НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

Об одном методе решения терминальных задач для аффинных систем

11, ноябрь 2013

DOI: 10.7463/1113.0622543

Фетисов Д. А.

УДК 519.71

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

dfetisov@yandex.ru

Введение

Терминальная задача является одной из основных задач теории управления и заключается в отыскании таких управлений, которые за некоторый интервал времени переводят рассматриваемую систему из заданного начального состояния в заданное конечное состояние. Терминальные задачи могут различаться по постановке – дополнительно могут накладываться различные ограничения на состояния системы, на управления, интервал времени управления может быть изначально задан, а может требоваться лишь то, чтобы он был конечен. Один из подходов [1, 2] к решению терминальных задач состоит в преобразовании системы к некоторому специальному виду, для которого методы решения терминальных задач известны. Если аффинная система линеаризуема обратной связью, то решение терминальной задачи может быть найдено на основе концепции обратных задач динамики [1, 3]. Если аффинная система не линеаризуема обратной связью, но эквивалентна регулярной системе квазиканонического вида [4], то для систем с одномерным управлением метод решения предложен в работах [5, 6], а для систем с многомерным управлением — в работах [7, 8]. В то же время область применения метода, предложенного в [7, 8], ограничена существенными предположениями: в системе квазиканонического вида подсистемы канонического вида должны быть двумерны, а нелинейная подсистема одномерна. Кроме того, интервал времени управления в [7, 8] изначально не задается, а определяется в процессе решения. В данной работе рассматриваются аффинные системы, эквивалентные регулярным системам квазиканонического вида, и предлагается метод решения терминальных задач для таких систем. При этом предполагается, что интервал времени управления задан изначально, а размерность нелинейной подсистемы не превосходит размерность управления.

1. Преобразование системы к квазиканоническому виду

Рассмотрим аффинную систему

$$\dot{x} = F(x) + \sum_{j=1}^{m} G_j(x) u_j, \tag{1}$$

где $x = (x_1,\ \ldots,\ x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1,\ \ldots,\ u_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$, $F(x) = (F_1(x),\ \ldots,\ F_n(x))^{\mathrm{T}}$, $G_j(x) = (G_{1j}(x),\ \ldots,\ G_{nj}(x))^{\mathrm{T}}$, $F_i(x), G_{ij}(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $i = \overline{1,\,n}$, $j = \overline{1,\,m}$, и терминальную задачу в следующей постановке: найти такие непрерывные управления $u_1 = u_1(t)$, …, $u_m = u_m(t)$, $t \in [0,\ t_*]$, которые за заданное время t_* переводят систему (1) из начального состояния $x(0) = x_0$ в конечное состояние $x(t_*) = x_*$.

Системе (1) на пространстве состояний $\mathbb{R}^n$ взаимно однозначно соответствуют векторные поля

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} F_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \mathbf{G}_j = \sum_{i=1}^{n} G_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad j = \overline{1,\,m}.$$

Обозначим коммутатор двух векторных полей $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ через $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, и пусть $\mathrm{ad}^0_{\mathbf{X}}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Y}$, $\mathrm{ad}^k_{\mathbf{X}}\,\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathrm{ad}^{k-1}_{\mathbf{X}}\,\mathbf{Y}]$, $k = 1,\,2,\,\ldots$

Следующая теорема [4] устанавливает необходимые и достаточные условия, при выполнении которых система (1) преобразуется к квазиканоническому виду

$$\begin{cases} \dot{z}^i_1 = z^i_2, \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dot{z}^i_{r_i-1} = z^i_{r_i}, \\ \dot{z}^i_{r_i} = f_i(z^1, \ldots, z^m, \eta) + \sum\limits_{j=1}^{m} g_{ij}(z^1, \ldots, z^m, \eta) u_j, \quad i = \overline{1,\,m}, \\ \dot{\eta} = q(z^1, \ldots, z^m, \eta), \end{cases} \tag{2}$$

где $r_1 + \ldots + r_m = n - \rho$, $z^i = \left(z^i_1,\ \ldots,\ z^i_{r_i}\right)^{\mathrm{T}}$, $\eta = (\eta_1,\ \ldots,\ \eta_\rho)^{\mathrm{T}}$, $q(z^1, \ldots, z^m, \eta) = (q_1(z^1, \ldots, z^m, \eta),\ \ldots,\ q_\rho(z^1, \ldots, z^m, \eta))^{\mathrm{T}}$.

Теорема 1. Для того чтобы аффинная система (1) на множестве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ приводилась к квазиканоническому виду (2), необходимо и достаточно, чтобы:

1) существовали функции $\varphi_i(x) \in C^{\infty}(\Omega)$, $i = \overline{1,\,m}$, удовлетворяющие в Ω системе уравнений в частных производных первого порядка

$$\mathrm{ad}^k_{\mathbf{F}}\,\mathbf{G}_j \varphi_i(x) = 0, \quad k = \overline{0,\,r_i - 2}, \quad i,\,j = \overline{1,\,m}, \quad x \in \Omega;$$

2) существовали такие функции $\varphi_{n-\rho+l}(x) \in C^{\infty}(\Omega)$, $l = \overline{1,\,\rho}$, что для всех $x \in \Omega$

$$\mathbf{G}_j \varphi_{n-\rho+l}(x) = 0, \quad j = \overline{1,\,m}, \quad l = \overline{1,\,\rho},$$

и отображение $\Phi\colon \Omega \to \Phi(\Omega)$, задаваемое системой функций

$$z^i_k = \mathbf{F}^{k-1} \varphi_i(x), \quad k = \overline{1,\,r_i}, \ \ i = \overline{1,\,m}, \qquad \eta_l = \varphi_{n-\rho+l}(x), \ \ l = \overline{1,\,\rho},$$

являлось диффеоморфизмом.

Если матрица коэффициентов при управлениях в системе (2)

$$g(z^1, \ldots, z^m, \eta) = \begin{pmatrix} g_{11}(z^1, \ldots, z^m, \eta) & \ldots & g_{1m}(z^1, \ldots, z^m, \eta) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{m1}(z^1, \ldots, z^m, \eta) & \ldots & g_{mm}(z^1, \ldots, z^m, \eta) \end{pmatrix}$$

невырождена на множестве $\Phi(\Omega)$, то систему (2) называют регулярной на $\Phi(\Omega)$.

Если система (1) удовлетворяет условиям теоремы 1 и $\Phi(\Omega) = \mathbb{R}^n$, то терминальная задача для этой системы преобразуется в эквивалентную терминальную задачу для системы (2): найти непрерывные управления $u_1 = u_1(t)$, $\ldots$, $u_m = u_m(t)$, $t \in [0,\ t_*]$, переводящие систему (2) за время t_* из начального состояния

$$\Phi(x_0) = \bigl(z_0^1,\ \ldots,\ z_0^m,\ \eta_0\bigr) \tag{3}$$

в конечное состояние

$$\Phi(x_*) = \bigl(z_*^1,\ \ldots,\ z_*^m,\ \eta_*\bigr). \tag{4}$$

Управления $u_1 = u_1(t)$, $\ldots$, $u_m = u_m(t)$, являющиеся решением задачи (3), (4) для системы (2), одновременно являются решением и исходной терминальной задачи для системы (1). В связи с этим далее будем рассматривать терминальную задачу (3), (4) для системы (2).

