

Математическое моделирование диэлектрических свойств полимер-керамических композиционных материалов методом асимптотического осреднения

10, октябрь 2013

DOI: 10.7463/1013.0623343

Димитриенко Ю. И., Соколов А. П., Маркевич М. Н.

УДК 539.8

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

dimit@serv.bmstu.rualsokolo@bmstu.rumamarkevi@gmail.com

Введение

В связи с необходимостью создания изоляционных многокомпонентных гетерогенных систем, обладающих диэлектрическим усилением, возникает вопрос о моделировании эффективных свойств композиционных материалов [9, 10, 12]. Описание воздействия электромагнитного поля на сильно неоднородные среды осуществляется с помощью уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами, характеризующими свойства отдельных компонент композиционного материала. Основная идея метода асимптотического осреднения дифференциальных уравнений (МАО), предложенного в работах Н. С. Бахвалова, Е. Санчез-Паленсии, А. Бенсуссана [1, 11, 13], состоит в замене гетерогенного материала однородной средой, обладающей усредненными физико-механическими параметрами. Быстроосциллирующие коэффициенты уравнений представляются в виде периодических функций. Проводится асимптотическое исследование решений поставленной задачи. Однако, применимость МАО ограничивается поиском эффективных характеристик композитов, обладающих достаточно простой геометрической структурой. Для расчета эффективных свойств сложноструктурированных композиционных материалов, обладающих свойством центральной симметрии (рис.1), разработана модернизация МАО приводящая задачу с периодическими граничными условиями к серии задач, так называемых L_p , классического типа [4-8]. Решается цикл обратных задач L_p с адаптированными компонентами в

направлениях пространства для установления эффективных характеристик композита и тангенса угла диэлектрических потерь.

Решение серии L_p задач и поиск эффективных характеристик композита

Для композиционного материала, характерный размер которого L , и существует характерный размер ячейки периодичности (ЯП) l введем малый параметр $\kappa = \frac{l}{L} \ll 1$, и

два типа безразмерных координат: $\bar{x}_i = \frac{x_i}{L}$ – глобальные, $\xi_i = \frac{\bar{x}_i}{\kappa} = \frac{x_i}{l}$ – локальные, где x_i – декартовы координаты.

Исходя из периодичности структуры композита, периодический характер присваивается диэлектрической проницаемости, комплексная амплитуда которой будет рассматриваться как функция координат $x_i: \varepsilon^*(x_i) = \varepsilon^*(x_i + a_i)$, где a_i – длина сторон ЯП.

Относительно потенциала φ^* строится асимптотического разложения по параметру κ :

$$\begin{aligned} \varphi^*(\bar{x}_i, \xi_j) &= \varphi^{*(0)}(\bar{x}_i) + \kappa \varphi^{*(1)}(\bar{x}_i, \xi_j) + \kappa^2 \varphi^{*(2)}(\bar{x}_i, \xi_j) + \dots + \kappa^n \varphi^{*(n)}(\bar{x}_i, \xi_j) = \\ &= \varphi^{*(0)}(\bar{x}_i) + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n \varphi^{*(n)}(\bar{x}_i, \xi_j). \end{aligned} \quad (1)$$

Для объема ЯП $V_{\xi} = \{\xi_j : -\frac{a_j}{2} < \xi_j < \frac{a_j}{2}, j = \overline{1,3}\}$ введены фазы $V_{\xi\alpha}, \alpha = \overline{1, N}$, принадлежащие разному типу компонент. С использованием разложения (1), свойств периодичной функции, правил дифференцирования сложной функции рассмотрим систему уравнений, описывающую воздействие переменного электрического поля на композит

