i + j\delta_i). \quad (18)$$

Тогда с учетом (16), (18) для  $\Delta H_i$  и для  $|\Delta H_i|^2$  получим

$$\Delta H_i = P_i\gamma_i - Q_i\delta_i - \alpha_i + j(P_i\delta_i + Q_i\gamma_i - \beta_i), \quad (19)$$

$$|\Delta H_i|^2 = (P_i\gamma_i - Q_i\delta_i - \alpha_i)^2 + (P_i\delta_i + Q_i\gamma_i - \beta_i)^2.$$

В качестве меры близости годографов вместо меры (17) примем меру  $J$ , равную сумме квадратов модулей  $|\Delta H_i|^2$  (19):

$$J = \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} |\Delta H_i|^2 = \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} [(P_i\gamma_i - Q_i\delta_i - \alpha_i)^2 + (P_i\delta_i + Q_i\gamma_i - \beta_i)^2]. \quad (20)$$

Мера близости  $J$  экспериментально полученного годографа системы и годографа модели системы на всей совокупности экспериментальных точек задается формулой (20), которая после некоторого преобразования принимает вид

$$J = \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} [(P_i^2 + Q_i^2)\gamma_i^2 + (P_i^2 + Q_i^2)\delta_i^2 - 2P_i\gamma_i\alpha_i + 2Q_i\delta_i\alpha_i - 2P_i\delta_i\beta_i - 2Q_i\gamma_i\beta_i + \alpha_i^2 + \beta_i^2]. \quad (21)$$

Мера (21) является функцией параметров  $a_0, a_1, a_2, G$  частотной передаточной функции модели (13). Для минимизации меры  $J$  приравняем нулю частные производные от  $J$  по этим параметрам:

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial G} = 0. \quad (22)$$

Для рассматриваемой нелинейной системы второго порядка система уравнений (22) с учетом (15) принимает вид

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=1}^{n \text{exp}} (P_i^2 + Q_i^2) - a_2 \sum_{i=1}^{n \text{exp}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2 &= \sum_{i=1}^{n \text{exp}} P_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n \text{exp}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2 - a_2 \sum_{i=1}^{n \text{exp}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^4 &= \sum_{i=1}^{n \text{exp}} P_i \omega_i^2, \\ a_1 \sum_{i=1}^{n \text{exp}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2 + G \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{n \text{exp}} (P_i^2 + Q_i^2) \frac{\omega_i}{A(\omega_i)} &= - \sum_{i=1}^{n \text{exp}} Q_i \omega_i, \\ a_1 \sum_{i=1}^{n \text{exp}} (P_i^2 + Q_i^2) \frac{\omega_i}{A(\omega)} + G \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{n \text{exp}} (P_i^2 + Q_i^2) \frac{1}{A^2(\omega_i)} &= - \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^{n \text{exp}} Q_i \frac{1}{A(\omega_i)} \end{aligned}$$

или с учетом (7) вид

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=1}^{n \text{exp}} (P_i^2 + Q_i^2) - a_2 \sum_{i=1}^{n \text{exp}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2 &= \sum_{i=1}^{n \text{exp}} P_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n \text{exp}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2 - a_2 \sum_{i=1}^{n \text{exp}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^4 &= \sum_{i=1}^{n \text{exp}} P_i \omega_i^2, \\ a_1 \sum_{i=1}^{n \text{exp}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2 + G \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{n \text{exp}} \sqrt{(P_i^2 + Q_i^2)} \omega_i &= - \sum_{i=1}^{n \text{exp}} Q_i \omega_i, \\ a_1 \sum_{i=1}^{n \text{exp}} \sqrt{(P_i^2 + Q_i^2)} \omega_i + G \frac{4 n \text{exp}}{\pi} &= - \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^{n \text{exp}} Q_i \frac{1}{\sqrt{(P_i^2 + Q_i^2)}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Систему уравнений (23) приведем к матричному виду

$$\Psi \bar{a} = \bar{u}, \quad (24)$$

где

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & 0 & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{33} & \psi_{34} \\ 0 & 0 & \psi_{43} & \psi_{44} \end{bmatrix}, \quad \bar{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_2 \\ a_1 \\ G \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Ненулевые элементы матрицы  $\Psi$  и элементы вектора  $\bar{u}$  в (25) имеют значения

