НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

Динамически линеаризуемые системы управления и накрытия

09, сентябрь 2013

DOI: 10.7463/0913.0601455

Четвериков В. Н.

УДК 517.977

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
chetverikov.vl@yandex.ru

Введение

Динамически линеаризуемые [1] и плоские [2] системы образуют наиболее широкие классы систем, для которых разработаны методы управления. В [3] была дана геометрическая интерпретация плоских систем, доказана динамическая линеаризуемость таких систем и разработан метод динамической обратной связи для решения задач управления плоскими системами. Оказалось, что многие нелинейные системы из различных областей техники являются плоскими (см. [4]) и задачи управления для них решаются указанным методом. Были получены [5] условия плоскостности и предложен метод вычисления плоского выхода, который в некоторых случаях оказывается эффективным. Однако полностью задачи проверки динамической линеаризуемости или плоскостности до сих пор не решены и являются актуальнейшими задачами теории управления.

В работе [6] была дана интерпретация динамической линеаризуемости на языке бесконечномерной геометрии дифференциальных уравнений [7]. А именно, система динамически линеаризуема тогда и только тогда, когда она накрывается тривиальной системой. Накрытием называют такое отображение систем дифференциальных уравнений, при котором решения отображаются в решения. При этом множество решений, отображающихся в одно решение s, совпадает с множеством решений некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, связанной с s.

Цель данной работы — на инвариантном языке векторных полей описать класс накрытий из систем тривиального вида. Так как образ любого такого накрытия есть динамически линеаризуемая система, то полученное описание дает одновременно описание динамически линеаризуемых систем.

Статья организована следующим образом. В п. 1 определяются динамически линеаризуемые и плоские системы. В п. 2 формулируется бесконечномерная геометрическая модель систем с управлением. Эта модель используется для геометрической интерпретации плоскостности и динамической линеаризуемости в п. 3. В п. 4 устанавливается связь между векторными полями, касающимися слоев накрытия, и высшими симметриями системы. В виду бесконечной размерности используемых моделей систем управления, рассматриваемые векторные поля могут не иметь фазовых потоков даже локально. Векторное поле, обладающее локальным фазовым потоком, называют интегрируемым. П. 5 посвящен полученному ранее описанию интегрируемых векторных полей на рассматриваемых бесконечномерных моделях систем. В п. 6 формулируются и доказываются основные результаты статьи.

1. Динамическая обратная связь

Мы рассматриваем системы вида

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \;\; u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — состояние системы, $u = (u_1, \ldots, u_m)$ — управление (или вход), f — гладкая векторная функция, а $\dot{x} \equiv dx/dt$. Под гладкостью здесь и далее мы понимаем бесконечную дифференцируемость.

Динамической обратной связью (динамическим компенсатором) системы (1) мы называем систему вида

$$\dot{\xi} = a(t, \xi, x, v), \quad u = b(t, \xi, x, v), \quad \xi \in \mathbb{R}^l, \;\; v \in \mathbb{R}^m, \tag{2}$$

с состоянием ξ, входом (x, v) и выходом u, удовлетворяющую условию соответствия решений: для любого решения $(x(t), u(t))$ системы (1) существуют векторные функции $\xi(t)$ и $v(t)$, которые вместе с функциями $x(t)$ и $u(t)$ тождественно удовлетворяют уравнениям (2). Полученный так набор функций $(x(t), \xi(t), v(t))$ представляет собой решение системы

$$\dot{x} = f(t, x, b(t, \xi, x, v)), \qquad \dot{\xi} = a(t, \xi, x, v) \tag{3}$$

с состоянием $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{n+l}$ и управлением v. Второе уравнение в (2) определяет обратное отображение из множества решений системы (3) в множество решений системы (1). Таким образом, динамическую обратную связь (2) можно понимать как преобразование системы (1) в систему (3). При этом каждому решению системы (3) соответствует одно решение системы (1), а решению (1) может соответствовать бесконечно много решений системы (3).

В работе [1] вместо условия соответствия решений рассматривается условие регулярности динамической обратной связи. В [6] было доказано, что условие регулярности эквивалентно условию соответствия решений (см. теорему 2 ниже).

Пусть $s(t) = (x(t), u(t))$ — какое-либо решение системы (1). Говорят, что система (1) динамически линеаризуема в окрестности решения $s(t)$, если существуют функции a и b, задающие такую динамическую обратную связь (2) в окрестности $s(t)$, что получающаяся с помощью этой связи система (3) обратимой заменой переменных вида

$$z = Z(t, x, \xi), \quad t = t, \quad v = v \tag{4}$$

сводится к линейной управляемой системе вида $\dot{z} = Az + Bv$, где A и B — постоянные матрицы. Если указанные условия выполняются для $l = 0$, т. е. ξ отсутствует, то система (1) называется статически линеаризуемой. Точные определения окрестности решения и динамической обратной связи в окрестности решения будут даны ниже.

Система (1) называется плоской в окрестности решения $s(t)$, если в этой окрестности существуют такие функции

$$h_1(t, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(l_1)}), \quad \ldots, \quad h_r(t, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(l_r)}), \tag{5}$$

что переменные x и u выражаются через t, функции (5) и их производные в силу системы (1) до какого-то конечного порядка, а любой конечный набор функций (5), их производных в силу системы (1) и функции t функционально независим. При этом набор функций (5) называется плоским (или линеаризующим) выходом системы (1).

В [3] доказано, что из плоскостности системы с управлением следует ее динамическая линеаризуемость.