$$\left\{ \begin{array}{ll} D_{i/i}^{*\alpha(0)} = 0, & x_i \in V_{\xi\alpha} \\ D_i^{*\alpha(0)} = \varepsilon^{*\alpha} E_i^{*\alpha(0)}, & x_i \in V_{\xi\alpha} \\ E_i^{*\alpha(0)} = \bar{E}_i^* + \varphi_{/i}^{*\alpha(1)}, & x_i \in V_{\xi\alpha} \\ \varphi^{*\alpha(1)} = \varphi^{*N(1)}, (D_i^{*\alpha(0)} - D_i^{*N(0)})n_i = 0, & x_i \in \sum_{\xi\alpha N} \\ \langle \varphi^{*\alpha(1)} \rangle = 0, [[D_i^{*(0)}]]n_i = 0, [[\varphi^{*\alpha(1)}]] = 0, & x_i \in \sum_{\xi\alpha N} \end{array} \right. \quad (2),$$

где $\langle \varphi^{*(1)} \rangle$ – операция осреднения по «ячейке периодичности», $[[\varphi^{*(1)}]]$ – условия периодичности, \bar{E}_i^* – средняя напряженность композита.

Задача (2) содержит нестандартные условия нормировки в виде интегральных уравнений Вольтера первого рода и условия периодичности на границе ЯП, что создает трудности при численном ее решении. Для упрощения поиска решения вводим функции псевдопотенциала

$$\varphi^{*\alpha(1)} = \sum_{p=1}^3 \varphi_{(p)}^{*\alpha}, \quad (3)$$

где $\varphi_{(p)}^{*\alpha} = -\bar{E}_i^* \xi^p + \mathcal{G}_{(p)}^{*\alpha}(\xi_k)$; $\mathcal{G}_{(p)}^{*\alpha}(\xi_k)$ – новые неизвестные функции от ξ_k , уже не являющиеся периодическими.

Далее вводится предположение о центральной симметрии ЯП относительно центра локальных координат, что позволяет вместо решения на всей ЯП V_ξ решение на 1/8 ЯП $\tilde{V}_\xi : \tilde{V}_\xi = V_\xi \cap (\xi_i \geq 0)$.

Используя выражения (4) получаем задачу электродинамики композита на 1/8 ЯП

$$\begin{cases} D_{i(p)/i}^{*\alpha} = 0 \\ D_{i(p)}^{*\alpha} = \varepsilon^{*\alpha} E_{i(p)}^{*\alpha}, x_i \in (\tilde{V}_\xi \cup \sum_s' \cup \sum_s) \\ E_{i(p)}^{*\alpha} = \mathcal{G}_{(p)/i}^{*\alpha}, x_i \in \tilde{V}_\xi \\ \mathcal{G}_{(p)}^{*\alpha} = \mathcal{G}_{(p)}^{*N}, (D_{i(p)}^{*\alpha} - D_{i(p)}^{*N})n_i = 0, x_i \in \bar{\sum}_{\xi\alpha N} \end{cases}, \quad (4)$$

где $\bar{\sum}_{\xi\alpha N} = \sum_{\xi\alpha N} \cap \tilde{V}_\xi$ – поверхности контакта компонентов внутри подобласти,

координатные плоскости $-\sum_s = \{\xi_s = 0\}$, торцевые поверхности «ячейки

периодичности» – $\sum_s' = \{\xi_s = 1/2\}, s = 1, 2, 3$.

К задаче (4) присоединяются граничные условия на 1/8 ЯП

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{(p)}^{*\alpha} |_{\sum_p'} = \frac{a_p}{2} \bar{E}_p^*, \mathcal{G}_{(p)}^{*\alpha} |_{\sum_p} = 0, \\ \mathcal{G}_{(p)/i}^{*\alpha} |_{\sum_i} = 0, \mathcal{G}_{(p)/i}^{*\alpha} |_{\sum_i'} = 0, p \neq i \end{cases}. \quad (5)$$

Задачи L_p имеют «классический» вид относительно функций $\mathcal{G}_{(p)}^{*\alpha}(\xi_j)$, т.е. являются «контактными» задачами электростатики с граничными условиями на поверхности области \tilde{V}_ξ .