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= \sum_{i=1}^{n \text{exp}} (P_i^2 + Q_i^2), & \Psi_{12} &= - \sum_{i=1}^{n \text{exp}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2, \\ \Psi_{21} &= \sum_{i=1}^{n \text{exp}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2, & \Psi_{22} &= - \sum_{i=1}^{n \text{exp}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^4, \\ \Psi_{33} &= \sum_{i=1}^{n \text{exp}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2, & \psi_{34} &= \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{n \text{exp}} \sqrt{(P_i^2 + Q_i^2)} \omega_i, \\ \psi_{43} &= \sum_{i=1}^{n \text{exp}} \sqrt{(P_i^2 + Q_i^2)} \omega_i, & \psi_{44} &= \frac{4 n \text{exp}}{\pi}, \end{aligned}$$

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} P_i, \quad u_2 = \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} P_i \omega_i^2, \quad u_3 = -\sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} Q_i \omega_i, \quad u_4 = -\frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} Q_i \frac{1}{\sqrt{(P_i^2 + Q_i^2)}}.$$

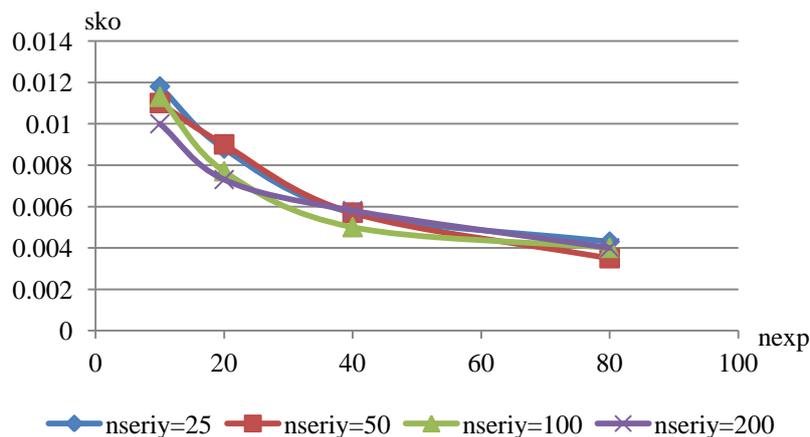
Решая матричное уравнение (24), получим

$$a_0 = \frac{\Psi_{22}u_1 - \Psi_{12}u_2}{\Psi_{11}\Psi_{22} - \Psi_{12}\Psi_{21}}, \quad a_2 = \frac{\Psi_{11}u_2 - \Psi_{21}u_1}{\Psi_{11}\Psi_{22} - \Psi_{12}\Psi_{21}},$$

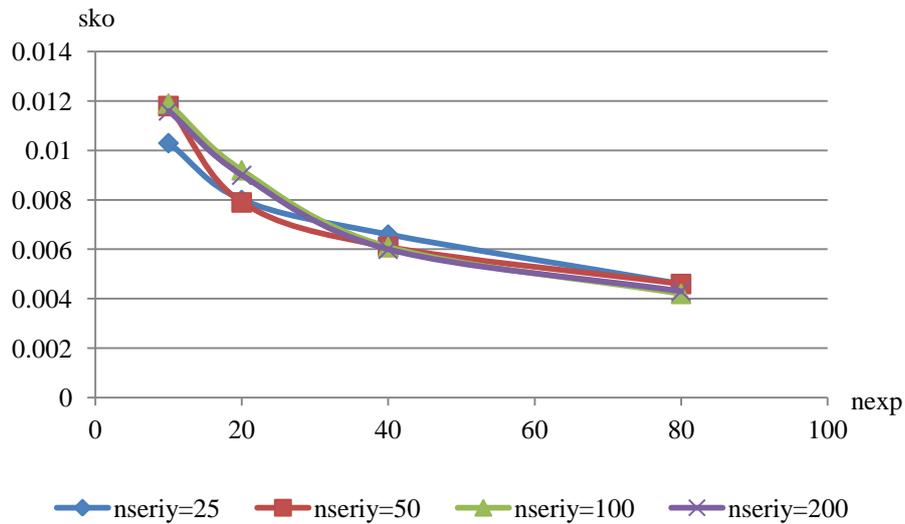
$$a_1 = \frac{\Psi_{44}u_3 - \Psi_{34}u_4}{\Psi_{33}\Psi_{44} - \Psi_{34}\Psi_{43}}, \quad G = \frac{\Psi_{33}u_4 - \Psi_{43}u_3}{\Psi_{33}\Psi_{44} - \Psi_{34}\Psi_{43}}.$$