Для формулировки основных результатов статьи и их доказательств мы используем бесконечномерный геометрический подход к системам с управлением, развитый ранее в [7] для уравнений в частных производных.

2. Бесконечномерная геометрическая модель систем с управлением

С системой (1) свяжем бесконечномерное пространство $\mathbb{R}^\infty$ с координатами

$$t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u_1^{(0)},\ \ldots,\ u_m^{(0)},\ u_1^{(1)},\ \ldots,\ u_m^{(1)},\ u_1^{(2)},\ \ldots, \tag{6}$$

где координаты $u_i^{(0)}$ соответствуют переменным u_i, а координаты $u_i^{(j)}$ — производным $d^j u_i / dt^j, j > 0$. Область изменения переменных (6), соответствующую системе (1), обозначим через $\mathcal{E}^\infty$. Каждое решение $s(t) = (s_x(t), s_u(t))$ системы (1) и точка t_0, в окрестности которой это решение определено, задают точку из $\mathcal{E}^\infty$ с координатами

$$t_0, \quad x_0 = s_x(t_0), \quad u_0^{(l)} = \frac{\partial^l s_u(t_0)}{\partial t^l}, \quad l \geq 0,$$

которая называется бесконечным джетом решения $s(t)$ в точке t_0. Каждая точка множества $\mathcal{E}^\infty$ является бесконечным джетом некоторого решения (доказательство см. в [5]). Под окрестностью решения $s(t)$ мы понимаем окрестность в $\mathcal{E}^\infty$ какого-либо бесконечного джета этого решения. В частности, базовая окрестность представляет собой подмножество в $\mathcal{E}^\infty$, заданное системой неравенств вида

$$\begin{aligned} &|t - t_0| < \varepsilon, \quad |x_i - x_{i,0}| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n, \\ &|u_j^{(l)} - u_{j,0}^{(l)}| < \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, m, \ \ l = 0, 1, \ldots, k, \end{aligned}$$

где ε — положительное действительное число, а k — натуральное.

На множестве $\mathcal{E}^\infty$ вводится структура бесконечномерного гладкого многообразия. Это означает определение на $\mathcal{E}^\infty$ обычных гладких понятий: гладких функций, векторных полей, дифференциальных форм и т. д. А именно, гладкой функцией на $\mathcal{E}^\infty$ называется функция, гладким образом зависящая от конечного (но произвольного) набора переменных (6). Алгебра гладких функций на $\mathcal{E}^\infty$ обозначается через $\mathcal{F}(\mathcal{E})$. Любое дифференцирование этой алгебры представляет собой сумму (в общем случае бесконечную) вида

$$g_0\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{l=1}^{n}g_l\frac{\partial}{\partial x_l}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\infty}g_i^{(j)}\frac{\partial}{\partial u_i^{(j)}}, \tag{7}$$

где $g_l, l=0,1,\ldots,n, g_i^{(j)}, i=1,\ldots,m, j=0,1,\ldots,$ — некоторые гладкие функции на $\mathcal{E}^\infty$. Любое такое дифференцирование называется векторным полем на $\mathcal{E}^\infty$. Множество векторных полей на $\mathcal{E}^\infty$ является модулем над алгеброй $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ и обозначается через $\mathcal{D}(\mathcal{E}^\infty)$. Векторные поля вида (7), у которых отсутствует первое слагаемое, т. е. $g_0\equiv 0$, называют вертикальными.

Дифференциальной 1-формой на $\mathcal{E}^\infty$ называется 1-форма, зависящая от конечного набора переменных (6), т. е. конечная сумма

$$g_0dt+\sum_{l=1}^{n}g_l dx_l+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{k}g_i^{(j)}du_i^{(j)}, \qquad g_0, g_l, g_i^{(j)}\in\mathcal{F}(\mathcal{E}).$$

Через $\Lambda^1(\mathcal{E}^\infty)$ обозначим $\mathcal{F}(\mathcal{E})$-модуль дифференциальных 1-форм на $\mathcal{E}^\infty$. Алгебра $\mathcal{F}(\mathcal{E})$, модули $\mathcal{D}(\mathcal{E}^\infty)$ и $\Lambda^1(\mathcal{E}^\infty)$ связаны обычными алгебраическими операциями. В частности, производную Ли функции g (1-формы ω) вдоль векторного поля X будем обозначать через Xg (соответственно через $X\omega$).

Векторное поле

$$D=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{l=1}^{n}f_l(t,x,u^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_l}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\infty}u_i^{(j+1)}\frac{\partial}{\partial u_i^{(j)}},$$

определенное в точках $\mathcal{E}^\infty$, называется полной производной по t на $\mathcal{E}^\infty$. Производная Ли вдоль D совпадает с производной в силу системы (1), а фазовые кривые этого поля совпадают с графиками в $\mathcal{E}^\infty$ решений системы (1) (см. [7]). Поэтому в качестве геометрической модели системы (1) берется пара $(\mathcal{E}^\infty, D)$, которая называется диффеотопом (или бесконечным продолжением) системы (1) (подробности см. в [7]).