Компоненты тензора эффективной комплексной диэлектрической проницаемости среды определяется как

$$\bar{\mathcal{E}}_{ip}^* = \frac{\bar{D}_{i(p)}^*}{\bar{E}_p^*},$$

где $\bar{D}_{i(p)}^* = \langle D_{i(p)}^{*\alpha} \rangle = \sum_{\alpha=1}^N \int_{V(\alpha)} D_{i(p)}^{*\alpha} dV$ - осредненная по объему ЯП индукция электрического поля.

Метод конечных элементов для серии L_p задач

На объеме 1/8 ЯП, аналогично работе [5], рассмотрим вариационную формулировку задачи электродинамики

$$\iiint_{\tilde{V}_\xi} \delta(\mathcal{G}_{(p)/i}^*) \mathcal{E}^* \varphi_{(p)/i}^* dV_\xi = \iint_{\sum_1} \delta \mathcal{G}_{(p)}^* D_{i(p)}^{*e} dS, \quad (6)$$

где $\bar{D}_{i(p)}^{*e}$ - комплексная амплитуда вектора индукции внешнего поля, заданного на поверхности «ячейки периодичности» композита \sum_1 , на поверхности \sum_2 - нулевые граничные условия; $\delta \mathcal{G}_{(p)}^*$ и $\delta(\mathcal{G}_{(p)/i}^*)$ - виртуальное изменение псевдопотенциала и производная виртуального изменения.

Для решения вариационного уравнения (6) используется метод конечных элементов. Область \tilde{V}_ξ разбивается на четырехузловые элементы V_e : $\tilde{V}_\xi = \bigcup_e V_e$. Для каждого элемента V_e записывается уравнение (6) имеет вид

$$\iiint_{V_e} \delta(\mathcal{G}_{(p)/i}^*)^T \mathcal{E}^* \mathcal{G}_{(p)/i}^* dV = \iint_{\sum_e} \delta(\mathcal{G}_{(p)}^*)^T D_{(p)}^* dS \quad (7)$$

Псевдопотенциал $\mathcal{G}_{(p)}^*$ аппроксимируем как

$$\mathcal{G}_{(p)}^* = [\Phi] \{ \phi_{(p)}^* \}, \quad (8)$$

где $\{\phi_{(p)}^*\}^T = \{\phi_{(p)}^*(\xi_{i(1)}), \dots, \phi_{(p)}^*(\xi_{i(m)})\}^T = \{\phi'_{(p)}(\xi_{i(1)}), \phi''_{(p)}(\xi_{i(1)}), \dots, \phi'_{(p)}(\xi_{i(m)}), \phi''_{(p)}(\xi_{i(m)})\}$ – координатный столбец значений электрического потенциала $\mathcal{G}_{(p)}^*(\xi_{i(j)}) = \{\mathcal{G}'_{(p)}(\xi_{i(j)}), \mathcal{G}''_{(p)}(\xi_{i(j)})\}$ в узлах конечного элемента, $\xi_{i(j)}$ – координата j -го узла конечного элемента, $j=1 \dots m$, m – число узлов, $[\Phi]$ – матрица функций формы.

Производные от псевдопотенциала $\mathcal{G}_{(p)}^*$ представим в виде координатного столбца

$$\{\mathcal{G}_{(p)/1}^*, \mathcal{G}_{(p)/2}^*, \mathcal{G}_{(p)/3}^*\} = [L]\mathcal{G}_{(p)}^*, \quad (9)$$

$$\text{где } [L]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_3} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}^T \text{ – матрица операторов дифференцирования.}$$

Вариационное уравнение (7) с учетом (8) и (9) имеет вид

$$\iiint_{V_e} \delta\{\phi_{(p)}^*\}^T [B]^T \varepsilon^* [B] \{\phi_{(p)}^*\} dV = \iint_{\sum_e'} \delta\{\phi_{(p)}^*\}^T [\Phi]^T D_{(p)}^* dS$$

где $[B] = [L][\Phi]$ – матрица градиентов потенциала. Вынося вариацию $\delta\{\phi_{(p)}^*\}^T$ за знак интегралов, получаем разрешающую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$[K_e^*]\{\phi_{(p)}^*\} = \{f_e^*\}. \quad (10)$$

В СЛАУ (10) матрица $[K_e^*]$ является локальной матрицей «жесткости» для конечного элемента, представленной выражением:

$$[K_e^*] = \iiint_{V_e} [B]^T \varepsilon^* [B] dV,$$

где тензор диэлектрической проницаемости ε^* .