2. Решение терминальной задачи для системы квазиканонического вида

В работе [5] сформулировано и доказано необходимое и достаточное условие существования решения терминальной задачи для регулярной системы квазиканонического вида со скалярным управлением. Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2. Для того чтобы существовали непрерывные управления $u_1 = u_1(t)$, $\ldots$, $u_m = u_m(t)$, $t \in [0,\ t_*]$, являющиеся решением терминальной задачи (3), (4) для системы (2), необходимо и достаточно, чтобы существовали функции $B_i(t) \in C^{r_i}([0, t_*])$, $i = \overline{1,\ m}$, такие, что:

1) вектор-функции $\overline{B}_i(t) = \bigl(B_i(t),\ B_i'(t),\ \ldots,\ B_i^{(r_i-1)}(t)\bigr)^{\mathrm{T}}$ удовлетворяют условиям

$$\overline{B}_i(0) = z_0^i, \quad \overline{B}_i(t_*) = z_*^i, \tag{5}$$

2) решение $\eta(t)$ задачи Коши

$$\dot{\eta} = q\bigl(\overline{B}_1(t), \ldots, \overline{B}_m(t), \eta\bigr), \quad \eta(0) = \eta_0, \tag{6}$$

определено при всех $t \in [0,\ t_*]$ и удовлетворяет условию

$$\eta(t_*) = \eta_*. \tag{7}$$

При этом (см. доказательство теоремы 2 в [5]) управление $u = u(t)$, являющееся решением терминальной задачи, определяется равенством

$$u(t) = g^{-1}\big(\overline{B}_1(t), \ldots, \overline{B}_m(t), \eta(t)\big) \begin{pmatrix} B_1^{(r_1)}(t) - f_1\big(\overline{B}_1(t), \ldots, \overline{B}_m(t), \eta(t)\big) \\ \ldots \\ B_m^{(r_m)}(t) - f_m\big(\overline{B}_1(t), \ldots, \overline{B}_m(t), \eta(t)\big) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

а соотношения $z^i = \overline{B}_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, $\eta = \eta(t)$, $t \in [0,\ t_*]$, являются параметрическими уравнениями той фазовой траектории системы (2), которая соединяет состояния (3) и (4).

Будем искать функции $B_1(t), \ldots, B_m(t)$ из теоремы 2 в виде

$$B_i(t) = b_i(t) + c_i\, d_i(t), \quad i = \overline{1, m}, \tag{9}$$

где функции $b_i(t)$, $d_i(t) \in C^{r_i}([0, t_*])$, вектор-функции $\overline{b}_i(t) = \big(b_i(t),\ b_i'(t),\ \ldots,\ b_i^{(r_i-1)}(t)\big)^{\mathrm{T}}$ удовлетворяют условиям

$$\overline{b}_i(0) = z_0^i, \quad \overline{b}_i(t_*) = z_*^i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{10}$$

вектор-функции $\overline{d}_i(t) = \big(d_i(t),\ d_i'(t),\ \ldots,\ d_i^{(r_i-1)}(t)\big)^{\mathrm{T}}$ удовлетворяют условиям

$$\overline{d}_i(0) = 0, \quad \overline{d}_i(t_*) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \tag{11}$$

а $c_i \in \mathbb{R}$ нужно найти.

В качестве функций $b_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, можно взять, например, интерполяционные многочлены степеней $2r_i - 1$, в качестве функций $d_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, — любые функции, для которых выполняются соотношения (11). При указанном выборе функций $B_i(t)$ условие 1) теоремы 2 выполнено для любых $c_i \in \mathbb{R}$. Числа c_i нужно подобрать так, чтобы было выполнено условие 2) этой теоремы. Если найдутся такие $c_1 = c_{1*}, \ldots, c_m = c_{m*}$, что решение $\eta(t)$ задачи Коши (6) удовлетворяет дополнительному требованию $\eta(t_*) = \eta_*$, то для функций $B_i(t) = b_i(t) + c_{i*}\, d_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, выполнены все условия теоремы 2 и, следовательно, терминальная задача (3), (4) для системы (2) имеет решение.

Далее будем полагать, что $\rho \leqslant m$. Под нормой векторов из $\mathbb{R}^\rho$ будем понимать евклидову норму, под нормой матрицы A типа $\rho \times \rho$ — спектральную норму: $\|A\| = \sqrt{\lambda}$, где λ — максимальное собственное число матрицы $A^{\mathrm{T}}A$. Пусть $r = \max\{r_1,\ \ldots,\ r_m\}$. Для всех пар индексов l и j, таких, что $l \in \{2,\ \ldots,\ r\}$, $j \in \{1,\ \ldots,\ \rho\}$, $l > r_j$, введем формально дополнительные переменные z_l^j. Обозначим $z_l = (z_l^1,\ \ldots,\ z_l^\rho)^{\mathrm{T}}$, $l = \overline{1, r}$. Будем полагать по определению, что если $l > r_j$, то $\dfrac{\partial q_i}{\partial z_l^j} = 0$ для всех $i = \overline{1, \rho}$. Обозначим через $\dfrac{\partial q}{\partial z_l}$ матрицы типа $\rho \times \rho$ с элементами $\dfrac{\partial q_i}{\partial z_l^j}$, $i, j = \overline{1, \rho}$.

Независимо от номера i зададим функции $d_i(t)$ формулой

$$d_i(t) \equiv d(t) = \frac{t^r (t_* - t)^r}{\int\limits_0^{t_*} t^r (t_* - t)^r dt}. \tag{12}$$

Обозначим $L = \max\limits_{[0, t_*]}\{|d'(t)| + |d''(t)| + \ldots + |d^{(r-1)}(t)|\}$.

Далее будем предполагать, что вектор-функция $q(z^1, \ldots, z^m, \eta)$ удовлетворяет следующим условиям.