3. Геометрическая интерпретация плоскостности и динамической линеаризуемости

Пусть $(\mathcal{S}^\infty, D_\mathcal{S})$ и $(\mathcal{E}^\infty, D_\mathcal{E})$ — два диффеотопа. Отображение

$$F:\mathcal{S}^\infty\longrightarrow\mathcal{E}^\infty \tag{8}$$

будем называть гладким, если соответствующее индуцированное отображение F^* отображает любую гладкую функцию на $\mathcal{E}^\infty$ в гладкую функцию на $\mathcal{S}^\infty$, т. е. $F^*\big(\mathcal{F}(\mathcal{E})\big) \subset \mathcal{F}(\mathcal{S})$, где по определению $F^*(g) = g \circ F$. Отображение (8) называется диффеоморфизмом, если оно гладкое, взаимнооднозначное, и обратное отображение также является гладким.

Диффеоморфизм (8), сохраняющий независимую переменную, т. е. $F^*(t) = t$, называется $\mathcal{C}$-диффеоморфизмом (или изоморфизмом Ли — Бэклунда), если

$$F_*(D_{\mathcal{S}}) = D_{\mathcal{E}}. \tag{9}$$

При этом $\mathcal{C}$-диффеоморфными называются системы, чьи диффетопы связаны $\mathcal{C}$-диффеоморфизмом. Определение $\mathcal{C}$-диффеоморфизма в окрестности точки $\vartheta \in \mathcal{S}^\infty$ получается, если в приведенных здесь определениях многобразия $\mathcal{S}^\infty$ и $\mathcal{E}^\infty$ заменить на окрестности точек $\vartheta \in \mathcal{S}^\infty$ и $F(\vartheta) \in \mathcal{E}^\infty$ соответственно. Так как фазовые кривые полной производной D совпадают с графиками решений соответствующей системы, то из условия (9) следует, что любой $\mathcal{C}$-диффеоморфизм отображает графики решений одной системы в графики решений другой системы. Таким образом, $\mathcal{C}$-диффеоморфные системы — это эквивалентные системы. Далее через $\mathcal{E}^\infty$ обозначен диффеотоп системы (1), а система вида

$$\dot{y} = v, \quad y, v \in \mathbb{R}^r, \tag{10}$$

называется тривиальной. Система (10) плоская, и $(y_1, \ldots, y_r)$ — ее плоский выход. Поэтому в качестве координат на диффеотопе этой системы можно взять функции

$$t,\ y_1^{(0)},\ \ldots,\ y_r^{(0)},\ y_1^{(1)},\ \ldots,\ y_r^{(1)},\ y_1^{(2)},\ \ldots. \tag{11}$$

Теорема 1 ([3]). Система (1) плоская в окрестности точки $\vartheta \in \mathcal{E}^\infty$ тогда и только тогда, когда существует $\mathcal{C}$-диффеоморфизм F из окрестности этой точки в открытое подмножество диффеотопа тривиальной системы (10). При этом функции $F^*(y_1), \ldots, F^*(y_r)$ образуют плоский выход системы (1).

Обозначим диффеотоп системы (3) через $\mathcal{S}^\infty$, а через E_k — $\mathcal{F}(\mathcal{S})$-модуль, порожденный формами $dt, dx_i, d\xi_s, db_j, dD_{\mathcal{S}}(b_j), \ldots, dD_{\mathcal{S}}^k(b_j)$, где $i = 1, \ldots, n$, $s = 1, \ldots, l$, $j = 1, \ldots, m$. Под размерностью какого-либо $\mathcal{F}(\mathcal{S})$-подмодуля $E \subset \Lambda^1(\mathcal{S}^\infty)$ в точке $\vartheta \in \mathcal{S}^\infty$ мы понимаем размерность пространства ковекторов $\{\omega_\vartheta \,|\, \omega \in E\}$. Через $\dim E$ мы обозначаем целочисленную функцию на $\mathcal{S}^\infty$, значение которой в точке ϑ есть размерность E в ϑ. Динамическая обратная связь (2) системы (1) называется регулярной в окрестности точки $\vartheta \in \mathcal{S}^\infty$, если в этой окрестности $\dim E_l - \dim E_{l-1} = m$.

Теорема 2 ([6]). Пусть в окрестности точки диффеотопа $(\mathcal{S}^\infty, D_{\mathcal{S}})$ системы (3) модуль E_{l-1} имеет постоянную размерность. Тогда в окрестности этой точки следующие условия эквивалентны:

а) условие соответствия решений;

б) условие регулярности динамической обратной связи;

в) любой конечный набор функций

$$t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ b_1,\ \ldots,\ b_m, D_{\mathcal{S}}(b_1),\ \ldots,\ D_{\mathcal{S}}(b_m),\ D^2_{\mathcal{S}}(b_1),\ \ldots, \tag{12}$$

функционально независим на $\mathcal{S}^\infty$;

г) среди переменных ξ можно выбрать такой поднабор $\zeta = (\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_q})$, что система (3) эквивалентна системе

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad \dot{\zeta} = g(t, \zeta, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(l)}), \quad \zeta \in \mathbb{R}^q, \tag{13}$$

причем эквивалентность задается соотношениями

$$x = x, \quad u = b(t, \xi, x, v), \quad \zeta = (\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_q}). \tag{14}$$

Можно показать (см., например, лемму 4.4 в [5]), что множество точек диффеотопа $\mathcal{S}^\infty$, в окрестности которых модуль E_{l-1} имеют постоянную размерность, открыто и всюду плотно в $\mathcal{S}^\infty$. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие точки диффеотопа $\mathcal{S}^\infty$.

Пусть $s(t) = (s_x(t), s_u(t))$ — какое-либо решение системы (1). Будем говорить, что динамическая обратная связь (2) определена в окрестности решения $s(t)$, если система (2) определена, когда $t, x, u, \dot{u}, \ldots$ есть координаты точки из окрестности какого-либо бесконечного джета решения $s(t)$, а ξ и v — координаты точек из каких–либо открытых подмножеств $\mathbb{R}^l$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно.

