Кинематика и динамика формирования сил резания при фрезеровании упругой оболочки

04, апрель 2013

DOI: 10.7463/0413.0541767

Козарь Д. М., Крауиньш П. Я.

УДК 621.9.06

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

kozardima@gmail.com

peterkrau@tpu.ru

1. Введение

В 2010 году число автомобилей, зарегистрированных во всем мире, превысило отметку в миллиард штук [2] и в настоящий момент продолжает расти. Это ведет к накоплению на свалках огромного количества изношенных шин, которые необходимо либо переработать в востребованное вторсырье, либо полностью уничтожить.

Ежегодный объем выбрасываемых автомобильных покрышек в России составляет более 1 млн. тонн [3, с.3]. Наибольшие объемы образования приходятся на Москву — 70–90 тыс. тонн, Санкт-Петербург и Ленинградскую обл. — 60 тыс. тонн [3, с.3]. Однако в целом проблема утилизации изношенных шин актуальна для каждого региона России.

Доля переработки шинных отходов в России очень мала, и в основном они хранятся на свалках. Контакт покрышек с дождевыми осадками сопровождается вымыванием токсичных веществ, которые попадают в почву. Разложение шины в земле длится более 100 лет [3, с.3]. В связи с этим развитые страны постепенно переходят от захоронения изношенных покрышек к их переработке и вторичному использованию. Среднеевропейский показатель доли перерабатываемых шин составляет 82% [4].

Россия также начала двигаться по пути создания предприятий по утилизации старых шин. Этот процесс идет довольно медленно, что связано с отсутствием административной поддержки, большим сырьевым потенциалом и неэффективностью имеющихся в настоящее время технологий по утилизации покрышек.

Существует множество способов переработки шин, которые условно можно разделить на измельчение и сжигание. В России, по имеющимся оценкам, объем механической переработки покрышек не превышает 17% от общего объема ежегодных отходов. Еще до 20% сжигается, остальной объем приходится на захоронение [5].

Также стоит отметить важную особенность российских предприятий по переработке шин — они в основном являются маломощными, с годовым объемом потребления сырья до 5000 тонн [5].

В частности, в России производятся маломощные установки (рис. 1) для утилизации отработанных шин [6], которые могут перерабатывать около 800 тонн покрышек в год путем их механического измельчения специальной цилиндрической фрезой на гранулы, с последующим извлечением корда и разделением на фракции в зависимости от размера.

Рис. 1. Схема действующей установки для утилизации шин (прототип)

В ходе эксплуатации одной из таких установок было выявлено много недостатков, основная часть которых — конструктивные: ручной зажим покрышек, завышенная мощность привода, необходимость остановки фрезы для смены набора обрабатываемых покрышек. Они были устранены. В частности, была разработана улучшенная модель станка [7], позволяющая повысить производительность за счет значительного снижения вспомогательного времени и автоматизации механизма зажима покрышек (рис. 2).

Но остались нерешенными некоторые технологические проблемы, связанные с обрабатываемым материалом: сильные вибрации и, как следствие, быстрый износ инструмента, подшипников и других элементов конструкции.

В литературе практически нет теоретических и экспериментальных данных для определения требуемых механических параметров проектируемого станка, поэтому была начата разработка его математической модели с учетом влияния формы покрышки и ее механических свойств на характер вибрации технологической системы.

Ранее была опубликована [8] математическая модель станка, в которой учитывались только его конструктивные особенности.

В данной статье предлагается улучшение указанной модели, за счет учета влияния кинематики и динамики технологической системы на формирование силы резания при фрезеровании покрышек.

Рис. 2. Усовершенствованный утилизатор шин

2. Постановка задачи

Основная причина вибрации в рассматриваемом оборудовании — материал. Покрышка имеет полуо форму, которая легко деформируется при резании. Резина, применяемая в изготовлении шин, имеет высокую механическую износостойкость и упругость. Помимо этого, покрышка содержит металлокорд, прочность которого значительно выше прочности резины. В сумме, эти свойства автомобильной покрышки приводят к тому, что материал режется плохо и не стабильно. Структура покрышки показана на рис. 3.

Рис. 3. Структура покрышки: 1 — протектор; 2 — плечевая часть; 3 — каркас; 4 — боковая часть; 5 — брекер; 6 — дополнительная вставка в плечевой зоне; 7 — бортовое кольцо; 8 — бортовая часть

Форма и механические свойства покрышки влияют на изменение мгновенной толщины срезаемого слоя a_z (за счет упругих отжатий) и соответственно на силу резания F , вследствие изменения площади S поперечного сечения срезаемого слоя. Помимо этого на мгновенную

толщину срезаемого слоя влияет и кинематика движения режущей пластины фрезы относительно поверхности обрабатываемого материала. В свою очередь, упругие смещения всей технологической системы, вызванные непостоянством силы резания, оказывают сильное влияние на кинематику движения режущих пластин фрезы. Блок-схема их взаимного влияния показана на рис. 4.

Рис. 4. Схема взаимного влияния кинематики и динамики технологической системы

Определение упругих отжатий технологической системы с учетом динамики процесса резания, уже было изучено [9]. Однако авторы рассмотрели обработку металлических изделий, жесткость которых значительно выше жесткости покрывки, и влияние упругих отжатий на изменение силы резания ими не учитывалось.

Представим технологическую систему станка (см. рис. 2) в виде набора масс на пружинках с параллельно установленным демпфером (рис. 5).

Рис. 5. Схема физической модели станка

На рис. 5 использованы следующие обозначения: F_x, F_y — проекции силы резания на координатные оси x, y ; α — коэффициент сопротивления; c — жесткость пружины; m_1 — масса фрезы с рамой и приводом; m_2 — масса части покрышки, воспринимающей динамическую нагрузку; m_3 — масса механизма зажима с башней.