I. Матрица $\dfrac{\partial q}{\partial \eta}$ симметрична в $\mathbb{R}^n$ и существуют такие $\lambda_{\min},\ \lambda_{\max} > 0$, что при всех $(z^1,\ \ldots,\ z^m,\ \eta) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^\rho$ выполнены неравенства

$$-\lambda_{\max}\|y\|^2 \leqslant \left(\frac{\partial q}{\partial \eta}y, y\right) \leqslant -\lambda_{\min}\|y\|^2. \tag{13}$$

II. Матрица $\dfrac{\partial q}{\partial z_1}$ симметрична в $\mathbb{R}^n$ и существуют такие $\Lambda_{\min},\ \Lambda_{\max} > 0$, что при всех $(z^1,\ \ldots,\ z^m,\ \eta) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^\rho$ выполнены неравенства

$$\Lambda_{\min}\|y\|^2 \leqslant \left(\frac{\partial q}{\partial z_1}y, y\right) \leqslant \Lambda_{\max}\|y\|^2. \tag{14}$$

III. Для $l = \overline{2,\ r}$ функции $\left\|\dfrac{\partial q}{\partial z_l}\right\|$ ограничены в $\mathbb{R}^n$, т.е. существует такое $M > 0$, что при всех $(z^1,\ \ldots,\ z^m,\ \eta) \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства

$$\left\|\frac{\partial q}{\partial z_l}\right\| \leqslant M. \tag{15}$$

Обозначим

$$\alpha = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}, \quad \beta = \frac{\Lambda_{\max} - \Lambda_{\min}}{\Lambda_{\max} + \Lambda_{\min}}, \quad k_{\min} = \frac{2}{\Lambda_{\min} + \Lambda_{\max}},$$

$$\theta = \left(1 - e^{-\lambda_{\min} t_*}\right)\alpha + e^{-\lambda_{\min} t_*}\beta + k_{\min} M L\,\frac{1 - e^{-\lambda_{\min} t_*}}{\lambda_{\min}}.$$

Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Пусть

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & \ldots & Q_{1\rho}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_{\rho 1}(t) & \ldots & Q_{\rho\rho}(t) \end{pmatrix}, \quad R(t) = \begin{pmatrix} R_1(t) \\ \ldots \\ R_\rho(t) \end{pmatrix},$$

$Q_{ij}(t),\ R_i(t) \in C[0, t_*]$, $i, j = \overline{1,\ \rho}$, и существует такое $\lambda > 0$, что при всех $y \in \mathbb{R}^\rho$, $t \in [0,\ t_*]$ выполнено неравенство

$$\big(Q(t)y, y\big) \leqslant -\lambda\|y\|^2. \tag{16}$$

Тогда решение $y(t)$ задачи Коши

$$\dot{y} = Q(t)y + R(t), \quad y(0) = 0 \tag{17}$$

удовлетворяет неравенству

$$\|y(t_*)\| \leqslant e^{-\lambda t_*}\int\limits_0^{t_*}\|R(t)\|e^{\lambda t}dt. \tag{18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $y(t_*) = 0$, то $\|y(t_*)\| = 0$ и справедливость неравенства (18) следует из неотрицательности его правой части.

Если $y(t_*) \neq 0$, то обозначим через t_0 точную верхнюю грань таких t из промежутка $[0,\ t_*)$, для которых $y(t) = 0$. Тогда $y(t_0) = 0$ и для всех $t \in (t_0,\ t_*)$ выполнено неравенство $y(t) \neq 0$. На интервале $(t_0,\ t_*)$ вычислим и оценим $\frac{d}{dt}\|y\|$, используя неравенство (16) и неравенство Коши — Буняковского:

$$\frac{d}{dt}\|y\| = \frac{(y, \dot{y})}{\|y\|} = \frac{1}{\|y\|}\left[(Q(t)y, y) + (R(t), y)\right] \leqslant \frac{-\lambda\|y\|^2}{\|y\|} + \left(R(t), \frac{y}{\|y\|}\right) \leqslant -\lambda\|y\| + \|R(t)\|.$$

Таким образом, на интервале $(t_0,\ t_*)$ функция $\|y(t)\|$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\frac{d}{dt}\|y\| \leqslant -\lambda\|y\| + \|R(t)\|. \tag{19}$$

Решением дифференциального уравнения

$$\dot{w} = -\lambda w + \|R(t)\|$$

с начальным условием $w(t_0) = 0$ является функция

$$w(t) = e^{-\lambda t}\int\limits_{t_0}^{t} \|R(\tau)\| e^{\lambda\tau} d\tau,$$

поэтому при всех $t \in [t_0, t_*]$ справедливо неравенство [10]

$$\|y(t)\| \leqslant e^{-\lambda t}\int\limits_{t_0}^{t} \|R(\tau)\| e^{\lambda\tau} d\tau$$

и, следовательно,

$$\|y(t_*)\| \leqslant e^{-\lambda t_*}\int\limits_{t_0}^{t_*} \|R(t)\| e^{\lambda t} dt. \tag{20}$$

Из неотрицательности подынтегральной функции в правой части полученного неравенства следует, что

$$\int\limits_{t_0}^{t_*} \|R(t)\| e^{\lambda t} dt \leqslant \int\limits_{0}^{t_*} \|R(t)\| e^{\lambda t} dt,$$

поэтому из (20) следует неравенство (18).

Докажем теперь достаточное условие существования решения терминальной задачи (3), (4) для системы (2).

Теорема 3. Пусть в системе (2) $\rho \leqslant m$ и выполнены условия I–III. Если

$$\rho\theta < 1,$$

то терминальная задача (3), (4) для системы (2) имеет решение.

.

Доказательство. Согласно условию I, при фиксированном $(z^1,\ \ldots,\ z^m,\ \eta) \in \mathbb{R}^n$ матрица $\dfrac{\partial q}{\partial \eta}$ является отрицательно определенной, ее собственные числа принадлежат отрезку $[-\lambda_{\max},\ -\lambda_{\min}]$, а норма удовлетворяет неравенству

$$\left\|\frac{\partial q}{\partial \eta}\right\| \leqslant \lambda_{\max}. \tag{21}$$

Из условия II следует, что при фиксированном $(z^1,\ \ldots,\ z^m,\ \eta) \in \mathbb{R}^n$ матрица $\dfrac{\partial q}{\partial z_1}$ положительно определена, ее собственные числа принадлежат отрезку $[\Lambda_{\min},\ \Lambda_{\max}]$, а норма удовлетворяет неравенству

$$\left\|\frac{\partial q}{\partial z_1}\right\| \leqslant \Lambda_{\max}.$$

Положим $c_{\rho+1} = \ldots = c_m = 0$, обозначим через $c = (c_1,\ \ldots,\ c_\rho)^{\mathrm{T}}$ вектор неизвестных параметров. Из ограниченности в $\mathbb{R}^n$ нормы матрицы $\dfrac{\partial q}{\partial \eta}$ следует, что для любого $c \in \mathbb{R}^\rho$ решение задачи Коши

$$\begin{aligned}&\dot{\eta} = q\big(\overline{b}_1(t) + c_1\,\overline{d}_1(t), \ldots, \overline{b}_\rho(t) + c_\rho\,\overline{d}_\rho(t), \overline{b}_{\rho+1}(t), \ldots, \overline{b}_m(t), \eta\big),\\ &\eta(0) = \eta_0\end{aligned} \tag{22}$$

определено при всех $t \in [0,\ t_*]$.

Условия $b_i(t),\ d_i(t) \in C^{r_i}([0, t_*])$, $i = \overline{1,\ m}$, и $q(z^1, \ldots, z^m, \eta) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ гарантируют, что решение $\eta(t, c)$ задачи Коши (22) дифференцируемо по параметру c, причем матричная функция $\nu = \dfrac{\partial \eta}{\partial c}$ удовлетворяет системе уравнений [9]

$$\dot{\nu} = \frac{\partial q}{\partial \eta}\nu + S, \quad \nu(0) = 0, \tag{23}$$

где S — матрица типа $\rho \times \rho$ с элементами

$$s_{ji} = \frac{\partial q_j}{\partial z^i}\overline{d}_i(t).$$

Матрицу S можно записать в виде

$$S = \sum_{l=1}^{r} \frac{\partial q}{\partial z_l} d^{(l-1)}(t). \tag{24}$$

Следует отметить, что система (23) получается в результате дифференцирования по параметру c исходной системы из (22).

