О проблеме сопряженности в подпрямых произведениях

04, апрель 2013

DOI: 10.7463/0413.0554654

Куликова О. В.

УДК 512.54.05

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

olga.kulikova@mail.ru

Введение

Пусть $F = F(A)$ — свободная группа, порожденная конечным алфавитом A . Пусть N_1 (соотв., N_2) — нормальное замыкание конечного непустого множества R_1 (соответственно R_2) элементов в F . Считаем, что множества $R_i, i = 1, 2$, симметризованны, т.е. все элементы множеств R_i циклически приведены и для каждого $r \in R_i$ все циклические перестановки элементов r и r^{-1} также лежат в R_i .

Будут использоваться следующие обозначения. Графическое (побуквенное) равенство слов $u, v \in F$ будет обозначаться $u \equiv v$. Свободное равенство будет обозначаться $u = v$.

В данной работе рассматривается вопрос, какие условия на R_1 и R_2 являются достаточными для разрешимости проблемы сопряженности в $F/N_1 \cap N_2$.

Отметим, что данная задача естественным образом связана с подпрямыми произведениями. Напомним, что H называется *подпрямым произведением* групп G_1 и G_2 , если H является подгруппой прямого произведения $G_1 \times G_2$, которая сюръективно проецируется на каждый множитель. Рассматривая $F/N_1 \cap N_2$ как подгруппу прямого произведения групп F/N_1 и F/N_2 , можно показать, что $F/N_1 \cap N_2$ является подпрямым произведением групп F/N_1 и F/N_2 . И наоборот, для любого подпрямого произведения H некоторых групп G_1 и G_2 существуют нормальные подгруппы N_1 и N_2 в некоторой свободной группе F , такие, что $F/N_i \cong G_i$ ($i = 1, 2$) и $F/N_1 \cap N_2 \cong H$.

Возникает естественный вопрос, следует ли разрешимость проблемы сопряженности в $F/N_1 \cap N_2$ из разрешимости проблемы сопряженности в F/N_1 и F/N_2 .

Этот вопрос для подпрямых произведений некоторых групп уже рассматривался ранее. Так, К.Ф. Миллер [1] доказал, что существует подпрямое произведение $H \leq F \times F$, в котором проблема сопряженности не разрешима. Г. Баумслаг, М.Р. Бридсон, К.Ф. Миллер и Х. Шот [2] доказали, что существует свободная от кручения гиперболическая группа Γ

и конечно представленная подгруппа $H \leq \Gamma \times \Gamma$, такие, что проблема сопряженности в H не разрешима. М.Р. Бридсон и К.Ф. Миллер [3] доказали, что если G является прямым произведением свободных групп и групп поверхностей, то в любой конечно представленной подгруппе группы G разрешима проблема сопряженности.

Данная работа является продолжением работ [4, 5].

1. Формулировки и доказательства

Для полноты изложения напомним необходимые определения и формулировки (см. [4]).

Пусть N — нормальное замыкание симметризованного множества R слов в свободной группе $F(A)$.

Картинкой P над копредставлением $\hat{G} = \langle A \mid R \rangle$ на ориентированной поверхности T называется конечный набор вершин $V_1, \dots, V_n \in T$ вместе с конечным набором простых связанных попарно непересекающихся ориентированных ребер $E_1, \dots, E_m \in T \setminus (\{V_1, \dots, V_n\} \cup \partial T)$, помеченных словами из $F(A)$. При этом ребро может соединять две (возможно совпадающие) вершины, вершину и точку на ∂T или две различные точки на ∂T . Более того, некоторые ребра могут не иметь ни начала, ни конца и являться циклами, такие ребра будут называться ребрами-циклами.

Ниже в работе будут рассматриваться только такие пути на T , которые не проходят через вершины и пересекают ребра картинки P конечное число раз (более того, если путь пересекает ребро, то он действительно пересекает, а не просто касается его). При движении вдоль произвольного ориентированного пути γ в положительном направлении мы встречаем последовательность ребер $E_{i_1}, \dots, E_{i_k}$ с метками $g_{i_1}, \dots, g_{i_k}$ соответственно. Эти метки образуют слово $g_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}}$, где $\varepsilon_{i_j} \in \{1, -1\}$ — локальный индекс пересечения ребра E_{i_j} и пути γ . Это слово будет называться *словом вдоль пути* γ (или *меткой* γ) и обозначаться через $Lab^+(\gamma)$. Движение по γ в отрицательном направлении дает слово $Lab^-(\gamma) \equiv Lab^+(\gamma)^{-1}$.

Рассмотрим некоторую точку p на замкнутом пути γ , не лежащую ни на каком ребре картинки P . Слово, читаемое вдоль γ , начиная с точки p , будет обозначаться через $Lab_p^+(\gamma)$ или через $Lab_p^-(\gamma)$ в зависимости от направления движения вдоль γ . Меняя расположение точки p , мы получаем то же слово с точностью до циклической перестановки.