Соотнесение номера массы и конструктивного элемента станка показано на рис. 2. Жесткость c и внутреннее трение α разложены по независимым осям координат x и y . Соответственно для каждой из осей масса m всех элементов продублирована. Колебания каждой элементарной массы рассматриваются в двух взаимно перпендикулярных направлениях, задаваемых осями x и y неподвижной системы координат.

Видно, что на рис. 5 приведены две одинаковые системы, расположенные ортогонально. На виде А между массами m_1 и m_2 показан схематичный разрыв, поскольку эти два элемента конструкции не связаны жестко между собой, а воздействуют друг на друга через точку контакта, в которой возникает сила резания F . Таким образом, каждая система состоит из двух более простых, разделенных точкой контакта. Одну половину системы составляет фреза m_1 со своим приводом и креплением, другую половину — локальный упругий элемент цилиндрической поверхности покрышки, массой которого можно пренебречь, более крупный макроэлемент покрышки с массой m_2 , имеющий свойства, отличные от локального, а также механизм крепления покрышки с массой m_3 .

Приведем физическую модель изображенную на рис. 2, к четырем отдельным моделям, показанным на рис. 6.

Рис. 6. Схема физической модели станка

На рис. 6 использованы следующие обозначения: $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ — смещение центров масс m_1, m_2, m_3 соответственно относительно положения равновесия; $x_{e.d.}, y_{e.d.}$ — смещение локального упругого элемента цилиндрической поверхности покрышки относительно положения равновесия.

Приняв, что сила резания F является функцией от мгновенной толщины a_z срезаемого слоя, скорости резания V , ширины срезаемого слоя b и времени t , запишем систему уравнений для моделей 1 и 3:

$$\begin{cases} F = f(a_z, b, V, t); \\ F_x = f(F); \\ F_y = \sqrt{F^2 - F_x^2}; \\ m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = F_x - \alpha_{01} \frac{dx_1}{dt} - c_{01} x_1; \\ m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = F_y - \alpha_{01} \frac{dy_1}{dt} - c_{01} y_1. \end{cases} \quad (1)$$

Модели 2 и 4 будут описываться более сложной системой, поскольку в каждой из них содержится уже 3 переменных, а не одна.

Полная система уравнений для модели 2:

$$\begin{cases} F = f(a_z, b, V, t); \\ F_x = f(F); \\ c_{12} x_{e.d.} = F_x - \alpha_{01} \left(\frac{dx_2}{dt} - V_x \right) - c_{12} x_2; \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \alpha_{12} \left(V_x - \frac{dx_2}{dt} \right) + c_{12} (x_{e.d.} - x_2) + \alpha_{23} \left(\frac{dx_3}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) + c_{23} (x_3 - x_2); \\ m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} = \alpha_{23} \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_3}{dt} \right) + c_{23} (x_2 - x_3) - c_{30} x_3 - \alpha_{30} \frac{dx_3}{dt}. \end{cases} \quad (2)$$

где V_x — проекция вектора скорости резания на ось x .

Для модели 4 система будет иметь аналогичный вид:

$$\begin{cases} F = f(a_z, b, V, t); \\ F_x = f(F); \\ F_y = \sqrt{F^2 - F_x^2}; \\ c_{12} y_{e.d.} = F_y - \alpha_{01} \left(\frac{dy_2}{dt} - V_y \right) - c_{12} y_2; \\ m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = \alpha_{12} \left(V_y - \frac{dy_2}{dt} \right) + c_{12} (y_{e.d.} - y_2) + \alpha_{23} \left(\frac{dy_3}{dt} - \frac{dy_2}{dt} \right) + c_{23} (y_3 - y_2); \\ m_3 \frac{d^2 y_3}{dt^2} = \alpha_{23} \left(\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_3}{dt} \right) + c_{23} (y_2 - y_3) - c_{30} y_3 - \alpha_{30} \frac{dy_3}{dt}. \end{cases} \quad (3)$$

где V_y — проекция вектора скорости резания на ось y .

Объединив системы уравнений (1), (2) и (3), получим общую систему уравнений математической модели технологической системы станка:

$$\left\{ \begin{array}{l} F = f(a_z, b, V, t); \\ F_x = f(F); \\ m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = F_x - \alpha_{01} \frac{dx_1}{dt} - c_{01} x_1; \\ c_{12} x_{e.d.} = F_x - \alpha_{01} \left(\frac{dx_2}{dt} - V_x \right) - c_{12} x_2; \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \alpha_{12} \left(V_x - \frac{dx_2}{dt} \right) + c_{12} (x_{e.d.} - x_2) + \alpha_{23} \left(\frac{dx_3}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) + c_{23} (x_3 - x_2); \\ m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} = \alpha_{23} \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_3}{dt} \right) + c_{23} (x_2 - x_3) - c_{30} x_3 - \alpha_{30} \frac{dx_3}{dt}; \\ F_y = \sqrt{F^2 - F_x^2}; \\ m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = F_y - \alpha_{01} \frac{dy_1}{dt} - c_{01} y_1; \\ c_{12} y_{e.d.} = F_y - \alpha_{01} \left(\frac{dy_2}{dt} - V_y \right) - c_{12} y_2; \\ m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = \alpha_{12} \left(V_y - \frac{dy_2}{dt} \right) + c_{12} (y_{e.d.} - y_2) + \alpha_{23} \left(\frac{dy_3}{dt} - \frac{dy_2}{dt} \right) + c_{23} (y_3 - y_2); \\ m_3 \frac{d^2 y_3}{dt^2} = \alpha_{23} \left(\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_3}{dt} \right) + c_{23} (y_2 - y_3) - c_{30} y_3 - \alpha_{30} \frac{dy_3}{dt}. \end{array} \right. \quad (4)$$

В системах (1), (2), (3) и (4) проекция силы F на ось x записана в виде функции $F_x = f(F)$. Найдем эту функцию.