Введем отображение $\Psi\colon \mathbb{R}^\rho \to \mathbb{R}^\rho$, которое каждому $c \in \mathbb{R}^\rho$ ставит в соответствие значение $\eta(t_*, c) \in \mathbb{R}^\rho$ решения $\eta(t, c)$ задачи Коши (22) в момент времени t_*. Тогда задачу можно сформулировать как задачу нахождения такого значения c_*, для которого выполнено равенство $\Psi(c_*) = \eta_*$. Введем также отображение $v\colon \mathbb{R}^\rho \to \mathbb{R}^\rho$, действующее по правилу

$$v(c) = c - k(\Psi(c) - \eta_*),$$

где $k > 0$ — числовой параметр, который будет выбран позже. Равенство $\Psi(c_*) = \eta_*$ эквивалентно тому, что c_* является неподвижной точкой отображения v. Покажем, что при выполнении условий теоремы и соответствующем выборе параметра k отображение v является сжимающим. Матрица Якоби отображения v имеет вид $v'(c) = E - k\Psi'(c)$, где E — единичная матрица типа $\rho \times \rho$, $\Psi'(c)$ — матрица Якоби отображения Ψ. Из равенства $\Psi(c) = \eta(t_*, c)$ следует, что $\Psi'(c) = \nu(t_*)$, поэтому

$$v'(c) = E - k\nu(t_*). \tag{25}$$

Обозначим $D(t) = \int\limits_0^t d(\tau)d\tau$. Выбор функций $d(t)$ в виде (12) гарантирует, что $D(t_*) = 1$. Рассмотрим матричную функцию

$$W(t) = D(t)E - k\nu(t).$$

Из равенств $D(0) = 0$, $\nu(0) = 0$ следует, что $W(0) = 0$, а из равенства $D(t_*) = 1$ следует, что $W(t_*) = E - k\nu(t_*)$. Показав, что $\|W(t_*)\| \leqslant \gamma < 1$, мы тем самым покажем, что $\|v'(c)\| \leqslant \gamma < 1$ и, следовательно, докажем, что отображение v является сжимающим. Вычислим $\dot{W}$, используя (23):

$$\begin{aligned}\dot{W} = \dot{D}(t)E - k\dot{\nu} = d(t)E - k\Big(\frac{\partial q}{\partial \eta}\nu + S\Big) = \\ = d(t)E - \frac{\partial q}{\partial \eta}(D(t)E - W) - kS = \frac{\partial q}{\partial \eta}W + d(t)E - D(t)\frac{\partial q}{\partial \eta} - kS.\end{aligned}$$

Обозначим

$$A = d(t)E - D(t)\frac{\partial q}{\partial \eta} - kS.$$

и рассмотрим решение $W(t)$ системы

$$\dot{W} = \frac{\partial q}{\partial \eta}W + A, \quad W(0) = 0. \tag{26}$$

Из (26) следует, что i-й столбец $W_i(t)$ решения $W(t)$ удовлетворяет системе

$$\dot{W}_i = \frac{\partial q}{\partial \eta}W_i + A_i, \quad W_i(0) = 0. \tag{27}$$

Согласно лемме 1 выполняется неравенство

$$\|W_i(t_*)\| \leqslant e^{-\lambda_{\min} t_*}\int\limits_0^{t_*}\|A_i\|e^{\lambda_{\min} t}dt. \tag{28}$$

Оценим $\|A_i\|$. Из неравенства $\|A_i\| \leqslant \|A\|$ следует, что достаточно оценить норму матрицы $\|A\|$. Воспользовавшись представлением матрицы S в виде (24), неравенством треугольника, неравенством (21) и условием III, получим

$$\|A\| = \left\| d(t)E - D(t)\frac{\partial q}{\partial \eta} - k\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial q}{\partial z_i}d^{(i-1)}(t)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant D(t)\left\|\frac{\partial q}{\partial \eta}\right\| + \left\| d(t)E - k\frac{\partial q}{\partial z_1}d(t)\right\| + k\sum_{i=2}^{r}\left\|\frac{\partial q}{\partial z_i}\right\| \cdot |d^{(i-1)}(t)| \leqslant$$

$$\leqslant D(t)\lambda_{\max} + \left\| E - k\frac{\partial q}{\partial z_1}\right\| d(t) + k\sum_{i=2}^{r} M|d^{(i-1)}(t)| \leqslant$$

$$\leqslant D(t)\lambda_{\max} + \left\| E - k\frac{\partial q}{\partial z_1}\right\| d(t) + kML.$$

В фиксированной точке $(z^1,\ \ldots,\ z^m,\ \eta)$ оценим $\left\| E - k\frac{\partial q}{\partial z_1}\right\|$ как функцию параметра k. Если $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ — собственные числа матрицы $\frac{\partial q}{\partial z_1}$ в этой точке, то собственные числа матрицы $E - k\frac{\partial q}{\partial z_1}$ в этой точке имеют вид $1 - k\Lambda_1, \ldots, 1 - k\Lambda_m$. Норма симметричной матрицы равна наибольшему по модулю собственному числу этой матрицы, поэтому

$$\left\| E - k\frac{\partial q}{\partial z_1}\right\| = \max\{|1 - k\Lambda_1|,\ |1 - k\Lambda_m|\}.$$

Из условия $\Lambda_j \in [\Lambda_{\min},\ \Lambda_{\max}]$, $j = \overline{1,\ m}$, следует, что

$$\max\{|1 - k\Lambda_1|,\ |1 - k\Lambda_m|\} \leqslant p(k) = \max\{|1 - k\Lambda_{\min}|,\ |1 - k\Lambda_{\max}|\}.$$

Функция $p(k)$ достигает своего наименьшего значения, равного β, при $k = k_{\min}$. Выбрав $k = k_{\min}$, мы обеспечим выполнение неравенства

$$\left\| E - k\frac{\partial q}{\partial z_1}\right\| \leqslant \beta.$$

Отсюда следует, что

$$\|A\| \leqslant D(t)\lambda_{\max} + \beta d(t) + k_{\min}ML,$$

поэтому из неравенства (28) следует, что

$$\|W_i(t_*)\| \leqslant e^{-\lambda_{\min}t_*}\int_0^{t_*}\left(D(t)\lambda_{\max} + \beta d(t) + k_{\min}ML\right)e^{\lambda_{\min}t}dt.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $D(0) = 0$, $D(t_*) = 1$, $\dot{D}(t) = d(t)$, получим

$$\lambda_{\max}\int_0^{t_*} D(t)e^{\lambda_{\min}t}dt = \alpha e^{\lambda_{\min}t_*} - \alpha\int_0^{t_*} d(t)e^{\lambda_{\min}t}dt,$$