Гладкое отображение (8), удовлетворяющее условию $F^*(t) = t$, называется накрытием, если:

– оно удовлетворяет условию (9);

– в каждой точке $\vartheta \in \mathcal{S}^\infty$ касательное отображение $F_{*,\vartheta}$ является эпиморфизмом векторных пространств;

– размерность ядра $F_{*,\vartheta}$ постоянна для всех $\vartheta \in \mathcal{S}^\infty$.

Размерностью накрытия называется размерность слоя отображения F или, что эквивалентно, размерность ядра $F_{*,\vartheta}$. Любой $\mathcal{C}$-диффеоморфизм является накрытием нулевой размерности. Если (8) — накрытие, а $(\mathcal{S}^\infty, D_{\mathcal{S}})$ и $(\mathcal{E}^\infty, D_{\mathcal{E}})$ — диффеотопы систем $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$ соответственно, то говорят, что система $\mathcal{S}$ накрывает систему $\mathcal{E}$, или что F — накрытие системы $\mathcal{E}$ системой $\mathcal{S}$.

Теорема 3 ([6]). Динамическая обратная связь (2) системы (1) определяет конечномерное накрытие этой системы системой (3). А любое конечномерное накрытие системы (1) определяет ее динамическую обратную связь.

Следуя [7], переменные $\zeta_1, \ldots, \zeta_q$ в (13) будем называть нелокальными переменными динамической обратной связи (2) (или соответсвующего накрытия). Система (1) называется регулярной в точке $\vartheta \in \mathcal{E}^\infty$, если ранг матрицы $\partial f/\partial u$ в этой точке равен m.

Теорема 4 ([6]). Регулярная система (1) динамически линеаризуема в окрестности точки ϑ ее диффеотопа тогда и только тогда, когда существует конечномерное накрытие из некоторого открытого подмножества диффеотопа тривиальной системы в окрестность точки ϑ.

4. Производные по нелокальным переменным и высшие симметрии систем

Полная производная по t на диффеотопе системы (13) есть

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} f_s(t,x,u^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_s} + \sum_{j=1}^{q} g_j(t,\zeta,x,u^{(0)},\ldots,u^{(l)})\frac{\partial}{\partial \zeta_j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{\alpha=0}^{\infty} u_i^{(\alpha+1)}\frac{\partial}{\partial u_i^{(\alpha)}}.$$

Заметим, что в случае одной нелокальной переменной ($q = 1$ в (13)), векторное поле $X = \dfrac{\partial}{\partial \zeta_1}$ удовлетворяет равенству

$$[X, D] = AX, \tag{15}$$

где $A = \dfrac{\partial g_1}{\partial \zeta_1}$.

В многомерном случае ($q > 1$ в (13)), столбец $X = \left(\dfrac{\partial}{\partial \zeta_1},\ \ldots,\ \dfrac{\partial}{\partial \zeta_q}\right)^T$ векторных полей аналогичным образом удовлетворяет равенству (15), где $[X, D]$ — столбец коммутаторов $\left(\left[\dfrac{\partial}{\partial \zeta_1}, D\right], \ldots, \left[\dfrac{\partial}{\partial \zeta_q}, D\right]\right)^T$, а AX — произведение матрицы функций $A = \left(\dfrac{dg_i}{d\zeta_j}\right)_{i,j=1,\ldots,q}$ и столбца X.

При $A \equiv 0$ в одномерном случае равенство (15) означает, что X есть высшая симметрия системы (13).

Высшей (инфинитезимальной) симметрией системы (1) называют (см. [7]) вертикальное поле X на $\mathcal{E}^\infty$, удовлетворяющее условию

$$[X, D] = 0. \tag{16}$$

Мотивировка этого определения следующая. Если векторное поле Y на $\mathcal{E}^\infty$ обладает фазовым потоком, и преобразования этого потока отображают графики решений системы (1) в графики решений этой системы, то

$$[Y, D] = aD, \qquad a \in \mathcal{F}(\mathcal{E}). \tag{17}$$

Ввиду бесконечномерности $\mathcal{E}^\infty$ векторные поля на $\mathcal{E}^\infty$, как правило, не обладают фазовым потоком. Будем искать произвольные векторные поля на $\mathcal{E}^\infty$, удовлетворяющие условию (17). Такие поля называют $\mathcal{C}$-полями. Всякое векторное поле Y на $\mathcal{E}^\infty$ можно однозначно представить в виде суммы вертикального поля X и поля вида hD, $h \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$, т. е. $Y = X + hD$. При этом условие (17) означает, что вертикальная составляющая X удовлетворяет условию (16), т. е. является высшей симметрией, а функция h произвольна. Таким образом, найдя все высшие симметрии $\mathcal{E}^\infty$, мы найдем все поля, удовлетворяющие условию (17).

Следующая теорема есть обобщение теоремы 2.5 из гл. 4 в [7], характеризующей высшие симметрии систем тривиального вида.