Для этого используем два разных буквенных обозначения силы резания: F и P .

Силу резания, обозначенную буквой P , спроецируем на координатные оси по классической схеме, принятой в резании металлов (при фрезеровании). Для этого совместим начало декартовой системы координат с вершиной каждого отдельного зуба фрезы. На рис. 7 вершина зуба обозначена точкой A_1 . Ось x располагается параллельно оси вращения заготовки. В данном случае это ось вращения крышки, которая параллельна оси вращения фрезы. Ось z направлена по касательной к поверхности фрезы, т.е. совпадает с направлением вектора скорости фрезы $\vec{V}$. Ось y ортогональна осям x и z и проходит через центр вращения фрезы.

Таким образом силу резания P раскладываем на составляющие P_x , P_y и P_z (см. рис. 7):

1) P_z — тангенциальная составляющая (определяет собой мощность, затрачиваемую на процесс резания);

2) P_y — радиальная составляющая (направлена вдоль радиуса фрезы в точке соприкосновения зуба с деталью);

3) P_x — осевая составляющая (направлена параллельно оси вращения фрезы).

Сила P_x при использовании фрезы с прямым зубом равна нулю.

Рис. 7. Схема разложения силы резания по координатным осям

В данном случае использование координатных осей, принятых в резании металлов неудобно, поскольку усложняет расчеты. Поэтому примем, что центр координат совпадает с осью вращения покрывшек O_2 , а ось x проходит через центр координат и ось вращения фрезы O_1 . Ось y также проходит через центр координат O_2 и ортогональна оси x . Направления осей показаны на рис. 7. Проекции силы резания P на эти координатные оси обозначим как F_y и F_x ($F = P$).

Фреза 1 (см. рис. 7) вращается с угловой скоростью ω_1 . Угловое положение одного отдельно взятого зуба фрезы обозначим как φ_1 .

Введем угол α_1 значение которого определяется выражением:

$$\alpha_1 = 180^\circ - (\varphi_1 - 360^\circ \cdot n), \quad \varphi_1 \in [0; +\infty],$$

где n — количество целых оборотов фрезы.

Введем угол β_1 между P и P_y . Тогда тангенс этого угла будет равен:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{P_z}{P_y}.$$

Соответственно значение угла β_1 будет равно:

$$\beta_1 = \operatorname{arctg} \beta_1 = \operatorname{arctg} \frac{P_z}{P_y}.$$

Пропорция между P_z и P_y определяется экспериментально.

Введем угол γ_1 между P и F_x . Значение угла γ_1 будет равно $\beta_1 - |\alpha_1|$. Это достаточно легко увидеть из рис. 7. Определим значение F_x :

$$\begin{cases} F_x = P \cos \gamma_1 = P \cos(\beta_1 - |\alpha_1|); \\ P = F = f(a_z, b, V, t); \\ \alpha_1 = 180^\circ - (\varphi_1 - 360^\circ \cdot n); \\ \beta_1 = \operatorname{arctg} \frac{P_z}{P_y}. \end{cases}$$

Уточним параметры покрышки. Выделим радиальную (нормальную) жесткость c_n и касательную c_τ (рис. 8). То же самое сделаем для сопротивления α .

Рис. 8. Модель покрышки

Значение угла α_2 для покрышек типа «КАМАЗ», при максимальной глубине резания, не превышает 5° , а для легковых 8° . Поэтому примем, что нормальная жесткость постоянно совпадает по направлению с осью x , тангенциальная с осью y в любой точке контакта. Для сопротивления α аналогично.

Получим, что жесткости из выражения (4) будут определяться системой

$$\begin{cases} c_{12x} = c_{12n}; \\ c_{12y} = c_{12\tau}; \\ c_{23x} = c_{23n}; \\ c_{23y} = c_{23\tau}. \end{cases}$$

Для сопротивления α получим систему

$$\begin{cases} \alpha_{12x} = \alpha_{12n}; \\ \alpha_{12y} = \alpha_{12\tau}; \\ \alpha_{23x} = \alpha_{23n}; \\ \alpha_{23y} = \alpha_{23\tau}. \end{cases}$$

Теперь составим уравнение расчета величины силы резания в зависимости от толщины срезаемого слоя a_z , направления скорости резания V и ширины срезаемого слоя b . Для упрощения задачи примем, что обрабатываемый материал однороден.

При измельчении покрышек используется крупногабаритная цилиндрическая фреза диаметром 300 мм, длиной 610 мм и массой 160 кг (рис. 9). В конструкции фрезы используются

твердосплавные пластины специальной конструкции, с треугольными зубчиками по краям (рис. 10). Пластины устанавливаются таким образом, что передний и задний угол равны 0° . По фрезе пластины распределены в шахматном порядке, но условие постоянства площади поперечного сечения срезаемого слоя не соблюдается.

Рис. 9. Общий вид фрезы применяемой для измельчения покрышек

Рис. 10. Общий вид зуба фрезы

В известной литературе отсутствуют данные по механической обработке резины, однако имеются сведения [1] по обработке пластмасс и высокопрочных композиционных полимеров [12], которые по некоторым своим свойствам (анизотропия, сильные упругие деформации, низкая плотность, прочность, теплопроводность и теплостойкость по сравнению с металлами) схожи с резиной.

При механической обработке пластмасс и прочих полимеров выделяются несколько особенностей, отличающих процесс их резания от процесса резания металлов. Так, в процессе резания часть срезаемого слоя, которая подминается под заднюю поверхность режущего инструмента, упруго деформируется, а затем упруго восстанавливается на величину h [1, с. 11]. Это вызвано высокими упругими характеристиками обрабатываемого материала [12, с. 19].