поэтому

$$\|W_i(t_*)\| \leqslant \alpha - e^{-\lambda_{\min} t_*}(\alpha-\beta)\int\limits_0^{t_*} d(t)e^{\lambda_{\min} t}dt + k_{\min} ML\,\frac{1-e^{-\lambda_{\min} t_*}}{\lambda_{\min}}. \tag{29}$$

Так как

$$\int\limits_0^{t_*} d(t)e^{\lambda_{\min} t}dt \geqslant \int\limits_0^{t_*} d(t)dt = 1,$$

то из (29) получаем

$$\|W_i(t_*)\| \leqslant \alpha - e^{-\lambda_{\min} t_*}(\alpha-\beta) + k_{\min} ML\,\frac{1-e^{-\lambda_{\min} t_*}}{\lambda_{\min}} = \theta.$$

Из неравенства [11]

$$\|W(t_*)\| \leqslant \sum_{i=1}^{\rho} \|W_i(t_*)\|$$

следует, что

$$\|W(t_*)\| \leqslant \rho\theta < 1.$$

Полученное неравенство означает, что $\|v'(c)\| \leqslant \rho\theta < 1$, поэтому отображение $v\colon \mathbb{R}^\rho \to \mathbb{R}^\rho$ является сжимающим и, следовательно, имеет неподвижную точку c_*. Таким образом, при $c_1 = c_{1*}, \ldots, c_\rho = c_{\rho*}, c_{\rho+1} = 0, \ldots, c_m = 0$ решение $\eta(t)$ задачи Коши (6) удовлетворяет условию $\eta(t_*) = \eta_*$. Функции

$$\begin{aligned}
&B_1(t) = b_1(t) + c_{1*}d_1(t),\\
&\ldots,\\
&B_\rho(t) = b_\rho(t) + c_{\rho*}d_\rho(t),\\
&B_{\rho+1} = b_{\rho+1}(t),\\
&\ldots,\\
&B_m(t) = b_m(t)
\end{aligned}$$

удовлетворяют всем условиям теоремы 2, поэтому терминальная задача (3), (4) для системы (2) имеет решение. Теорема доказана.

Замечание 1. Условия теоремы 3 не зависят от начального и конечного состояний системы (2), поэтому если условия теоремы 3 выполнены, то система (2) управляема в $\mathbb{R}^n$ за время t_*.

Доказанная теорема позволяет не только судить о существовании решения терминальной задачи, но и, если условия теоремы выполнены, построить это решение. Выберем произвольное $c^{(0)} \in \mathbb{R}^\rho$ и построим последовательность приближений $\{c^{(j)}\}$ по правилу

$$c^{(j+1)} = c^{(j)} - k_{\min}(\Psi(c^{(j)}) - \eta_*), \quad j = 0, 1, \ldots \tag{30}$$

Чтобы определить $\Psi(c^{(j)})$, надо найти решение $\eta(t, c^{(j)})$ задачи Коши

$$\begin{aligned}
&\dot\eta = q\big(\overline{b}_1(t) + c_1^{(j)}\,\overline{d}_1(t), \ldots, \overline{b}_\rho(t) + c_\rho^{(j)}\,\overline{d}_\rho(t), \overline{b}_{\rho+1}(t), \ldots, \overline{b}_m(t), \eta\big),\\
&\eta(0) = \eta_0
\end{aligned} \tag{31}$$

на отрезке $[0,\ t_*]$. Тогда $\Psi(c^{(j)}) = \eta(t_*, c^{(j)})$.

Так как отображение v сжимающее, последовательность $\{c^{(j)}\}$ сходится к неподвижной точке c_* отображения v. При этом справедлива следующая оценка

$$\|c^{(j)} - c_*\| \leqslant \frac{(\rho\theta)^j}{1-\rho\theta}\|c^{(1)} - c^{(0)}\|.$$

Используя (30), неравенство треугольника и последнюю оценку, получим

$$\|\Psi(c^{(j)}) - \eta_*\| = \frac{1}{k_{\min}}\|c^{(j+1)} - c^{(j)}\| =$$
$$= \frac{1}{k_{\min}}\|c^{(j+1)} - c_* + c_* - c^{(j)}\| \leqslant \frac{1}{k_{\min}}\|c^{(j+1)} - c_*\| + \frac{1}{k_{\min}}\|c_* - c^{(j)}\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{k_{\min}(1-\rho\theta)}\left((\rho\theta)^{j+1} + (\rho\theta)^j\right)\|c^{(1)} - c^{(0)}\| = \frac{1+\rho\theta}{k_{\min}(1-\rho\theta)}(\rho\theta)^j\|c^{(1)} - c^{(0)}\|.$$

Выбрав номер J из условия

$$\frac{1+\rho\theta}{k_{\min}(1-\rho\theta)}(\rho\theta)^J\|c^{(1)} - c^{(0)}\| \leqslant \sigma,$$

где $\sigma > 0$ — заданная точность, мы добьемся выполнения неравенства

$$\|\Psi(c^{(J)}) - \eta_*\| \leqslant \sigma.$$

Вектор-функции

$$z^1 = \bar{b}_1(t) + c_1^{(J)}\bar{d}_1(t), \quad \ldots, \quad z^\rho = \bar{b}_\rho(t) + c_\rho^{(J)}\bar{d}_\rho(t),$$
$$z^{\rho+1} = \bar{b}_{\rho+1}(t), \quad \ldots, \quad z^m = \bar{b}_m(t), \quad \eta = \eta(t, c^{(J)}), \quad t \in [0,\ t_*],$$

задают t-параметрическую кривую в пространстве состояний системы (2), соединяющую состояния (3) и (4). Управление, реализующее эту траекторию в качестве траектории системы (2), можно найти по формуле (8), если положить в ней

$$\overline{B}_1(t) = \bar{b}_1(t) + c_1^{(J)}\bar{d}_1(t), \quad \ldots, \quad \overline{B}_\rho(t) = \bar{b}_\rho(t) + c_\rho^{(J)}\bar{d}_\rho(t),$$
$$\overline{B}_{\rho+1} = \bar{b}_{\rho+1}(t), \quad \ldots, \quad \overline{B}_m(t) = \bar{b}_m(t), \quad \eta(t) = \eta(t, c^{(J)}).$$

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}
&\dot z_1^1 = z_2^1, \quad \dot z_2^1 = u_1;\\
&\dot z_1^2 = z_2^2, \quad \dot z_2^2 = u_2;\\
&\dot\eta_1 = -0{,}08\eta_1 + 0{,}02\sin(\eta_1+\eta_2) + 5z_1^1 + 0{,}25\sin z_2^1 + 0{,}25\cos z_2^2;\\
&\dot\eta_2 = 0{,}02\sin(\eta_1+\eta_2) - 0{,}08\eta_2 + 5z_1^2 - 0{,}25\cos z_2^1 + 0{,}25\sin z_2^2
\end{aligned}$$