Локальный вектор правой части $\{f_e^*\}^T$ СЛАУ (10) имеет вид

$$\{f_e^*\} = \iint_{\sum_e} [\Phi]^T D_p^* dS.$$

Таким образом, если собрать СЛАУ (10) для всех конечных элементов, то получим глобальную СЛАУ относительно псевдопотенциала для всей рассматриваемой области \tilde{V}_ξ

$$[K^*]\{\phi_{(p)}^*\} = \{f^*\}, \quad (3.34)$$

где $[K^*]$ – глобальная матрица жесткости, $\{f^*\}$ – глобальный столбец внешних нагрузок. Решением (3.34) получаем распределение электрического поля внутри проектируемого наноструктурированного композита.

Численный расчет эффективных диэлектрических характеристик

В качестве исследуемого образца выбран композит на основе поливинилхлорида (ПВХ) – матрица и сегнетоэлектрической керамики ЦТС-19 – наполнитель. Для определения диэлектрических свойств композита при воздействии переменного электромагнитного поля проведен расчет серии L_p задач с применением метода конечных элементов и метода бисопряженных градиентов, на базе программного комплекса, разработанного в НОЦ «СИМПЛЕКС» МГТУ имени Н.Э. Баумана.

Для двух типов геометрий композиционных материалов – с ячейкой периодичности (ЯП) гексагонального типа с различными радиусами армирующих включений (рис. 1), рассчитана эффективная диэлектрическая проницаемость при воздействии электрического поля диапазона частот от 10^{-2} до 10^4 Гц. Установлена частотная зависимость мнимой и действительной части комплексной диэлектрической проницаемости композитов на основе пластика для мелкодисперсного наполнителя ЦТС-19 характерными размерами ~ 1 мкм и ~ 10 мкм при равной объемной доле включений (рис. 2 и рис. 3).

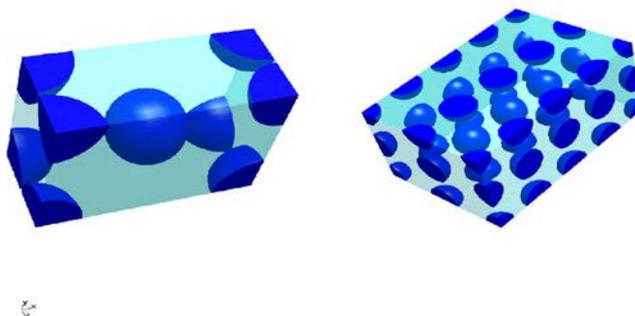


Рис. 1. Композиционный материал с мелкодисперсным наполнителем 2-х типов: с гексагональной формой ЯП и с кубической симметрией ЯП

Оценка адекватности математической модели и точности численных методов расчета эффективных диэлектрических характеристик получены посредством сравнения расчетных характеристик действительной и мнимой частей $\varepsilon' = \text{Re} \bar{\varepsilon}_{ii}^*$ и $\varepsilon'' = \text{Im} \bar{\varepsilon}_{ii}^*$ эффективной диэлектрической проницаемости, а также тангенса угла диэлектрических потерь $\text{tg} \delta = \varepsilon'' / \varepsilon'$ композита с результатами экспериментальных данных [2, 3].