Упругие деформации приводят к увеличенным площадкам контакта и как следствие к тому, что сила, действующая на заднюю поверхность резцов P_y , составляет от 70 до 95% значений силы P_z , а при плохо заточенном инструменте превышает ее в 1,25–1,5 раза [1, с. 13]. Поэтому в общем случае можно принять, что сила P_z равна силе P_y .

Следующей закономерностью являются низкие значения сил резания в сравнении с металлами, вследствие более низкой прочности и твердости [1, с. 13]. Эти силы при обработке полимерных материалов в 10–20 раз ниже [12, с. 19], чем при аналогичной обработке металлов, а упругость выше. В данном случае обрабатывается не только резина, но и металлокорд. Однако из-за сложности учета металлокорда, в предлагаемой модели он не учитывается.

График зависимости силы резания от толщины срезаемого слоя a_z , представляет собой параболу [10, с. 104–105]. Поэтому функциональную зависимость силы резания от толщины

срезаемого слоя a_z удобно выразить степенным уравнением [11, с. 59–60]:

$$P = c_1 a_z^x$$

где c_1 — коэффициент пропорциональности, который можно определить при $a = 1$ мм; показатель степени x и коэффициент пропорциональности c_1 являются константами.

График зависимости силы резания от ширины фрезерования b представляет собой прямую, причем эта прямая проходит через центр координат [11, с. 59–60]. Такую зависимость можно также представить степенным уравнением:

$$P = c_2 b^y$$

где c_2 — коэффициент пропорциональности, который можно определить при $b = 1$ мм, $c_2 = \text{const}$; показатель степени $y = 1$.

Зависимость силы резания от скорости нелинейна и ее часто выражают степенной функцией [10, с. 105–106], [11, с. 60]:

$$P = c_{V_i} V^{n_i}$$

где c_{V_i} — коэффициент пропорциональности, для отдельного i -го скоростного интервала; n_i — показатель степени i -го скоростного интервала.

Если ввести единичную силу резания P_0 , для заданной единичной толщины $a_{z0} = 1$ мм и ширины срезаемого слоя $b_0 = 1$ мм, то, умножая эту силу на текущую ширину b и толщину a_z в степени x , можно с некоторой точностью достоверно описывать изменение мгновенной силы резания, при постоянной скорости резания:

$$P = P_0 c_1 c_2 b a_z^x.$$

Добавив степенную функцию зависимости силы от скорости, получим выражение:

$$P = P_0 c_1 c_2 c_{V_i} b a_z^x V^{n_i}. \quad (5)$$

Для вычисления силы резания P необходимо экспериментально определить значение степени x (для металлов $x = 0,75$) и параметры c_1 , c_2 , для единичной толщины a_z и ширины b . Для вывода зависимости силы резания от скорости необходимо выделить ряд скоростных интервалов и произвести измерения V^{n_i} и c_{V_i} при неизменной подаче на зуб s_z и глубине фрезерования T .

Произведение $b a_z$ — площадь срезаемого слоя S . Поскольку сила резания P нелинейно зависит от a_z , в расчетах удобнее использовать приведенную площадь $S' = b a_z^x$. Однако сначала определим зависимость площади срезаемого слоя S от толщины a_z .

Из рис. 10 видно, что зуб фрезы имеет сложную форму, что влияет на площадь S , которая контактирует с обрабатываемым материалом. Эта площадь плавно изменяется от нуля и до некоторого максимума $S_{\max}$ (при максимальной толщине срезаемого слоя $a_{z\max}$, рис. 11).

Рис. 11. Форма зуба фрезы

Найдем зависимость параметров h' , w' и w от h , L , угла α и количества зубчиков (больших и маленьких). На образце достаточно точно можно измерить лишь три параметра: L , h и угол α . Они равны 26 мм, 4,5 мм и 60° соответственно. Угол α одинаков для всех зубчиков. Остальные размеры вычислим аналитически.

Определим зависимость w от h и угла α :

$$w = h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Вычислим значение w при $h = 4,5$ мм и $\alpha = 60^\circ$:

$$w = 4,5 \operatorname{tg} \frac{60^\circ}{2} = 2,5980.$$

Составим выражение для w' относительно h' :

$$w' = h' \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (6)$$

Определим значение L , через h и h' :

$$L = 4w + 14w' = 4h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 14h' \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (7)$$

Из полученного выражения (7) выразим h' :

$$h' = \frac{L - 4h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{14 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}. \quad (8)$$

Вычислим значение h' при $L = 26$ мм, $h = 4,5$ мм и $\alpha = 60^\circ$:

$$h' = \frac{26 - 4 \cdot 4,5 \cdot \operatorname{tg} \frac{60^\circ}{2}}{14 \cdot \operatorname{tg} \frac{60^\circ}{2}} = 1,9312.$$

Аналогично выразим w' через h , используя выражения (6) и (8):

$$w' = \frac{L - 4h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{14 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Вычислим значение w' при $L = 26$ мм, $h = 4,5$ мм и $\alpha = 60^\circ$:

$$w' = \frac{26 - 4 \cdot 4,5 \cdot \operatorname{tg} \frac{60^\circ}{2}}{14 \operatorname{tg} \frac{60^\circ}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{60^\circ}{2} = 1,1149.$$

Определим функциональную зависимость S от толщины срезаемого слоя a_z . Для этого поделим максимальную толщину срезаемого слоя $a_{z \max}$ на участки (см. рис. 11). На этих участках закон изменения функции будет разным, поскольку изменяется количество зубчиков и их размер. Всего их шесть: I, II, IIIa, IIIb, IVa и IVb. Однотипные участки обозначены одинаковой буквой.