Были проведены иллюстративные вычислительные эксперименты по оценке погрешности, с которой предложенный алгоритм определяет значения параметров частотной передаточной функции нелинейной системы второго порядка с сухим и линейным трением. В экспериментах заданы конкретные значения параметров  $e_0 = 1$ ,  $e_1 = 0,5$ ,  $e_2 = 1$ ,  $F = 0,1$ .

Погрешности измерения значений  $P_i, Q_i$  моделировались с помощью генератора случайных чисел с равномерным законом плотности распределения вероятностей в диапазоне  $[-0,05, 0,05]$ . Количество отсчетов в годографе системы (т.е. количество экспериментов)  $n_{\text{exp}} = 10, 20, 40, 80$ . Для каждого конкретного количества экспериментов  $n_{\text{exp}}$  проводилось  $n_{\text{seriy}}$  серий этих экспериментов  $n_{\text{seriy}} = 25, 50, 100, 200$ . Рассматривался диапазон частот  $[0, \omega_r]$ , где  $\omega_r = 1$  Гц. В сериях экспериментов вычислялись погрешности  $erre_0 = e_0 - a_0$ ,  $erre_1 = e_1 - a_1$ ,  $erre_2 = e_2 - a_2$ ,  $errF = F - G$  определения параметров  $e_0, e_1, e_2, F$  и среднеквадратические отклонения  $sko$  для случайных величин  $erre_0, erre_1, erre_2, errF$ , а также строились гистограммы для этих величин.