со следующими граничными условиями:

$$z_1^1(0) = 0, \quad z_2^1(0) = 0, \quad z_1^2(0) = 0, \quad z_2^2(0) = 0, \quad \eta_1(0) = 0, \quad \eta_2(0) = -1,$$
$$z_1^1(1) = 1, \quad z_2^1(1) = 4, \quad z_1^2(1) = -1, \quad z_2^2(1) = -1, \quad \eta_1(1) = -1, \quad \eta_2(1) = 2.$$

Для этой задачи $t_* = 1$, $m = 2$, $\rho = 2$, $r_1 = r_2 = 2$, $z_1 = (z_1^1,\ z_1^2)^{\mathrm{T}}$, $z_2 = (z_2^1,\ z_2^2)^{\mathrm{T}}$,

$$\frac{\partial q}{\partial \eta} = \begin{pmatrix} -0{,}08 & 0{,}02\cos(\eta_1+\eta_2) \\ 0{,}02\cos(\eta_1+\eta_2) & -0{,}08 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial q}{\partial z_1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы $\dfrac{\partial q}{\partial \eta}$ имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -0{,}08 \pm 0{,}02\cos(\eta_1+\eta_2).$$

Отсюда следует, что условие I выполнено с $\lambda_{\min} = 0{,}06$, $\lambda_{\max} = 0{,}1$.

Собственными числами матрицы $\dfrac{\partial q}{\partial z_1}$ являются $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 5$, поэтому условие II выполнено с $\Lambda_{\min} = \Lambda_{\max} = 5$.

Так как

$$\frac{\partial q}{\partial z_2} = \begin{pmatrix} 0{,}25\cos z_2^1 & -0{,}25\sin z_2^2 \\ 0{,}25\sin z_2^1 & 0{,}25\cos z_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \left(\frac{\partial q}{\partial z_2}\right)^{\mathrm{T}} \frac{\partial q}{\partial z_2} = 0{,}25^2 \begin{pmatrix} 1 & \sin(z_2^1 - z_2^2) \\ \sin(z_2^1 - z_2^2) & 1 \end{pmatrix}$$

и собственные числа матрицы Σ имеют вид

$$\lambda_{3,4} = 0{,}25^2 \pm 0{,}25^2 \sin(z_2^1 - z_2^2),$$

то $\max\{|\lambda_3|,\ |\lambda_4|\} \leqslant 2 \cdot 0{,}25^2$, поэтому при всех $(z^1,\ z^2,\ \eta) \in \mathbb{R}^6$ справедливо неравенство

$$\left\| \frac{\partial q}{\partial z_2} \right\| \leqslant \sqrt{2} \cdot 0{,}25.$$

Таким образом, условие III выполнено с $M = \sqrt{2} \cdot 0{,}25$.

Проверим выполнение условия теоремы 3. Функция $d(t)$, построенная по формуле (12), имеет вид $d(t) = 30t^2(1-t)^2$, поэтому

$$d'(t) = 60t(t-1)(2t-1), \quad L = \max_{[0,1]} |d'(t)| = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Так как

$$\alpha = 5/3, \quad \beta = 0, \quad k_{\min} = 0{,}2,$$

то $\theta \approx 0{,}4934$ и $\theta\rho \approx 0{,}987 < 1$, поэтому условие теоремы 3 выполнено.

Выберем в качестве функции $b_1(t)$, удовлетворяющей условиям

$$b_1(0) = 0, \quad b_1'(0) = 1, \quad b_1(1) = 0, \quad b_1'(1) = 4,$$

функцию

$$b_1(t) = 2t^3 - t^2,$$

а в качестве функции $b_2(t)$, удовлетворяющей условиям

$$b_2(0) = 0, \quad b_2'(0) = -1, \quad b_2(1) = 0, \quad b_2'(1) = -1,$$

функцию

$$b_1(t) = t^3 - 2t^2.$$

Начальное приближение для вектора параметров c было выбрано следующим: $c^{(0)} = (0,\ 0)^{\mathrm{T}}$. Задача Коши (31) на каждой итерации решалась методом Рунге — Кутты 4-го порядка. Расчеты показали, что неподвижной точкой отображения v является точка $c_* = (-0{,}361,\ 1{,}034)^{\mathrm{T}}$. Графики функций $z_1^1(t)$, $z_1^2(t)$, $z_2^1(t)$, $z_2^2(t)$, $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$, найденных в результате работы алгоритма, приведены на 1–4.

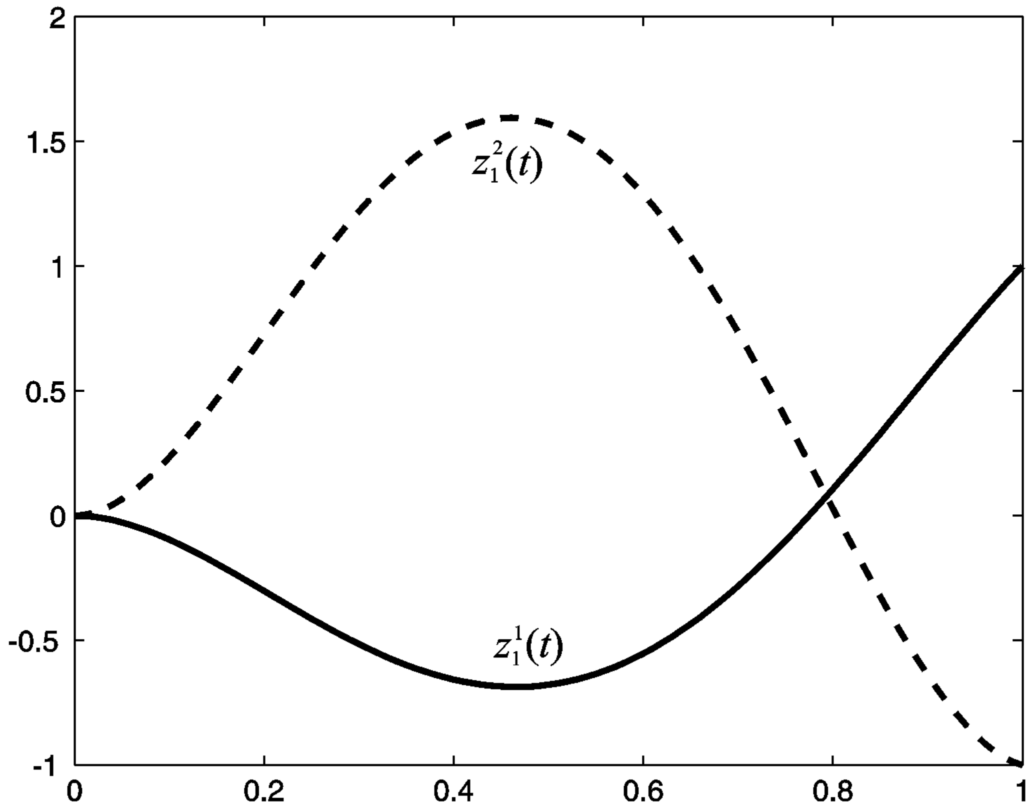

Рис. 1. Графики функций $z_1^1(t)$, $z_1^2(t)$

В соответствии с замечанием 1 рассматриваемая система управляема в $\mathbb{R}^6$ за время $t_* = 1$.