Для участка I функция зависимости S от a_z будет иметь вид:

$$S_I = 2a_z^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad a_z \in [0; h - h'].$$

Для участка II:

$$S_{II} = 2a_z^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 5(a_z - (h - h'))^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad a_z \in [h - h'; h].$$

Для участка IIIa:

$$S_{IIIa} = S_{II} + L(a_z - h) + (a_z - h)^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad a_z \in [h; h + w'].$$

Для участка IIIb:

$$S_{IIIb} = S_{IIIa} + L(a_z - h - w') + \left((a_z - h - w')h' - (a_z - h - w')^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right), \quad a_z \in [h + w'; h + 2w'].$$

Для участка IVa:

$$S_{IVa} = S_{IIIb} + L(a_z - h - 2w') + (a_z - h - 2w')^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad a_z \in [h + 2w'; h + 3w'].$$

Для участка IVb:

$$S_{IVb} = S_{IVa} + L(a_z - h - 3w') + (a_z - h - 3w')^2 - \frac{(a_z - h - 3w')^2}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \quad a_z \in [h + 3w'; h + 4w'].$$

Построим график изменения площади S от толщины a_z . Можно заметить, что это будет набор парабол, так как функции площадей квадратичные. Максимальная толщина срезаемого слоя $a_{z \max}$ при врезании составляет 5–6 мм. Для построения графика эта величина взята с запасом и равна 9 мм. График показан на рис. 12.

Из графика видно, что есть две основные зоны резания. До глубины 4,5 мм площадь срезаемого слоя растет умеренно, а после практически прямопропорционально глубине срезаемого слоя a_z . Видно, что боковые зубчики не оказывают значительного влияния на площадь S , поэтому их можно исключить из анализа. В результате получим эквивалентную форму зуба фрезы, показанную на рис. 13.

Рис. 12. График изменения площади срезаемого слоя S от его толщины a_z

Рис. 13. Эквивалентная форма зуба фрезы

Составим формулы для вычисления приведенной площади S' в зависимости от глубины резания a_z .

Для участка I:

$$S' = 4 \int \left(\frac{w}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right)^x dw = \frac{4w^{x+1}}{(x+1) \operatorname{tg}^x \frac{\alpha}{2}} + C. \quad (9)$$

где $w = a_z \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $a_z \in [0; h - h']$; $x = \text{const}$; $\alpha = \text{const}$.

При $a_z = 0$ $S' = 0$. Получим, что $C = 0$. Выражение (9) примет вид:

$$S' = \frac{4 \left(a_z \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^{x+1}}{(x+1) \operatorname{tg}^x \frac{\alpha}{2}} = \frac{4a_z^{x+1} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{x+1}. \quad (10)$$

Поскольку значение показателя степени x пока неизвестно, оставляем выражение (10) без дальнейших преобразований.

Для участка II:

$$S' = 4 \int \left(\frac{w}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right)^x dw + 10 \int \left(\frac{w'}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right)^x dw'. \quad (11)$$

Проинтегрировав выражение (11) получим:

$$S' = 4 \frac{w^{x+1}}{(x+1) \operatorname{tg}^x \frac{\alpha}{2}} + 10 \frac{w'^{x+1}}{(x+1) \operatorname{tg}^x \frac{\alpha}{2}} + C. \quad (12)$$

где $w = a_z \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $w' = (a_z - (h - h')) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $a_z \in [h - h'; h]$; $x = \text{const}$; $\alpha = \text{const}$.

При $a_z = h - h'$ выражение (12) примет вид выражения (9). В результате вычислений получим, что $C = 0$ и выражение (12) примет вид:

$$S' = 4 \frac{a_z^{x+1} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{x+1} + 10 \frac{(a_z - (h - h'))^{x+1} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{x+1}. \quad (13)$$

Для участка III:

$$S' = 4 \int \left(\frac{w}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} + K \right)^x dw + 10 \int \left(\frac{w'}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} + K \right)^x dw'. \quad (14)$$

Проинтегрировав выражение (14) получим:

$$S' = 4 \frac{\left(\frac{w}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} + K \right)^{x+1} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{x+1} + 10 \frac{\left(\frac{w'}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} + K \right)^{x+1} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{x+1} + C.$$

где $w = a_z \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $w' = (a_z - (h - h')) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $K = a_z - h$, $a_z \in [h; h + 4w']$; $x = \text{const}$; $\alpha = \text{const}$.

После замены w , w' и K получим:

$$S' = 4 \frac{(2a_z - h)^{x+1} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{x+1} + 10 \frac{(2a_z + h' - 2h)^{x+1} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{x+1} + C. \quad (15)$$

При $a_z = h$ выражение (15) примет вид выражения (13). В результате вычислений получим, что $C = 0$ и выражение (15) примет вид:

$$S' = 4 \frac{(2a_z - h)^{x+1} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{x+1} + 10 \frac{(2a_z + h' - 2h)^{x+1} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{x+1}.$$

В конечном итоге получим систему

$$\begin{cases} S' = 4 \frac{a_z^{x+1} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{x+1}, & a_z \in [0; h - h']; \\ S' = 4 \frac{a_z^{x+1} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{x+1} + 10 \frac{(a_z - (h - h'))^{x+1} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{x+1}, & a_z \in [h - h'; h]; \\ S' = 4 \frac{(2a_z - h)^{x+1} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{x+1} + 10 \frac{(2a_z + h' - 2h)^{x+1} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{x+1}, & a_z \in [h; h + 4w']. \end{cases}$$

Выражение (5) для расчета силы резания преобразовываем к виду:

$$P = P_0 c_1 c_2 c_{V_i} S' V_i^{n_i}.$$

Полученная сила P — сила резания возникающая от одного зуба фрезы. Поскольку зубья располагаются на фрезе рядами, для нахождения суммарной силы резания необходимо умножить силу резания от одного зуба на количество зубьев в ряду.