а)  $erre_0; e_0$

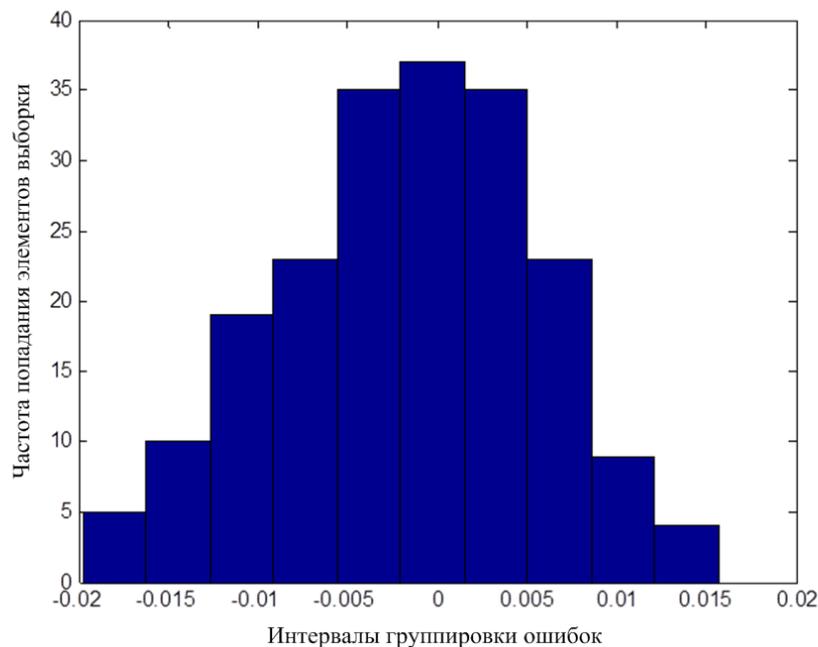


b)  $erre_1; e_1$

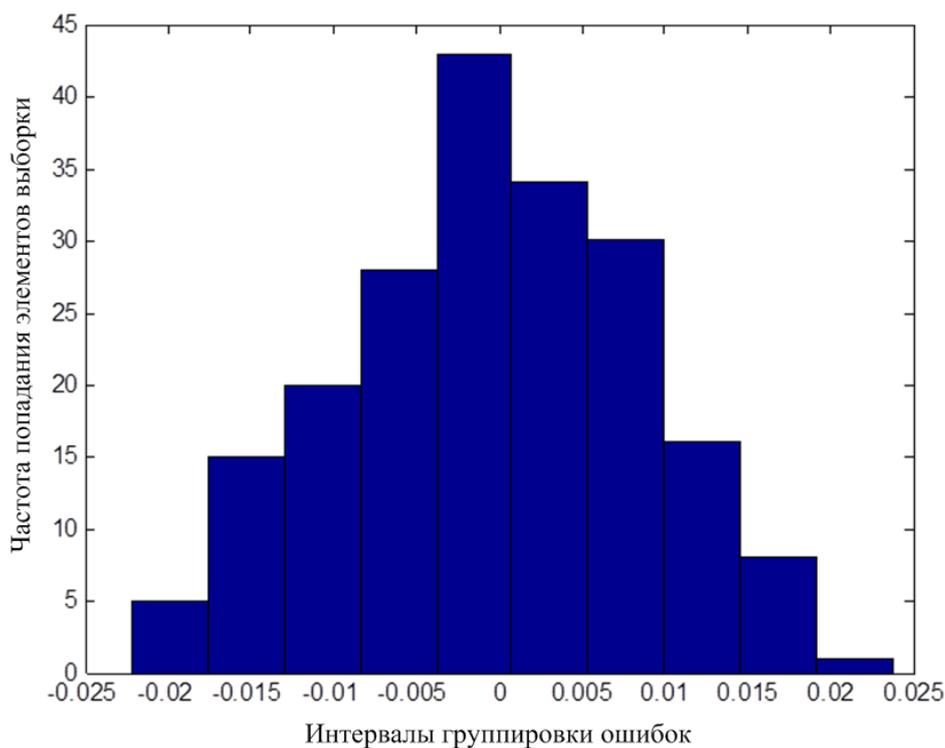
**Рис. 6.** Зависимости среднеквадратического отклонения  $sko$  погрешностей  $erre_0, erre_1$  определения коэффициентов  $e_0, e_1$  от количества отсчетов  $nexp$  годографа системы при погрешности измерений в диапазоне  $[-0,05, 0,05]$  и числе серий  $nseriy=25, 50, 100, 200$ .

Из рис. 6а, 6б видно, что в рассматриваемых случаях можно ограничиться количеством отсчетов годографа от 20 до 40.

На рис. 7а, 7б в качестве примеров показаны гистограммы погрешностей  $erre_0, erre_1$  определения коэффициентов  $e_0, e_1$ , соответственно.



a)  $erre_0; e_0; sko=0,0073$



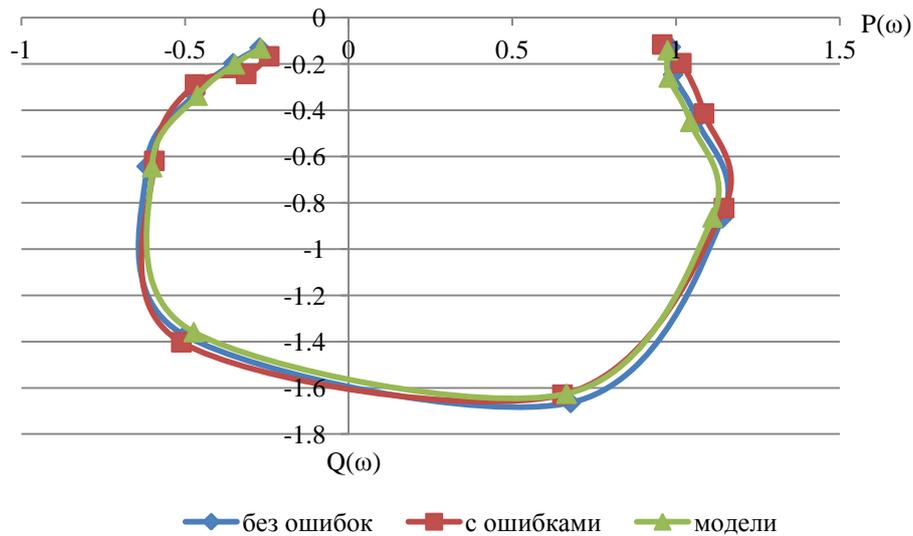
b)  $erre_1; e_1; sko=0,0090$

**Рис. 7.** Гистограммы погрешностей  $erre_0, erre_1$  определения коэффициентов  $e_0, e_1$  с соответствующими среднеквадратическими отклонениями  $sko$  ( $nexp=20$ , диапазон погрешности измерений  $[-0,05, 0,05]$ , количество серий  $nseriy=200$ ).