Теорема 5. Столбец X вертикальных полей $X_1, \ldots, X_q$ на диффеотопе $\mathcal{S}^\infty$ тривиальной системы (10) удовлетворяет равенству (15), где A — матрица функций на $\mathcal{S}^\infty$, тогда и только тогда, когда в координатах (11) на $\mathcal{S}^\infty$ столбец X имеет вид

$$X = \sum_{s=0}^{\infty}(D + A)^s(\varphi)\frac{\partial}{\partial y^{(s)}}, \tag{18}$$

где $\varphi = (\varphi_{ij})$, $i = 1, \ldots, q$, $j = 1, \ldots, r$, — матрица произвольных функций на $\mathcal{S}^\infty$, $\dfrac{\partial}{\partial y^{(s)}}$ — столбец производных $\dfrac{\partial}{\partial y_1^{(s)}}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial y_r^{(s)}}$, а правая часть равенства (18) представляет собой сумму произведений матриц на столбцы.

Доказательство. Обозначим через φ_{ij} производную $X_i(y_j^{(0)})$, $i = 1, \ldots, q$, $j = 1, \ldots, r$. Докажем индукцией по s, что

$$X(y^{(s)}) = (D + A)^s(\varphi). \tag{19}$$

Случай $s = 0$ следует из определения φ. Пусть равенство (19) доказано для s. Формулу (15) перепишем в виде

$$X \circ D = (D + A) \circ X.$$

Используя ее и равенство (19), получаем

$$X(y^{(s+1)}) = X(Dy^{(s)}) = (D + A)(Xy^{(s)}) = (D + A)\big((D + A)^s(\varphi)\big) = (D + A)^{s+1}(\varphi).$$

Таким образом, равенство (19) доказано для любого s, а значит, формула (18) верна. Теорема доказана.

5. Интегрируемые поля на диффеотопах

Векторное поле $Y \in D(\mathcal{E}^\infty)$ называют интегрируемым в окрестности $\mathcal{U}^\infty \subset \mathcal{E}^\infty$, если существует множество диффеоморфизмов $A_t \colon \mathcal{U}^\infty \to \mathcal{E}^\infty$, $t \in I$, такое, что:

1) I — открытый интервал прямой $\mathbb{R}$, содержащий нуль;

2) A_0 — тождественное отображение $\mathcal{U}^\infty$;

3) $A_t \circ A_s = A_{t+s}$, если t, s и $t + s$ принадлежат I;

4) $\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0}(A_t)^*(f)(\vartheta) = Y(f)(\vartheta)$ для любой точки $\vartheta \in \mathcal{U}^\infty$ и гладкой функции f на $\mathcal{U}^\infty$.

При этом множество диффеоморфизмов $\{A_t : t \in I\}$ называют фазовым потоком поля Y.

Пусть $\mathcal{U}^\infty$ — открытое множество диффеотопа $\mathcal{E}^\infty$ системы (1), $l \geq 0$. Обозначим через $\mathcal{F}_l(\mathcal{U})$ кольцо гладких функций, определенных в окрестности $\mathcal{U}^\infty$ и зависящих только от координат $t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u_1^{(0)},\ \ldots,\ u_m^{(0)},\ \ldots,\ u_1^{(l)},\ \ldots,\ u_m^{(l)}$. Через $\mathcal{F}_l(\mathcal{E})$ будем обозначать соответсвующее кольцо функций на диффеотопе $\mathcal{E}^\infty$.

Теорема 6 ([8]). Если векторное поле Y на диффеотопе $\mathcal{E}^\infty$ системы (1) интегрируемо в окрестности $\mathcal{U}^\infty$ точки $\vartheta \in \mathcal{E}^\infty$, то для любой функции $f \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ существует такое число l, что для любого $k > 0$

$$Y^k(f) \subset \mathcal{F}_l(\mathcal{U}),$$

где $Y^k(f) = (Y \circ \ldots \circ Y)(f)$ — k-я степень производной Ли функции f вдоль Y.

Пример 1. На диффеотопе системы (13) векторное поле $\dfrac{\partial}{\partial \zeta_i}$ при $i = 1, \ldots, q$ интегрируемо, так как условие теоремы 6 выполняется для $l = 0$.

Теорема 6 каждой функции f и интегрируемому полю Y на $\mathcal{U}^\infty$ ставит в соответствие целое число $l(f,Y)$. С интегрируемым полем Y ассоциируется кольцо $\mathcal{K}$, порожденное функциями $Y^k(f), f \in \mathcal{F}_0(\mathcal{U}), k \geq 0$. Так как для построения $\mathcal{K}$ достаточно рассмотреть только координатные функции f из $\mathcal{F}_0(\mathcal{U})$, которых конечное число, то $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}_l(\mathcal{U})$ для некоторого l. А именно, l — это максимальное из чисел $l(f,Y)$, где f — координатные функции из $\mathcal{F}_0(\mathcal{U})$.

В работе [8] были рассмотрены такие кольца $\mathcal{K}$ функций на диффеотопе, что $\mathcal{F}_0(\mathcal{U}) \subset \mathcal{K} \subset$ $\subset \mathcal{F}_l(\mathcal{U})$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$, дано определение точки общего положения такого кольца, а также показано, что множества таких точек есть открытое всюду плотное подмножество диффеотопа (предложение 4), и доказан результат (теорема 1), который для систем вида (1) формулируется следующим образом.

Теорема 7. [8] Пусть $\mathcal{K}$ — такое кольцо функций на диффеотопе $\mathcal{E}^\infty$ системы (1), что $\mathcal{F}_0(\mathcal{E}) \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{F}_l(\mathcal{E})$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$. Тогда существует такой $\mathcal{C}$-диффеоморфизм F из некоторой окрестности $\mathcal{U}^\infty \subset \mathcal{E}^\infty$ точки общего положения кольца $\mathcal{K}$ в диффеотоп $\mathcal{S}^\infty$ некоторой другой системы, что $\mathcal{K} \subset F^*\big(\mathcal{F}_0(\mathcal{S})\big)$ и любой элемент $F^*\big(\mathcal{F}_0(\mathcal{S})\big)$ представляет собой функцию конечного числа элементов $\mathcal{K}$.