Теперь рассмотрим влияние кинематики технологической системы на мгновенную толщину срезаемого слоя a_z . Фреза и покрывка вращаются навстречу друг другу. Фреза имеет угловую скорость ω_1 , а покрывка ω_2 . Глубину фрезерования обозначим T . Для расчетов примем, что покрывка зафиксирована и не вращается. Ее угловую скорость ω_2 прибавим к фрезе, которая будет вращаться с этой скоростью вокруг оси вращения покрывки. Таким образом, зуб фрезы, по отношению к наружной цилиндрической поверхности покрывки, будет описывать в пространстве эпитрохиду (рис. 14).

Рис. 14. Траектория движения зуба фрезы относительно покрывки

Кинематика движения фрезы, обрабатываемой покрывки, а также упругие смещения технологической системы тесно связаны с динамикой. В данном случае нельзя рассматривать отдельно кинематику или отдельно динамику, так как в каждый отдельно взятый момент времени они вносят изменения в поведение друг друга.

Параметрами связывающими динамику и кинематику будут $x_1, x_2, x_3, x_{e.d.}, y_1, y_2, y_3$ и $y_{e.d.}$, т.е. упругие смещения.

В динамической части модели все смещения технологической системы происходят вдоль осей координат, показанных на рис. 5.

В кинематической части модели, при расчете траектории движения зуба фрезы относительно поверхности обрабатываемого материала приняли, что покрывка остается неподвижной, а центр фрезы O_1 вращается вокруг центра покрывки O_2 . Соответственно для переноса упругих смещений из динамической части в кинематическую необходимо, чтобы координатные оси вращались синхронно с центром фрезы, относительно центра покрывки. Примем, что координатные оси x, y — исходные и неподвижные, а оси x', y' — производные и вращаются со скоростью ω_2 относительно исходных.

Рассмотрим движение одного зуба фрезы, как наиболее простое и наглядное. В его движении можно выделить два состояния:

- 1) свободное — зуб фрезы движется не соприкасаясь с обрабатываемым материалом;
- 2) внедренное — зуб фрезы движется внутри обрабатываемого материала (резание).

На рис. 15 показано свободное состояние. Центр покрывки O_2 в начальный момент времени $t_0 = 0$ имеет координаты (x_{O_2}, y_{O_2}) по осям x и y . Начальные значения координат принимаем равными нулю:

$$x_{O_2} = 0; \quad y_{O_2} = 0. \quad (16)$$

Центр фрезы O_1 в начальный момент времени располагается на некотором расстоянии R от покрывки

$$R = r_1 + r_2 - T = \sqrt{(x_{O_1} + x_{O_2})^2 + (y_{O_1} + y_{O_2})^2},$$

где r_1 — радиус фрезы; r_2 — радиус покрывки в свободном состоянии; T — глубина резания; x и y — координаты точек по соответствующим осям координат; R — расстояние между точками O_1 и O_2 .

Координаты центра фрезы $O_1 (x_{O_1}, y_{O_1})$, в любой произвольный момент времени, будут определяться системой уравнений:

$$\begin{cases} x_{O_1} = R \cos \varphi_2; \\ y_{O_1} = R \sin \varphi_2; \\ \varphi_2 = \omega_2 t_1 + \varphi_{20}. \end{cases}$$

где φ_{20} — начальное значение угла φ_2 .

Данная система уравнений описывает движение точки O_1 по окружности. Движение режущей кромки зуба A_1 вокруг центра вращения фрезы O_1 , также представляет собой окружность:

$$\begin{cases} x_{A_1} = R \cos \varphi_1; \\ y_{A_1} = R \sin \varphi_1; \\ \varphi_1 = \omega_1 t_1 + \varphi_{10}. \end{cases} \quad (17)$$

где φ_{10} — начальное значение угла φ_1 .

Рис. 15. Первая фаза движения зуба фрезы относительно покрывки

Совместив системы (16) и (17), получим систему, описывающую движение кромки зуба (точка A_1) относительно центра покрывки O_2 :

$$\begin{cases} x_{A_1} = r_1 \cos \varphi_1 + x_{O_1} + x_{O_2}; \\ y_{A_1} = r_1 \sin \varphi_1 + y_{O_1} + y_{O_2}; \\ \varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_{10}. \end{cases}$$

На рис. 16 показана начальная фаза внедренного состояния, когда кромка зуба только вошла в заготовку и сила резания еще не успела сформироваться в ответ на это воздействие. Упругие смещения технологической системы не показаны, поскольку их еще нет. Кинематика движения осталась прежней и уравнения не изменились, однако образовался срезаемый слой толщиной $a_z = A_2 A'_1$, начальное значение которой близко к нулю. Найдём a_z .

Уравнение отрезка прямой от центра фрезы O'_1 к точке на режущей кромке A'_1 имеет вид: $(y_{O'_1} - y_{A'_1})x + (x_{A'_1} - x_{O'_1})y + (x_{O'_1}y_{A'_1} - x_{A'_1}y_{O'_1}) = 0$, где x и y — координаты точек прямой.

Рис. 16. Вторая фаза движения зуба фрезы относительно покрывки

В общем случае точек пересечения прямой с окружностью может быть 2, 1 или 0. В каждом временном интервале выбираем решение только с двумя точками, где одна из точек (точка A_2) принадлежит интервалам (x_{O_1}, x_{A_1}) по оси x и (y_{O_1}, y_{A_1}) по оси y . Вторую точку отбрасываем.