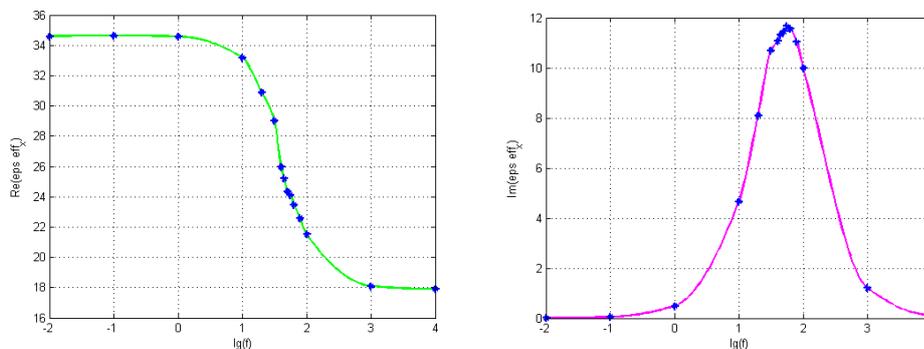


Рис. 2. Частотные зависимости ε' и ε'' для композита на основе ПВХ с керамическими включениями ЦТС-19, $d \sim 1$ мкм, $\varphi_f = 40\%$

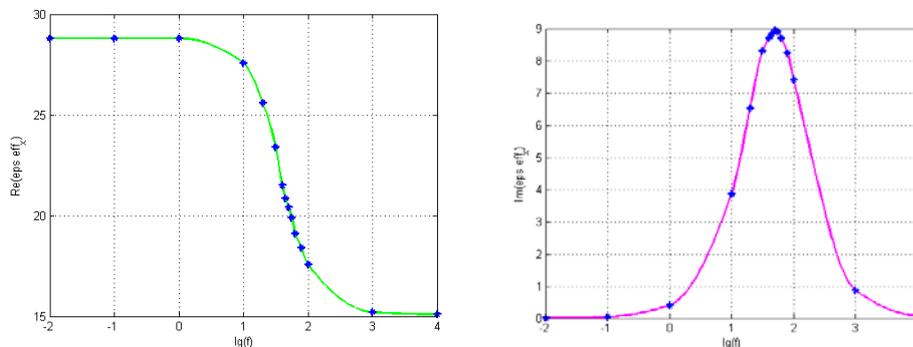


Рис. 3. Частотные зависимости ε' и ε'' композита на основе ПВХ с керамическими включениями ЦТС-19, $d \sim 10$ мкм, $\varphi_f = 40\%$

Проведен расчет тангенса угла диэлектрических потерь для каждого типа композита с коэффициентами армирования φ_f равными 10% и 40 %, что позволяет проанализировать энергоемкость композита и в дальнейшем установить оптимальную концентрацию керамических включений в композите (рис. 4-5). Характер поведения тангенса угла диэлектрических потерь, при варьировании объемной доли включений, свидетельствует о хорошей точности используемых математических методов и соответствии физическому смыслу математической модели.