Заключение

На основе геометрического подхода предложен метод решения терминальной задачи для многомерной аффинной системы. Задача решается в предположении, что рассматриваемая система может быть преобразована к регулярному квазиканоническому виду. Сформулировано необходимое и достаточное условие существования решения терминальной задачи для преобразованной системы. Доказано достаточное условие разрешимости терминальной

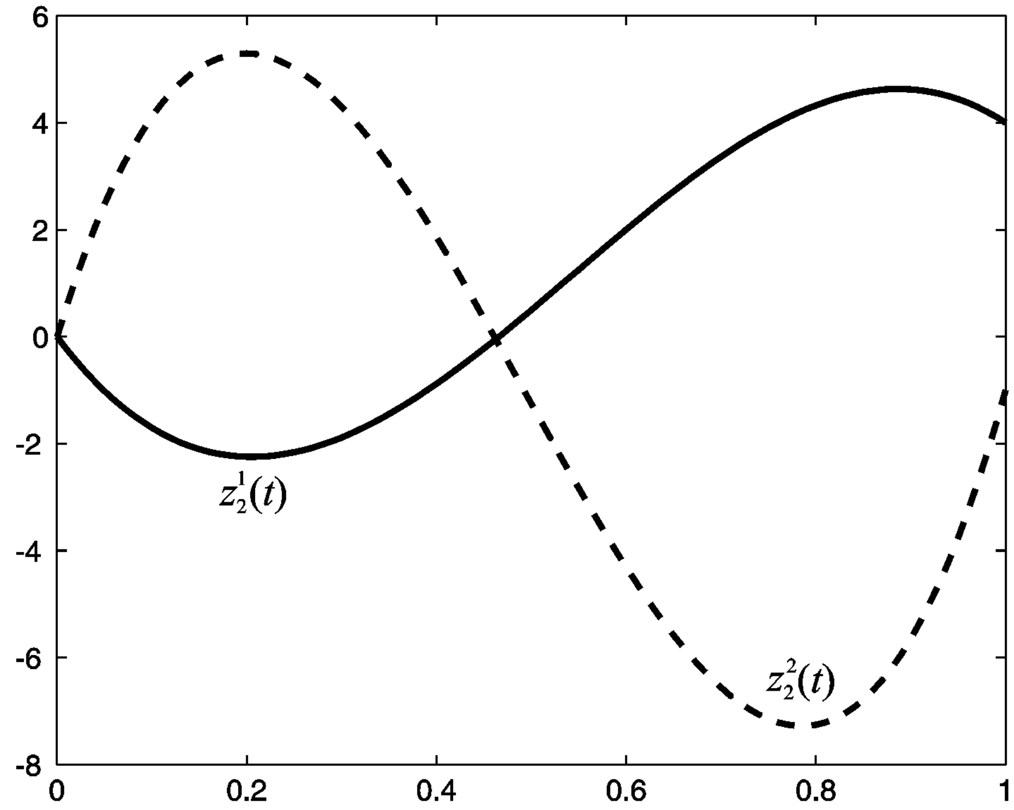

Рис. 2. Графики функций $z_2^1(t)$, $z_2^2(t)$

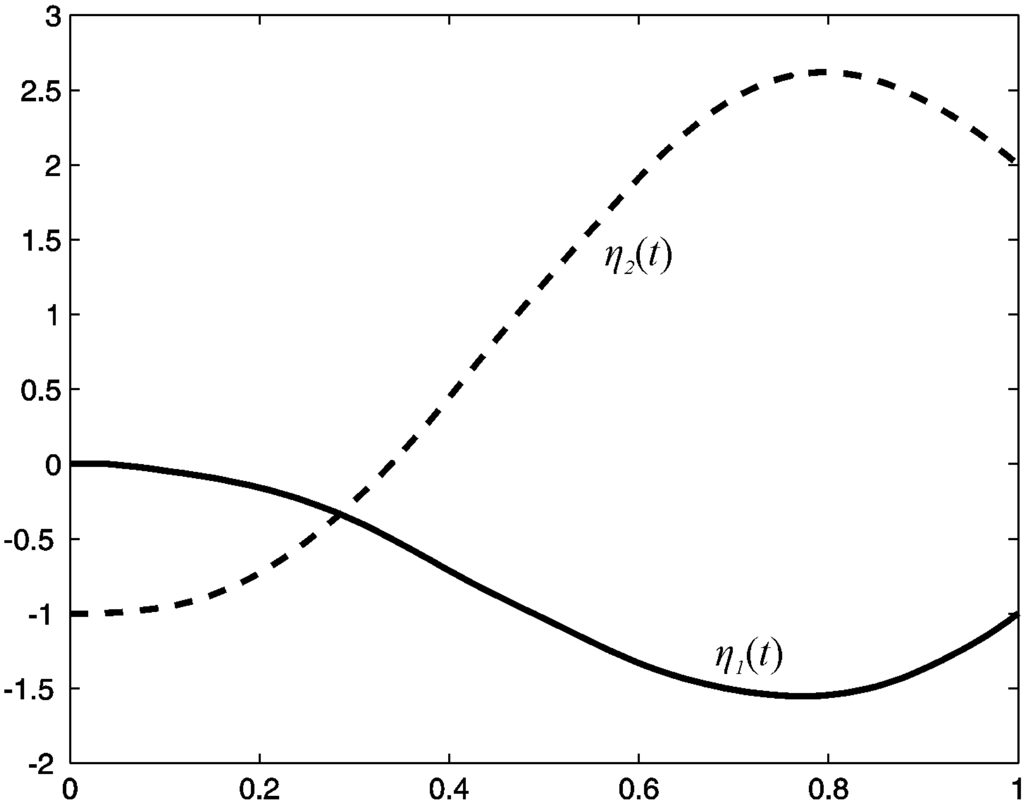

Рис. 3. Графики функций $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$

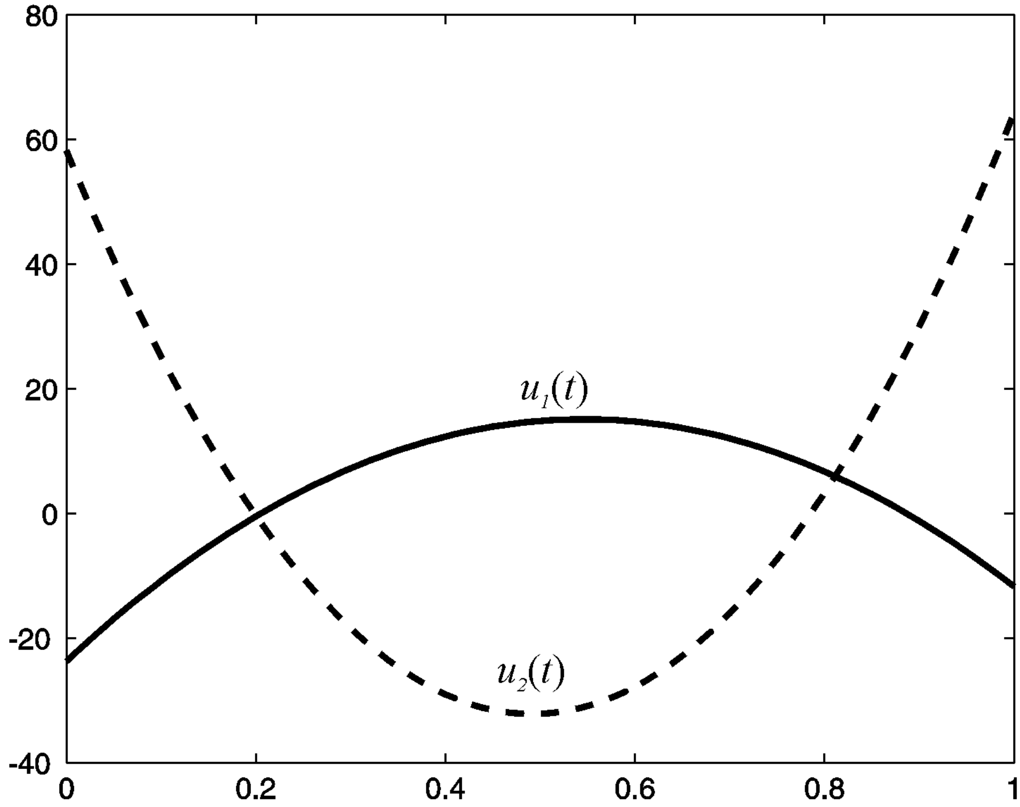

Рис. 4. Графики функций $u_1(t)$, $u_2(t)$

задачи для таких систем квазиканонического вида, у которых размерность нелинейной подсистемы не превышает размерность управления. Предъявлен алгоритм построения решения терминальной задачи для данного класса систем. Приведен числовой пример, иллюстрирующий работу алгоритма.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы ведущих научных школ (проект НШ-3659.2012.1) и РФФИ (грант 12-01-31303).

Список литературы

1. Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.
2. Елкин В.И. Редукция нелинейных управляемых систем: дифференциально-геометрический подход. М.: Наука, 1997. 320 с.
3. Жевнин А.А., Крищенко А.П. Управляемость нелинейных систем и синтез алгоритмов управления // Доклады АН СССР. 1981. Т. 258, № 4. С. 805–809.
4. Крищенко А.П., Клинковский М.Г. Преобразование аффинных систем с управлением и задача стабилизации // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 11. С. 1945–1952.
5. Фетисов Д.А. Исследование управляемости регулярных систем квазиканонического вида // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2006. № 3. С. 12–30.

6. Емельянов С.В., Крищенко А.П., Фетисов Д.А. Исследование управляемости аффинных систем // Доклады АН. 2013. Т. 449. № 1. С. 15–18.

7. Крищенко А.П., Фетисов Д.А. Преобразование аффинных систем и решение задач терминального управления // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2013. № 2. С. 3–16.

8. Крищенко А.П., Фетисов Д.А. Терминальная задача для многомерных аффинных систем // Доклады АН. 2013. Т. 452. № 2. С. 144–149.

9. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004. 240 с.

10. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения: пер. с англ. М.: Мир, 1970. 720 с.

11. Зорич В.А. Математический анализ. Часть 2. М.: Изд-во МЦНМО, 1998. 794 с.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

A method for solving terminal control problems for affine systems

11, November 2013

DOI: 10.7463/1113.0622543

Fetisov D. A.

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russian Federation
dfetisov@yandex.ru