Уравнение окружности в декартовых координатах имеет вид: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Для нахождения координат точки A_2 необходимо решить систему:

$$\begin{cases} (x_{A_2} - x_{O_2})^2 + (y_{A_2} - y_{O_2})^2 = r_2^2; \\ y_{A_2} = -\frac{(Ax_{A_2} + C)}{B}; \\ A = y_{O'_1} - y_{A'_1}; \\ B = x_{A'_1} - x_{O'_1}; \\ C = y_{O'_1}y_{A'_1} - x_{A'_1}x_{O'_1}; \\ x_{A_2} \in [x_{O'_1}; x_{A'_1}]; \\ y_{A_2} \in [y_{O'_1}; y_{A'_1}]. \end{cases}$$

Общий вид решения этой системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{A_2} = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - 4KM}}{2K}; \\ y_{A_2} = -\frac{(Ax_{A_2} + C)}{B}; \\ K = A^2 + B^2; \\ L = 2AC + 2AB y_{O_2} - 2B^2 x_{O_2}; \\ M = C^2 + 2CB y_{O_2} + B y_{O_2}^2 - B^2 r_2^2 + B^2 x_{O_2}^2; \\ A = y_{O'_1} - y_{A'_1}; \\ B = x_{A'_1} - x_{O'_1}; \\ C = y_{O'_1} y_{A'_1} - x_{A'_1} x_{O'_1}; \\ x_{A_2} \in [x_{O'_1}; x_{A'_1}]; \\ y_{A_2} \in [y_{O'_1}; y_{A'_1}]. \end{array} \right.$$

Теперь можно вычислить длину отрезка $A_2A'_1$, который и является мгновенной толщиной срезаемого слоя:

$$A_2A'_1 = \sqrt{(x_{A_2} - x_{A'_1})^2 + (y_{A_2} - y_{A'_1})^2} = a_z. \quad (18)$$

На рис. 17 показана следующая фаза внедренного состояния, когда сила резания начала формироваться и воздействовать на технологическую систему. В системе начинаются интенсивные изменения, как в кинематике, так и в динамике.

С учетом упругих смещений получим, что координаты центра покрышки O_2 станут O'_2 ($x_{O'_2}, y_{O'_2}$)

$$x_{O'_2} = x_3; \quad y_{O'_2} = y_3.$$

где x_3 и y_3 — величина упругой деформации механизма зажима покрышки по осям x и y соответственно. Эти значения берутся из системы уравнений математической модели станка (4).

Наружный радиус покрышки r_2 , после упругой деформации в месте контакта с зубом фрезы, станет равным:

$$r'_2 = \sqrt{(r_2 + x_2 + x_{e.d.})^2 + (r_2 + y_2 + y_{e.d.})^2},$$

где x_2, y_2 — величины упругой деформации формы покрышки по осям x и y соответственно; $x_{e.d.}, y_{e.d.}$ — величины упругой деформации поверхностного слоя покрышки по осям x и y .

Центр фрезы, под действием силы резания, сместится на величину x_1, y_1 и займет положение с координатами:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{O''_1} = R \cos \varphi_2 + x_1; \\ y_{O''_1} = R \sin \varphi_2 + y_1; \\ \varphi''_2 = \omega_2 t_3 + \varphi_{20}. \end{array} \right.$$

В результате упругих смещений и деформаций, расстояние R также изменится и станет равным R' :

$$R' = \sqrt{(x_{O''_1} + x_{O'_2})^2 + (y_{O''_1} + y_{O'_2})^2},$$

Рис. 17. Третья фаза движения зуба фрезы относительно покрывки

Уравнение движения кромки зуба A_1 , с учетом упругих смещений покрывки и фрезы, примет вид:

$$\begin{cases} x_{A_1''} = r_1 \cos \varphi_1 + x_{O_1''} + x_{O_2'}; \\ y_{A_1''} = r_1 \sin \varphi_1 + y_{O_1''} + y_{O_2'}; \\ \varphi_1'' = \omega_1 t_3 + \varphi_{10}. \end{cases}$$

Жесткость фрезы значительно выше жесткости технологической системы станка, поэтому принимаем ее абсолютно жесткой, с неизменным наружным диаметром r_1 . Толщину срезаемого слоя определяем с использованием формулы (18).

3. Заключение

В результате проделанной работы, получена математическая модель процесса формирования силы резания при фрезеровании автомобильной покрывки, с учетом кинематики и динамики технологической системы станка. Ряд параметров полученной модели необходимо определить экспериментально. Из-за отсутствия этих данных, в статье не приводятся результаты моделирования.

Необходимо отметить, что предложенный метод расчета мгновенной толщины срезаемого слоя, подходит только для процесса резания, при котором каждый зуб фрезы врезается в необработанную часть покрышки.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика: учеб. пособие для университетов. В 10 т. Т. 1. Механика. 4-е изд., испр. М.: Наука, 1988. 215 с.
2. Сайт «За рулем». Режим доступа: <http://www.zr.ru/a/350201> (дата обращения 08.10.2012).
3. Рециклинг отходов: специализированный информационно-аналитический журнал. 2009. № 3. 31 с. Режим доступа: <http://www.wasterecycling.ru/resources/itf5e1d16ff96d11db99dbccf722b65740/b0e8da3d9af24f9ea523943d8c043e3d.pdf> (дата обращения 08.10.2012).
4. МБУ «Управление экологии города Чебоксары». Утилизация автомобильных покрышек. Мировой опыт. Режим доступа: <http://gov.cap.ru/hierarhy.asp?page=/.515378/520381/520477/563097//570041> (дата обращения 08.10.2012).
5. Colesa.ru: шинный портал. «Сибур» проанализировал проблему утилизации шин в России. Режим доступа: <http://sibur.colesa.ru/news/10449.html> (дата обращения 08.10.2012).
6. Денисов Л.Н., Игнатов В.Д., Мкртчян С.Р., Прохоров В.В. Способ переработки изношенных покрышек: пат. 2325996 Российская Федерация. № 2006124603/12: заявл. 10.07.06; опубл. 10.06.2008. Бюл. № 16.
7. Гольдшмидт М.Г., Козарь Д.М., Темиров А.Г., Вендров З.И. Устройство для утилизации отработанных шин: пат. 104511 Рос. Федерация. № 2010149939/05: заявл. 07.12.10; опубл. 20.05.2011. Бюл. № 14.
8. Козарь Д.М., Крауиньш П.Я. Математическая модель станка для утилизации автомобильных покрышек фрезерованием // V Международная конференция «Проблемы механики современных машин» (Улан-Удэ, 25–30 июня 2012 г.): материалы. Т. 1. Улан-Удэ: Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, 2012. С. 213–216.
9. Пашинин А.В., Чернышев Е.А. Определение упругого отжатия при резании металла с учетом динамики процесса. Режим доступа: <http://masters.donntu.edu.ua/2012/fimm/pashinin/library/article7.htm> (дата обращения 10.03.13).
10. Штучный Б.П. Механическая обработка пластмасс. М.: Машиностроение, 1987. 152 с.
11. Грановский Г.И. Резание металлов. М.: Высшая школа, 1985. 304 с.
12. Рубинштейн С.А. Основы учения о резании металлов и режущий инструмент. М.: Машиностроение, 1968. 393 с.
13. Степанов А.А. Обработка резанием высокопрочных композиционных полимерных материалов. Ленинград: Машиностроение, 1987. 175 с.