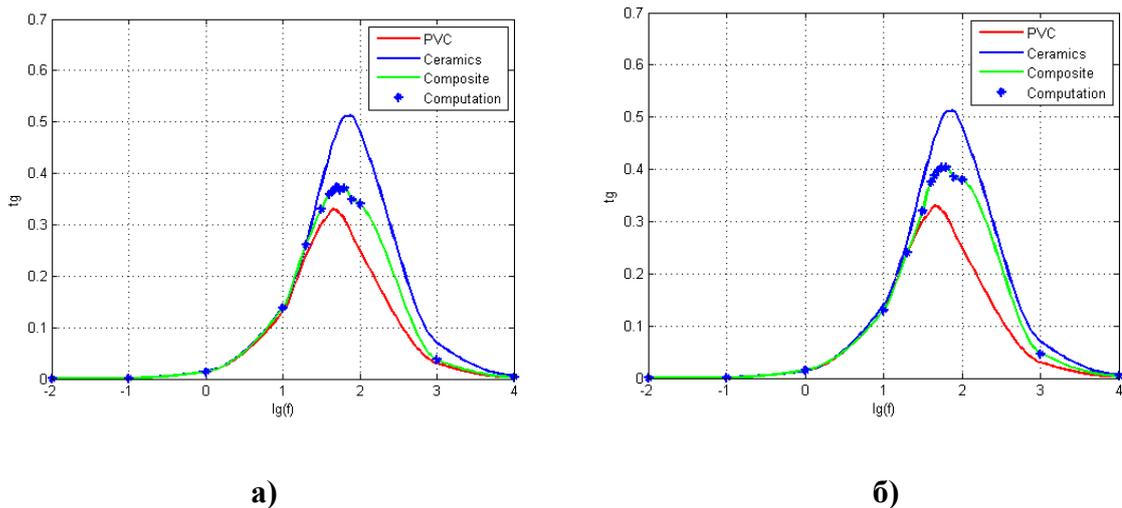


Рис. 4. Расчетные и экспериментальные зависимости тангенс угла диэлектрических потерь $\text{tg}\delta$ компонентов композита: (ПВХ –PVC), керамики ЦТС-19 и самого композита, $\phi_f = 10\%$, $d \sim 10$ мкм (а), $d \sim 1$ мкм (б)

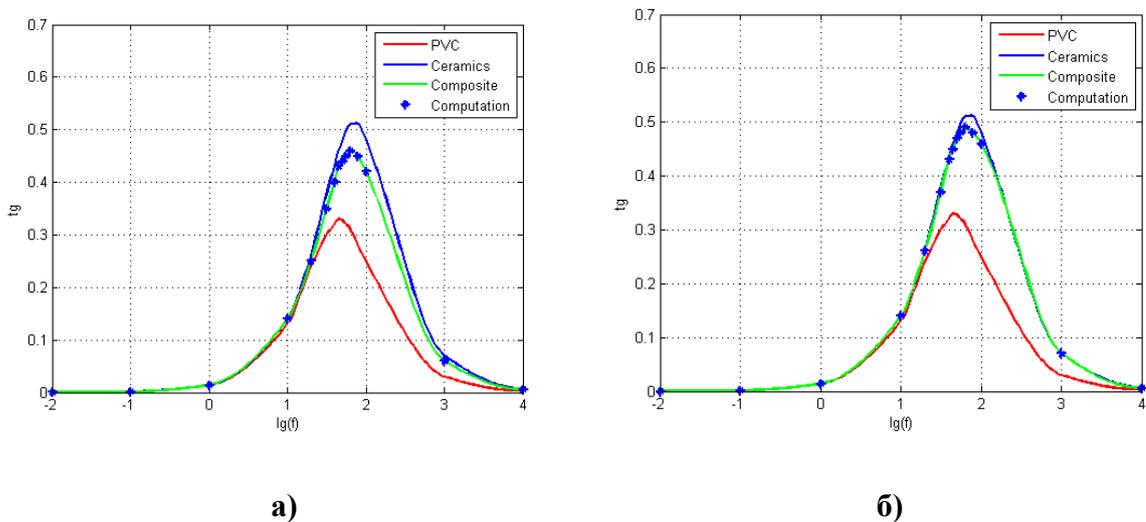


Рис. 5. Расчетные и экспериментальные зависимости тангенс угла диэлектрических потерь $\text{tg}\delta$ компонентов композита: (ПВХ –PVC), керамики ЦТС-19 и самого композита, $\phi_f = 40\%$, $d \sim 10$ мкм (а), $d \sim 1$ мкм (б) .

Заключение

В данной работе проведено асимптотическое исследование эффективных диэлектрических характеристик сложноструктурированных композитов с применением МАО. Сформулирована серия локальных задач на «ячейке периодичности» композита. Проведен

расчет эффективной диэлектрической проницаемости полимерного композита с мелкодисперсными включениями керамики ЦТС-19 с применением метода конечных элементов. Проанализирована частотная зависимость диэлектрических характеристик и тангенса угла диэлектрических потерь гетерогенных структур с различными концентрациями и размерами мелкодисперсных включений при воздействии электрического поля в диапазоне частот от 10^{-2} до 10^4 Гц. Получено хорошее совпадение численных расчетов и экспериментальных данных для диэлектрических свойств дисперсно-армированных полимер-керамических композитов[2, 3].