6. Накрытия систем с управлением

В работе [9] показано, что любая конечномерная алгебра коммутирующих интегрируемых $\mathcal{C}$–полей определяет накрытие, слои которого совпадают с интегральными многообразиями распределения, порожденного этой алгеброй. Мы обобщим этот результат на случай полей, удовлетворяющих условию (15).

Набор вертикальных полей $X_1, \ldots, X_q$ на диффеотопе $\mathcal{E}^\infty$ системы (1) будем называть f-набором системы (1), если:

1) выполняется равенство (15), где A — матрица функций на $\mathcal{E}^\infty$;

2) векторные поля $X_1, \ldots, X_q$ линейно независимы в каждой точке $\mathcal{E}^\infty$ и попарно коммутируют, т.е. $[X_i, X_j] = 0$ для любых $i, j = 1, \ldots, q$;

3) поля $X_1, \ldots, X_q$ интегрируемы, причем существует такое кольцо $\mathcal{K}$ функций на $\mathcal{E}^\infty$, что $\mathcal{F}_0(\mathcal{E}) \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{F}_l(\mathcal{E})$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$, матрица A в (15) состоит из элементов $\mathcal{K}$ и $X_i(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ для любого $i = 1, \ldots, q$.

Точкой общего положения f-набора назовем точку общего положения соответствующего кольца $\mathcal{K}$.

Теорема 8. Любой f-набор системы (1) определяет накрытие ν из некоторой окрестности $\mathcal{U}^\infty$ точки общего положения f-набора в диффеотоп некоторой другой системы $\mathcal{S}_1$. При этом размерность накрытия ν равна размерности f-набора, а его любой элемент X_i проектируется при ν_* в нулевое векторное поле.

Доказательство. Накрытие ν построим так, чтобы его слои совпадали с интегральными многообразиями распределения, порожденного f-набором. А именно, кольцо

$\nu^*\big(\mathcal{F}(\mathcal{S}_1)\big)$ состоит из общих первых интегралов векторных полей из f-набора. Отметим, что если g — общий первый интеграл полей из f-набора, то из равенства (15) следует, что Dg есть также общий первый интеграл полей из f-набора. Поэтому общие первые интегралы полей из f-набора образуют кольцо функций на некотором диффеотопе. Точное построение ν и системы $\mathcal{S}_1$ следующее.

По теореме 7 существует такой $\mathcal{C}$-диффеоморфизм F из некоторой окрестности $\mathcal{U}^\infty \subset \mathcal{E}^\infty$ рассматриваемой точки общего положения ϑ кольца $\mathcal{K}$ в диффеотоп $\mathcal{S}^\infty$ некоторой другой системы $\mathcal{S}$, что $\mathcal{K} \subset F^*\big(\mathcal{F}_0(\mathcal{S})\big)$ и любой элемент $F^*\big(\mathcal{F}_0(\mathcal{S})\big)$ представляет собой функцию конечного числа элементов $\mathcal{K}$. Обозначим $Y_i = F_*(X_i)$, $i = 1, \dots, q$. Из условия $X_i(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ следует, что $(X_i \circ F^*)\big(\mathcal{F}_0(\mathcal{S})\big) \subset F^*\big(\mathcal{F}_0(\mathcal{S})\big)$ и поэтому $Y_i\big(\mathcal{F}_0(\mathcal{S})\big) \subset \mathcal{F}_0(\mathcal{S})$. Следовательно, поля $Y_1, \dots, Y_q$ определяют векторные поля $Y_1^0, \dots, Y_q^0$ в области $\mathcal{S}^0$ пространства независимой и зависимых переменных системы $\mathcal{S}$. Так как поля $X_1, \dots, X_q$ попарно коммутируют, то поля $Y_1, \dots, Y_q$, а значит, и их проекции $Y_1^0, \dots, Y_q^0$ также попарно коммутируют.

Так как координатные функции на $\mathcal{E}^\infty$ совпадают или есть производные вдоль D тех координатных функциий, которые лежат в $\mathcal{F}_0(\mathcal{E})$, то из равенства (15) следует, что поля $X_1, \dots, X_q$ определяются значениями на $\mathcal{F}_0(\mathcal{E})$, а значит, на $\mathcal{K}$. Поэтому векторные поля $Y_1, \dots, Y_q$ определяются значениями на $F^*\big(\mathcal{F}_0(\mathcal{S})\big)$, т.е. полями $Y_1^0, \dots, Y_q^0$. Так как поля $X_1, \dots, X_q$ линейно независимы, то линейно независимы поля $Y_1, \dots, Y_q$, а значит, поля $Y_1^0, \dots, Y_q^0$.

Таким образом, поля $Y_1^0, \dots, Y_q^0$ определяют интегрируемое регулярное распределение в области $\mathcal{S}^0$, а значит, в некоторой окрестности точки из $\mathcal{S}^0$, соответсвующей точке $F(\vartheta)$, существуют такие координаты $t, z_1, \dots, z_N$, что $Y_i^0 = \dfrac{\partial}{\partial z_i}$, $i = 1, \dots, q$. Так как $Y_1^0, \dots, Y_q^0$ — проекции полей $Y_1, \dots, Y_q$ в $\mathcal{S}^0$, то производная $Y_i(z_j)$ равна 1 при $j = i$ и 0 при $j \neq i$, где $z_1, \dots, z_N$ понимаются как функции на $\mathcal{S}^\infty$.