Kinematics and dynamics of formation of cutting forces during milling of an elastic shell

04, April 2013

DOI: 10.7463/0413.0541767

Kozar D. M., Krauinsh P. J.

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russian Federation

kozardima@gmail.com

peterkrau@tpu.ru

Nowadays small plants for tire recycling based on milling and with an annual consumption of raw materials up to 5000 tons are widespread in Russia. The authors research the problem of extreme vibrations in such equipment when used tires are disposed. Analysis is based on the developed setup and its prototype. This article describes the main causes of these vibrations, their adverse effects, as well as an example of a mathematical model of the process, which takes into account parameters of the technological system, mutual influence of the cutting tool kinematics and dynamics of the cutting force formation.

References

1. Landau L.D., Livshic E.M. *Teoreticheskaja fizika. V 10 t. T. 1. Mehanika* [Theoretical physics. In 10 vols. Vol. 1. Mechanics]. Moscow, Nauka, 1988. 215 p.
2. *Sajt «Za rulem»* [Website “Driving”]. Available at: <http://www.zr.ru/a/350201>, accessed 08.10.2012.
3. *Recikling othodov: specializirovannyj informacionno-analiticheskij zhurnal* [Waste Recycling: a specialized information and analytical magazine], 2009, no. 3. 31 p. Available at: <http://www.wasterecycling.ru/resources/itf5e1d16ff96d11db99dbccf722b65740/b0e8da3d9af24f9ea523943d8c043e3d.pdf>, accessed 08.10.2012.
4. *MBU «Upravlenie jekologii goroda Cheboksary»*. *Utilizacija avtomobil'nyh pokryshek. Mirovoj opyt* [Ecology Department of Cheboksary city. Utilization of car tires. World experience]. Available at: <http://gov.cap.ru/hierarhy.asp?page=515378/520381/520477/563097/570041>, accessed 08.10.2012.

5. Colesa.ru: *shinnyj portal*. «Sibur» *proanaliziroval problemu utilizacii shin v Rossii* [Colesa.ru: tire portal. “Sibur” analyzed the problem of recycling of tires in Russia]. Available at: <http://sibur.colesa.ru/news/10449.html>, accessed 08.10.2012.
6. Denisov L.N., Ignatov V.D., Mkrtchjan S.R., Prohorov V.V. *Sposob pererabotki iznoshennyh pokryshek* [Method of utilization of the worn out tires]. Patent RF, no. 2325996. 2008.
7. Gol'dshmidt M.G., Kozar' D.M., Temirov A.G., Vendrov Z.I. *Ustrojstvo dlja utilizacii otrabotannyh shin* [Device for utilization of the worn out tires]. Patent RF, no. 104511. 2011.
8. Kozar' D.M., Krauin'sh P.Ja. Matematicheskaja model' stanka dlja utilizacii avtomobil'nyh pokryshek frezerovaniem [Mathematical model of the machine for utilization car tires by milling]. 5 *Mezhdunarodnaja konferencija «Problemy mehaniki sovremennyh mashin»: materialy* [5th International Conference “Problems of Mechanics of modern machines”: proc.], Ulan-Udje, 25–30 June 2012. Vol. 1, Ulan-Udje, East Siberia State University of Technology and Management Publ., 2012, pp. 213–216.
9. Pashinin A.V., Chernyshev E.A. *Opreделение упруого отжатиа при резании металла с учетом динамики протсесса* [Determination of the elastic deformation in metal cutting taking into account dynamics of cutting process]. Available at: <http://masters.donntu.edu.ua/2012/fimm/pashinin/library/article7.htm>, accessed 10.03.2013.
10. Shtuchnyj B.P. *Mehanicheskaja obrabotka plastmass* [Mechanical processing of plastics]. Moscow, Mashinostroenie, 1987. 152 p.
11. Granovskij G.I. *Rezanie metallov* [Cutting of metals]. Moscow, Vysshaja shkola, 1985. 304 p.
12. Rubinshtejn S.A. *Osnovy uchenija o rezanii metallov i rezhushhij instrument* [Fundamentals of metal cutting and cutting tool]. Moscow, Mashinostroenie, 1968. 393 p.
13. Stepanov A.A. *Obrabotka rezaniem vysokoprochnyh kompozicionnyh polimernyh materialov* [Machining by cutting of high-strength composite polymer materials]. Leningrad, Mashinostroenie, 1987. 175 p. .