Поддержка

Работа проведена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации по Соглашениям о предоставлении гранта в форме субсидий № 14.В37.21.0448, 14.В37.21.1869, НИР № 1.5433.2011, № 14.132.21.1699 в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы и РФФИ № 12-08-00998.

Список литературы

1. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука, 1984. 352 с.
2. Гефле О.С., Лебедев С.М., Похолков Ю.П. Частотные спектры комплексной диэлектрической проницаемости композиционных диэлектриков на основе поливинилхлорида // Известия Томского политехнического университета. 2007. Т. 310, № 1. С. 87-91.
3. Гефле О.С., Лебедев С.М., Ткаченко С.Н. Поведение полимерных композиционных материалов с наполнителем из сегнетоэлектрической керамики в электрическом поле // Известия Томского политехнического университета. 2005. Т. 308, № 4. С. 64-68.
4. Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Расчет эффективных характеристик композитов с периодической структурой методом конечных элементов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2002. № 2. С. 95-108.
5. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 5. С. 3-20.

6. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Разработка системы автоматизированного вычисления эффективных упругих характеристик композитов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2008. № 2. С. 57-67.
7. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. [Система автоматизированного прогнозирования свойств композиционных материалов](#) // Информационные технологии. 2008. № 8. С. 31-38.
8. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Маркевич М.Н. Моделирование диэлектрических характеристик композиционных материалов на основе метода асимптотического осреднения // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 1. DOI: [10.7463/0113.0531682](#)
9. Емец Ю.П. Эффективная диэлектрическая проницаемость трехкомпонентных композиционных материалов с анизотропной структурой // Журнал технической физики. 2005. Т. 75, вып. 2. С. 67-72.
10. Шелухин В.В., Терентьев С.А. Гомогенизация уравнений Максвелла и дисперсия Максвелла-Вагнера // Доклады Академии наук. 2009. Т. 424, № 3. С. 402-406.
11. Bensoussan A., Lions JL., Papanicalaou G Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam; New York: North-Holland Pub. Co.,1978. 396 p.
12. Kettunen H., Qi J., Wallen H., Sihvola A. Frequency dependence of effective permittivity of simple dielectric composites // Proceedings of ACES 2010. Tampere, Finland. 2010. P. 248-253.
13. Sanchez-Palencia E. Book chapters // In: Homogenization techniques for composite media / Sanchez-Palencia E., Zaoui A. (eds.). Berlin, Heidelberg: Springer, 1987. P. 121-192. DOI: 10.1007/3-540-17616-0 (Ser. Lecture notes in Physics; no. 272).

Mathematical simulation of dielectric properties of polymer-ceramic composite materials, using the asymptotical averaging method

10, October 2013

DOI: 10.7463/1013.0623343

Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P., Markevich M.N.

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation

dimit@serv.bmstu.rualsokolo@bmstu.rumamarkevi@gmail.com

In this paper, the authors presented a mathematical model for calculating effective dielectric characteristics of complex structured composite materials influenced by an external alternating electric field. An asymptotic investigation of electro-dynamic differential equations with fast oscillating coefficients was carried out. A local electro-dynamic problem on the composite's "periodicity cell" was formulated. An effective complex permittivity of composite materials with various volume fractions of the fine-dispersed ferroelectric ceramic inclusions was calculated by the finite element method and the biconjugate gradient stabilized method. The authors analyzed frequency dependence of dielectric characteristics and dielectric loss tangent of composite ceramics. The obtained results are good congruous to experimental data.