A new method was proposed to solve terminal control problems for multidimensional affine systems. The system under consideration is supposed to be equivalent to a regular system of a quasi-canonical form. A necessary and sufficient condition for existence of a solution of terminal control problems for transformed systems was formulated. A sufficient condition for solvability of terminal control problems was proved for quasi-canonical systems with nonlinear subsystem dimension not exceeding control dimension. An algorithm was designed to construct a solution of terminal control problems for this class of systems. A numerical example was presented to illustrate the proposed algorithm.

References

1. Krasnoshchechenko V.I., Krishchenko A.P. *Nelineinye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza* [Nonlinear systems: geometric methods of analysis and synthesis]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2005. 520 p.
2. Elkin V.I. *Reduktsiya nelineynykh upravlyaemykh sistem: differentsial'no-geometricheskiy podkhod* [Reduction of nonlinear control systems: differential-geometrical approach]. Moscow, Nauka, 1997. 320 p.
3. Zhevnin A.A., Krishchenko A.P. Upravliaemost' nelineinykh sistem i sintez algoritmov upravleniia [Controllability of nonlinear systems and synthesis of control algorithms]. *Doklady AN SSSR* [Reports of Academy of Sciences of the USSR], 1981, vol. 258, no. 4, pp. 805–809.
4. Krishchenko A.P., Klinkovskii M.G. Preobrazovanie affinnykh sistem s upravleniem i zadacha stabilizatsii [The transformation of affine systems with control and stabilization problem]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations], 1992, vol. 28, no. 1, pp. 1945–1952.

5. Fetisov D.A. Issledovanie upravliaemosti reguliarnykh sistem kvazikanonicheskogo vida [Study of controllability of regular systems of quasicanonical type]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2006, no. 3, pp. 12–30.

6. Emel'yanov S.V., Krishchenko A.P., Fetisov D.A. Issledovanie upravlyaemosti affinnykh sistem [Controllability research on affine systems]. *Doklady Akademii Nauk*, 2013, vol. 449, no. 1, pp. 15–18. (English Translation: *Doklady Mathematics*, 2013, vol. 87, iss. 2, pp. 245–248. DOI: 10.1134/S1064562413020026).

7. Krishchenko A.P., Fetisov D.A. Preobrazovanie affinnykh sistem i reshenie zadach terminal'nogo upravleniya [Transformation of Affine Systems and Solving of Terminal Control Problems]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2013, no. 2, pp. 3–16.

8. Krishchenko A.P., Fetisov D.A. Terminal'naya zadacha dlya mnogomernykh affinnykh sistem [Terminal problem for multidimensional affine systems]. *Doklady Akademii Nauk*, 2013, vol. 452, no. 2, pp. 144–149. (English Translation: *Doklady Mathematics*, 2013, vol. 88, iss. 2, pp. 608–612. DOI: 10.1134/S1064562413050098).

9. Filippov A.F. *Vvedenie v teoriiu differentsial'nykh uravnenii* [Introduction to the theory of differential equations]. Moscow, Editorial URSS, 2004. 240 p.

10. Hartman P. *Ordinary differential equations*. John Wiley & Sons, 1964. (Russ. ed.: Hartman P. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniia*. Moscow, Nauka, 1970. 720 p.).

11. Zorich V.A. *Matematicheskiy analiz. Chast' 2* [Mathematical analysis. Part 2]. Moscow, MTsNMO Publ., 1998. 794 p.