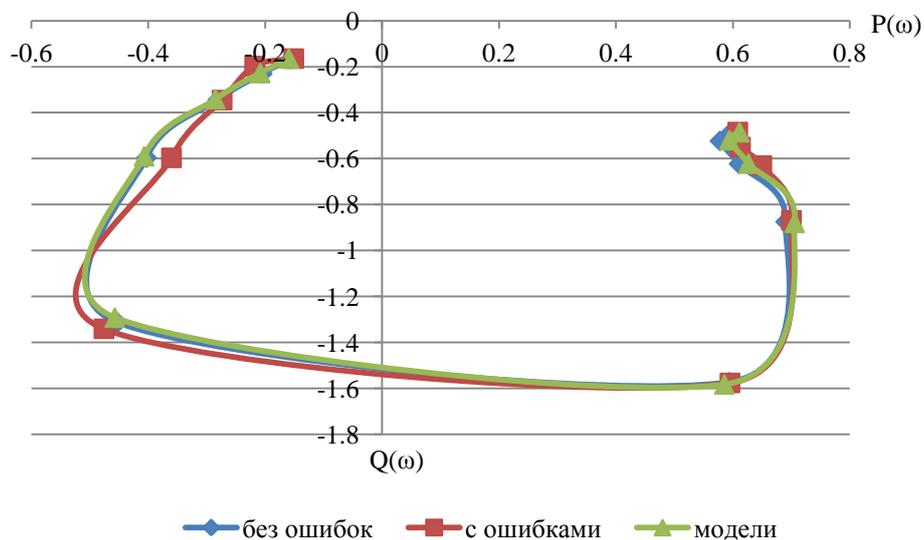
Вычислительный эксперимент показал, что ошибки имеют близкий к нормальному закон распределения и среднеквадратическое отклонение равно  $sko=0,0073$ . Это значит, что  $\sim 68\%$  ошибок находятся в диапазоне  $\pm sko = 0,0073$ , а  $99\%$  ошибок – в диапазоне  $\pm 3sko = \pm 0,0219$ . Таким образом, погрешность определения значения коэффициента  $e_0=1$  в иллюстративном вычислительном эксперименте не превышает диапазона погрешности измерений отсчетов годографа  $[-0,05, 0,05]$ .

Аналогичные результаты были получены для погрешностей определения коэффициентов  $e_1, e_2, F$ . Например, для погрешности  $erre_1$  определения коэффициента  $e_1$  ( $nexp=20$ , погрешность измерений в диапазоне  $[-0,05, 0,05]$ , количество серий  $nseriy=200$ ), среднеквадратическое отклонение  $sko=0,0090$ .

На рис. 8а, 8б для каждого из двух вариантов значений параметров  $e_0, e_1, e_2, F$  соответственно приведены три годографа: годограф системы, когда погрешность измерения отсчетов годографа равна нулю; годограф системы, когда погрешность измерения отсчетов годографа не равна нулю; годограф найденной модели системы.



a)  $e_0 = 1; e_1 = 0,5; e_2 = 1; F = 0,1$



b)  $e_0 = 1; e_1 = 0,2; e_2 = 1; F = 0,5$

**Рис. 8.** Годограф системы при нулевой ошибке измерения отсчетов, годограф системы при ненулевых ошибках измерения отсчетов в диапазоне  $[-0,05, 0,05]$ ; годограф найденной модели системы (количество экспериментов  $n_{exp}=10$ ).

## Выводы

В статье предложен алгоритм идентификации нелинейной динамической системы по экспериментально полученным отсчетам частотного годографа системы. В качестве меры близости годографов системы и модели системы выбрана сумма квадратов модулей модификации отклонений отсчетов годографа модели системы от соответствующих экспериментально полученных отсчетов системы.