Обозначим через $\dot z_1, \dots, \dot z_N$ производные в силу системы $\mathcal{S}$ функций $z_1, \dots, z_N$. Некоторые из этих производных представляют собой функции остальных производных и $t, z_1, \dots, z_N$. Обозначим через $\mathcal{I}$ множество тех индексов от 1 до N, что функции $t, z_j, \dot z_\alpha$ при $j = 1, \dots, N, \alpha \in \mathcal{I}$, функционально независимы в окрестности точки $F(\vartheta)$, а если $\alpha = 1, \dots, N$ и $\alpha \notin \mathcal{I}$, то $\dot z_\alpha$ есть функция указанного набора переменных. Обозначим через $\mathcal{S}^1$ область пространства с координатами $t, z_j, \dot z_\alpha$, $j = 1, \dots, N$, $\alpha \in \mathcal{I}$.

Из условия (15) следует, что

$$[Y_i, D_{\mathcal{S}}] = \sum_{j=1}^{q} B_{ij} Y_j, \qquad i = 1, \dots, q, \tag{20}$$

где $B_{ij} = (F^{-1})^*(A_{ij})$ — функции из $\mathcal{F}_0(\mathcal{S})$, т.е. от $t, z_1, \dots, z_N$, так как $A_{ij} \in \mathcal{K} \subset F^*\big(\mathcal{F}_0(\mathcal{S})\big)$. Из (20) следует, что для любого $i = 1, \dots, q$

$$Y_i(\dot z_j) = (Y_i \circ D_{\mathcal{S}})(z_j) = (D_{\mathcal{S}} \circ Y_i)(z_j) + \sum_{\alpha=1}^{q} B_{i\alpha} Y_\alpha(z_j) = B_{ij}$$

при $j = 1, \ldots, q$ и $Y_i(\dot z_j) = 0$ при $j = q+1, \ldots, N$. Поэтому при $i = 1, \ldots, q$ векторное поле Y_i проектируется в поле

$$Y_i^1 = \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} B_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot z_\alpha}$$

на $\mathcal{S}^1$.

Так как поля $Y_1, \ldots, Y_q$ коммутируют, то их проекции $Y_1^1, \ldots, Y_q^1$ также коммутируют, а значит, определяют интегрируемое регулярное распределение в $\mathcal{S}^1$. Первыми интегралами этого распределения являются функции t, $z_{q+1}, \ldots, z_N$, производные $\dot z_j$, $j = q+1, \ldots, N$, $j \in \mathcal{I}$, и некоторые функции вида $\psi_\alpha = \dot z_\alpha + \varphi_\alpha(t, z_1, \ldots, z_N)$, $\alpha = 1, \ldots, q$, $\alpha \in \mathcal{I}$. Выберем функции z_j, ψ_α, $j = q+1, \ldots, N$, $\alpha = 1, \ldots, q$, $\alpha \in \mathcal{I}$, в качестве зависимых переменных новой системы $\mathcal{S}_1$. Уравнениями этой системы являются те уравнения системы $\mathcal{S}$, которые содержат только эти переменные, их производные и t. Проекция из $\mathcal{S}^\infty$ в $\mathcal{S}_1^\infty$, которая определяется функциями z_j, ψ_α и «забывает» координаты $z_1, \ldots, z_q$, есть накрытие. Обозначим его через ν_1. Размерность накрытия ν_1 есть q, так как $z_1, \ldots, z_q$ — координаты в его слоях. Композиция $\mathcal{C}$-диффеоморфизма и накрытия есть накрытие. Поэтому $\nu = \nu_1 \circ F$ есть накрытие размерности q из окрестности точки $\vartheta \in \mathcal{E}^\infty$ в $\mathcal{S}_1^\infty$.

По построению, ν_1 проектирует поля $Y_i = F_*(X_i)$, $i = 1, \ldots, q$, в нулевое векторное поле. Поэтому $\nu_*(X_i) = \nu_{1,*}\big(F_*(X_i)\big) = 0$, $i = 1, \ldots, q$. Теорема доказана.

Если накрытие, определенное f-набором X, накрывает систему $\mathcal{S}$ системой $\mathcal{E}$, то систему $\mathcal{S}$ будем называть факторизацией системы $\mathcal{E}$ вдоль X.

Теорема 9. Регулярная система вида (1) динамически линеаризуема в окрестности точки ее диффеотопа тогда и только тогда, когда она представляет собой факторизацию тривиальной системы вдоль некоторого f-набора в окрестности точки общего положения этого f-набора.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению динамически линеаризуемой системы существует такая динамическая обратная связь (2), что получающаяся с помощью этой связи система (3), а значит, эквивалентная ей система (13) обратимой заменой переменных вида (4) сводится к линейной управляемой системе. В [3] показано, что любая линейная управляемая система плоская. А так как обратимая замена переменных вида (4) представляет собой $\mathcal{C}$-диффеоморфизм, то система (13) $\mathcal{C}$-диффеоморфна плоской системе. Но любой $\mathcal{C}$-диффеоморфизм отображает плоскую систему в плоскую. Поэтому система (13) плоская. Отсюда и из теоремы 1 выводится $\mathcal{C}$-диффеоморфность системы (13) тривиальной системе. Обозначим через F $\mathcal{C}$-диффеоморфизм из диффеотопа системы (13) в диффеотоп тривиальной системы. Из определения следует, что набор $X = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \zeta_q}\right)^T$ является f-набором системы (13). Так как любой $\mathcal{C}$-диффеоморфизм отображает f-набор в f-набор, то набор $F_*(X)$ является f-набором тривиальной системы. Факторизация тривиальной системы вдоль $F_*(X)$ совпадает с факторизацией системы (13) вдоль X, т.е. с системой (1).