Publications with keywords: [mathematical modeling](#), [composites](#), [asymptotic averaging method](#), [effective permittivity](#), [ferroelectric ceramics](#)

Publications with words: [mathematical modeling](#), [composites](#), [asymptotic averaging method](#), [effective permittivity](#), [ferroelectric ceramics](#)

References

1. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov* [Averaging processes in periodic media. Mathematical problems of mechanics of composite materials]. Moscow, Nauka, 1984. 352 p.
2. Gefle O.S., Lebedev S.M., Pokholkov Yu.P. Chastotnye spektry kompleksnoy dielektricheskoy pronitsaemosti kompozitsionnykh dielektrikov na osnove [Complex permittivity frequency spectra of composite dielectrics on the basis of polyvinylchloride]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of the Tomsk Polytechnic University], 2007, vol. 310, no. 1, pp. 87-91.

3. Gefle O.S., Lebedev S.M., Tkachenko S.N. Povedenie polimernykh kompozitsionnykh materialov s napolnitelem iz segnetoelektricheskoy keramiki v elektricheskom pole [Behaviour of polymeric composite materials filled with ferroelectric ceramics in electric field]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of the Tomsk Polytechnic University], 2005, vol. 308, no. 4, pp. 64-68.
4. Dimitrienko Iu.I. Kashkarov A.I. Raschet effektivnykh kharakteristik kompozitov s periodicheskoi strukturoi metodom konechnykh elementov [The calculation of the effective characteristics of composite materials with periodic structure by finite element method]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Estestvennye nauki* [Bulletin of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2002, no. 2, pp. 95-108.
5. Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. Mnogomasshtabnoe modelirovanie uprugikh kompozitsionnykh materialov [Multiscale modeling of elastic composite materials]. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2012, vol. 24, no. 5, pp. 3-20.
6. Dimitrienko Iu.I., Sokolov A.P. Razrabotka sistemy avtomatizirovannogo vychisleniia effektivnykh uprugikh kharakteristik kompozitov [Development of automated technology of calculation of effective elastic characteristics of composites by method of asymptotic averaging]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Bulletin of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2008, no. 2, pp. 56-67.
7. Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. Sistema avtomatizirovannogo prognozirovaniya svoystv kompozitsionnykh materialov [Automated forecasting of composite material properties by means of homogenization method]. *Informatsionnye tekhnologii*, 2008, no. 8, pp. 31-38.
8. Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P., Markevich M.N. Modelirovanie dielektricheskikh kharakteristik kompozitsionnykh materialov na osnove metoda asimptoticheskogo osredneniya [Modeling of dielectric properties of composite materials on the basis of asymptotic averaging]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2013, no. 1. DOI: [10.7463/0113.0531682](https://doi.org/10.7463/0113.0531682)
9. Emets Yu.P. Effektivnaya dielektricheskaya pronitsaemost' trekhkomponentnykh kompozitsionnykh materialov s anizotropnoy strukturoy [Effective permittivity of three-phase composite materials with an anisotropic structure]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 2005, vol. 75, no. 2, pp. 67-72. (English Translation: *Technical Physics*, 2005, vol. 50, iss. 2, pp. 207-212. DOI: 10.1134/1.1866436).
10. Shelukhin V.V., Terent'ev S.A. Gomogenizatsiya uravneniy Maksvella i dispersiya Maksvella-Vagnera [Homogenization of Maxwell equations and the Maxwell-Wagner dispersion]. *Doklady Akademii nauk*, 2009, vol. 424, no. 3, pp. 402-406. (English Translation: *Doklady Earth Sciences*, 2009, vol. 424, iss. 1, pp. 155-159. DOI: 10.1134/S1028334X09010334).
11. Bensoussan A., Lions J.L., Papanicalaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures*. Amsterdam; New York: North-Holland Pub. Co., 1978. 396 p.
12. Kettunen H., Qi J., Wallen H., Sihvola A. Frequency dependence of effective permittivity of simple dielectric composites. *Proceedings of ACES 2010*, Tampere, Finland, 2010, pp. 248-253.
13. Sanchez-Palencia E. Book chapters. In: Sanchez-Palencia E., Zaoui A., eds. *Homogenization techniques for composite media*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1987, pp. 121-192. DOI: 10.1007/3-540-17616-0 (Ser. *Lecture notes in Physics*; no. 272).