В иллюстративном вычислительном эксперименте показано, что для нелинейной системы второго порядка с сухим и линейным трением можно ограничиться количеством отсчетов годографа в диапазоне от 20 до 40.

Иллюстративный вычислительный эксперимент показал, что при использовании предложенного алгоритма идентификации нелинейной динамической системы по частотному годографу погрешность определения значений коэффициентов частотной передаточной функции системы второго порядка с сухим и линейным трением значительно меньше диапазона погрешности измерений экспериментальных отсчетов годографа этой системы.

### Список литературы

1. Жданов А.И., Кацюба О.А. Идентификация по методу наименьших квадратов параметров уравнений авторегрессии при аддитивных ошибках измерений // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. С. 29-38.
2. Болквядзе Г.Р. Класс моделей Гаммерштейна в задачах идентификации стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 2003. № 1. С. 42-55.
3. Павленко С.В. Применение вейвлет-фильтрации в процедуре идентификации нелинейных систем на основе моделей Вольтерры // Восточно-европейский журнал передовых технологий. 2010. Т. 6, № 4 (48). С. 65-70.
4. Райбман Н.С., Капитоненко В.В., Овсепян Ф.А., Варлаки П.М. Дисперсионная идентификация // под ред. Н.С. Райбмана. М.: Наука, 1981. 336 с.
5. Павленко С.В. Идентификация нелинейных динамических систем в виде ядер Вольтерры на основе данных измерений импульсных откликов // Электронное моделирование. 2010. Т. 32, № 3. С. 3-18.
6. Райбман Н.С. Методы нелинейной и минимаксной идентификации // Современные методы идентификации систем: сб. / под ред. П. Эйкхоффа; пер. с англ. Я.З. Цыпкина. М.: Мир, 1983. С. 177-277.
7. Попов Е.П., Пальтов И.П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М.: ГИФМЛ, 1960. 790 с.
8. Основы автоматического управления / под ред. В.С. Пугачева. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1968. 680 с.
9. Боевкин В.И., Павлов Ю.Н. Регрессионный анализ в прикладной задаче идентификации. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1990. (Труды МГТУ им. Н.Э. Баумана; № 546) .
10. Боевкин В.И., Недашковский В.М., Павлов Ю.Н. Идентификация линейных динамических звеньев по частотному годографу // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013 . № 9. С. 349-360. DOI: [10.7463/0913.0618917](https://doi.org/10.7463/0913.0618917)
11. Павлов Ю.Н., Недашковский В.М., Тихомирова Е.А., Шавырин И.Б. Метод гармонической линеаризации в задаче идентификации нелинейных динамических

систем // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 4.  
С. 382-397. DOI: [10.7463/0414.0704613](https://doi.org/10.7463/0414.0704613)

## **Identification of Nonlinear Dynamical Systems with the Specified Nonlinearity Types in Hodographs**

Y.N. Pavlov<sup>1</sup>, V.M. Nedashkovskii<sup>1,\*</sup>,  
E.A. Tihomirova<sup>1</sup>

[\\*vmniu3@bmstu.ru](mailto:vmniu3@bmstu.ru)

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

---

**Keywords:** harmonic linearization, identification, nonlinear dynamical systems, dry friction, linear friction, frequency hodograph

---

This work concerns the problem of identification of nonlinear dynamic systems from the experimental data obtained by applying test signals to the system.

The goal is to determinate the coefficients of differential equations of systems by the experimental frequency hodographs and separation of similar, but different in essence forces: dissipative forces of the first derivative in the motion equations and dissipative action force of dry friction.

It was suggested to use the harmonic linearization method and to approximate the nonlinearity of "dry friction" by linear friction with the corresponding harmonic linearization coefficient.

It was assumed that the frequency transfer function of the identified system is a well-known value.

It was also assumed that there are disturbances while obtaining frequency characteristics of the real-world system. As a result, the points of experimentally obtained hodograph move randomly.

A solution of the identification problem was searched in the hodograph class, specified by the system model, which had the same form of the frequency transfer function as a form of the frequency transfer function of the system identified.

Searching for the unknown coefficients of the frequency transfer function of the system model was carried out by minimizing a criterion (measure) of proximity of the experimentally obtained hodograph system, which was previously described and published by one of the authors, and the system hodograph model for all the experimental points.