Обратно, по определению, если система (1) есть факторизация тривиальной системы, то существует накрытие из этой тривиальной системы в систему (1). По теореме 4 система (1) динамически линеаризуема. Теорема доказана.

Заключение

Получено описание алгебры векторных полей, определяющих слои накрытия, соответствующего линеаризующей динамической обратной связи. Данное описание может быть использовано как для проверки динамической линеаризуемости конкретных систем, так и при теоретических исследованиях класса динамически линеаризуемых систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант 3659.2012.1) и грантов РФФИ 12-07-00267 и 13-07-00736.

Список литературы

1. Charlet B., Lévine J., Marino R. On dynamic feedback linearization // Syst. Contr. Lett. 1989. Vol. 13. P. 143–151.
2. Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P. Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats // C.R. Acad. Sci. Paris. Série I. 1992. Vol. 315. P. 619–624.
3. Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P. A Lie — Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1999. Vol. 44, no. 5. P. 922–937.
4. Martin Ph., Murray R., Rouchon P. Flat systems // Proc. of the 4th European Control Conf. Plenary lectures and Mini-courses. Brussels, 1997. P. 211–264.
5. Chetverikov V.N. Flat control systems and deformations of structures on diffieties // Forum Math. 2004. Vol. 16. P. 903–923.
6. Четвериков В.Н. Плоскостность динамически линеаризуемых систем // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 12. С. 1665–1674.
7. Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М., Дужин С.В., Красильщик И.С., Самохин А.В., Торхов Ю.Н., Хорькова Н.Г., Четвериков В.Н. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / под ред. А.М. Виноградова и И.С. Красильщика. 2-е изд., испр. и доп. М.: Факториал, 2005. 474 с.
8. Chetverikov V.N. On the structure of integrable $\mathcal{C}$-fields // Differential Geom. Appl. 1991. Vol. 1. P. 309–325.
9. Четвериков В.Н. Лиувиллевы системы и симметрии // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 12. С. 1672–1684.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

Dynamically linearizable control systems and coverings

 # 09, September 2013

DOI: 10.7463/0913.0601455

Chetverikov V. N.

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russian Federation
chetverikov.vl@yandex.ru

This paper deals with systems that are reduced to linear control systems by composition of a dynamic feedback transformation with the change of variables. Such systems form the widest class of systems for which control algorithms were developed. An invariant description of algebra of vector fields which define linearizing dynamic feedback was obtained by methods of infinite-dimensional differential geometry. This result can be used for checking dynamic linearizability of particular control systems and in theoretical studies for creating examples of dynamically linearizable systems with certain properties or describing the whole class of such systems with a given dimension.

References

1. Charlet B., Lévine J., Marino R. On dynamic feedback linearization. *Syst. Contr. Lett.*, 1989, vol. 13, pp. 143–151.
2. Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P. Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats. *C.R. Acad. Sci. Paris. Série I*, 1992, vol. 315, pp. 619–624.
3. Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P. A Lie – Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control.*, 1999, vol. 44, no. 5, pp. 922–937. DOI: 10.1109/9.763209.
4. Martin Ph., Murray R., Rouchon P. Flat systems. *Proc. of the 4th European Control Conf. Plenary lectures and Mini-courses*, Brussels, 1997, pp. 211–264.
5. Chetverikov V.N. Flat control systems and deformations of structures on diffieties. *Forum Mathematicum*, 2004, vol. 16, no. 6, pp. 903–923. DOI: 10.1515/form.2004.16.6.903.
6. Chetverikov V.N. Ploskostnost' dinamicheski linearizuemykh sistem [Flatness of dynamically linearizable systems]. *Differentsial'nye uravneniya*, 2004, vol. 40, no. 12, pp. 1665–1674.

(English translation: *Differential Equations*, December 2004, vol. 40, iss. 12, pp. 1747–1756. DOI: 10.1007/s10625-005-0106-5).

7. Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М., Дужин С.В., Красильщик И.С., Самохин А.В., Торхов Ю.Н., Хорькова Н.Г., Четвериков В.Н. Bocharov A.V., Verbovetskiy A.M., Vinogradov A.M., Duzhin S.V., Krasil'shchik I.S., Samokhin A.V., Torkhov Yu.N., Khor'kova N.G., Chetverikov V.N. *Simmetrii i zakony sokhraneniya uravneniy matematicheskoy fiziki* [Symmetries and laws of conservation of equations of mathematical physics]. Moscow, Faktorial, 2005. 474 p.
8. Chetverikov V.N. On the structure of integrable Cfields. *Differential Geom. Appl.*, 1991, vol. 1, iss. 4, pp. 309–325. DOI: 10.1016/0926-2245(91)90011-W.
9. Chetverikov V.N. Liuvillevy sistemy i simmetrii [Liouville systems and symmetries]. *Differentsial'nye uravneniya*, 2012, vol. 48, no. 12, pp. 1672–1684. (English translation: *Differential Equations*, December 2012, vol. 48, iss. 12, pp. 1639–1651. DOI: 10.1134/S0012266112120099).