A solution of the nonlinear dynamic system identification in frequency hodograph was reduced to solving an equations system, linear relative to the unknown parameters of the frequency transfer function of the system model.

For the second-order dynamic system with combination of nonlinearity of the type "dry friction" and linear friction was developed the simulation software to provide pseudo experimental data of random accuracy and determine parameters of this system.

A computational experiment of accuracy evaluation was made with which the proposed algorithm determines the parameters of the system.

Illustrative numerical simulation has demonstrated that the accuracy of determining the values of the coefficients transfer function does not exceed the range of measurement accuracy of experimental samples of this system hodograph.

This method of the identification of nonlinear dynamic systems is not mentioned in the well-known publications.

The identification method of nonlinear dynamical systems, described in the article, can be used to determine the parameters of a variety of power actuators.

Using the method of harmonic linearization and identification of dynamical systems hodographs is promising for solving the problem of the identification of nonlinear systems with different types of nonlinearities.

## References

1. Zhdanov A.I., Katsiuba O.A. Identification by the method of least squares of autoregression equation parameters with additive measurement errors. *Avtomatika i telemekhanika*, 1982, no. 2, pp. 29-38. (English translation: *Automation and Remote Control*, 1982, vol. 43, no. 2, pp. 158-166.).
2. Bolkvadze G.R. Hammerstein Models for Identification of Stochastic Systems. *Avtomatika i telemekhanika*, 2003, no. 1, pp. 42-55. (English translation: *Automation and Remote Control*, 2003, vol. 64, iss. 1, pp. 37-48. DOI: [10.1023/A:1021820307806](https://doi.org/10.1023/A:1021820307806) ).
3. Pavlenko S.V. Application of wavelet filtering in the process of identification of nonlinear systems in the form of kernels of Volterra. *Vostochno-evropeiskii zhurnal peredovykh tekhnologii = Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2010, vol. 6, no. 4 (48), pp. 65-70. (in Russian).
4. Raibman N.S., Kapitonenko V.V., Ovsepiyan F.A., Varlaki P.M. *Dispersionnaia identifikatsiia* [Dispersion identification]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 336 p. (in Russian).
5. Pavlenko S.V. Identification of Nonlinear Dynamic Systems in the Form of the Volterra Kernels on the Basis of the Data of Pulse Response Measurements. *Elektronnoe modelirovanie*, 2010, vol. 32, no. 3, pp. 3-18.
6. Rajbman N.S. Extensions to nonlinear and minimax approaches. In: Eykhoff P., ed. *Trends and Progress in System Identification*. Oxford, Pergamon Press, 1981, pp. 185-237. (Russ.

- ed.: Rajbman N.S. *Metody nelineinoi i minimaksnoi identifikatsii*. In: Eykhoff P., ed. *Sovremennye metody identifikatsii sistem: sb.* Moscow, Mir Publ., 1983, pp. 177-277.).
7. Popov E.P., Pal'tov I.P. *Priblizhennyye metody issledovaniya nelineynykh avtomaticheskikh system* [Approximate methods of study of nonlinear automatic systems]. Moscow, GIFML Publ., 1960. 790 p. (in Russian).
  8. Pugachev V.S., ed. *Osnovy avtomaticheskogo upravleniya* [Basics of automatic control]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 680 p. (in Russian).
  9. Boevkin V.I., Pavlov Yu.N. *Regressionnyy analiz v prikladnoy zadache identifikatsii* [Regression analysis in applied problem of identification]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1990. (*Trudy MGTU im. N.E. Baumana* [Proceedings of the Bauman MSTU]; no. 546). (in Russian).
  10. Boevkin V.I., Nedashkovskii V.M., Pavlov Iu.N. Identification of linear dynamic elements using a frequency locus. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 9, pp. 349-360. DOI: [10.7463/0913.0618917](https://doi.org/10.7463/0913.0618917) (in Russian).
  11. Pavlov Iu.N., Nedashkovskii V.M., Tikhomirova E.A., Shavyrin I.B. Harmonic linearization method in the identification of nonlinear dynamical systems. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 4. S, 382-397. DOI: [10.7463/0414.0704613](https://doi.org/10.7463/0414.0704613) (in Russian).