Для каждой вершины V картинки P рассмотрим окружность Σ малого радиуса с центром в V и точку $p \in \Sigma$, не принадлежащую никакому ребру картинки P . Слово $Lab_p^+(\Sigma)$ называется *меткой вершины* V . Для окончательного определения картинки над копредставлением $\hat{G} = \langle A \mid R \rangle$ на поверхности T остается потребовать, чтобы метки всех вершин в P принадлежали R .

Ниже мы будем рассматривать картинки на поверхности T , где T — тор (торические картинки) или диск (дисковые картинки).

В картинке на диске T *граничной меткой* картинки называется слово $Lab_{\bar{p}}^+(\bar{\Sigma})$, где $\bar{\Sigma}$ — окружность около границы диска ∂T , а $\bar{p}$ — точка на окружности $\bar{\Sigma}$, не принадлежащая ребрам.

Следующая лемма — хорошо известный факт, вытекающий из результатов [6] (теоремы 1.1 и лемма 1.2 гл. V) и двойственности.

Лемма 1. Непустое слово W в алфавите A представляет единицу в группе $\hat{G} = F/N$ тогда и только тогда, когда существует дисковая картинка над копредставлением $\langle A \mid R \rangle$ группы $\hat{G}$ с граничной меткой, равной W .

Диполем называются две различные вершины V_1 и V_2 картинки P , соединенные ребром, параллельно которому можно провести простой путь ψ , не пересекающий никакие ребра и не проходящий через вершины, соединяющий точки p_1 и p_2 на окружностях Σ_1 и Σ_2 вокруг этих вершин, так что $Lab_{p_1}^+(\Sigma_1) \equiv Lab_{p_2}^-(\Sigma_2)$.

Копредставление $\hat{G} = \langle A \mid R \rangle$ называется *аторическим* (см., например, [7]), если любая связная торическая картинка над копредставлением $\hat{G} = \langle A \mid R \rangle$, содержащая вершины, содержит диполь.

Подробнее с картинками и связанными с ними понятиями и утверждениями можно ознакомиться по работам [8, 9] и данным в них ссылкам.

В работе [4] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть F — свободная группа, порожденная конечным алфавитом A , N_1 и N_2 — нормальные замыкания конечных непустых симметризованных множеств R_1 и R_2 элементов в F соответственно. Предположим, что для групп $G_i = F/N_i$, $i = 1, 2$, и $G = F/N_1N_2$ выполняются следующие условия:

- а) в G_i разрешима проблема сопряженности;
- б) в G_i существует алгоритм, позволяющий по несократимому слову $x \in F$, $x \neq 1$, определить все такие $z \in F$, что $x \in \langle z \rangle$ в G_i , причем таких различных элементов z из G_i — конечное число;
- в) в G разрешима проблема вхождения в циклическую подгруппу;
- г) копредставление $G = \langle A \mid R_1 \cup R_2 \rangle$ является аторическим.

Тогда в $F/N_1 \cap N_2$ разрешима проблема сопряженности.

Отметим, что для непересекающихся R_1 и R_2 условие г) теоремы 1 обеспечивает равенство $N_1 \cap N_2 = [N_1, N_2]$ (см., например, [10, 11]).

Напомним определения малых сокращений $C(k)$ и $T(q)$ [6].

Предположим, что r_1 и r_2 — различные элементы из R , такие, что $r_1 \equiv bc_1$ и $r_2 \equiv bc_2$. В этом случае элемент b называется *куском относительно множества R* . Говорят, что *множество R удовлетворяет условию $C(k)$* , где k — некоторое натуральное число, если никакой элемент из R не является произведением менее, чем k кусков.

Пусть $3 \leq h < q$. Предположим, что $r_1, \dots, r_h$ — элементы из R , такие, что последовательные элементы не являются взаимно обратными. Если по крайней мере одно из

произведений $r_1 r_2, \dots, r_{h-1} r_h, r_h r_1$ приведено, то говорят, что множество R удовлетворяет условию $T(q)$.

Хорошо известен следующий результат П. Шупа [6, теорема 7.6].

Теорема 2. Пусть F — конечно порожденная свободная группа, R — конечное симметризованное непустое подмножество в F и N — нормальное замыкание множества R в F . Если R удовлетворяет одному из условий $C(6)$, $C(4)$ - $T(4)$ или $C(3)$ - $T(6)$, то в $G = F/N$ разрешима проблема сопряженности.

Из этого результата и результатов Н.В. Безверхнего [12], примененных к множествам с условием $C(6)$, вытекает следующая теорема [4] (в формулировке теоремы используются обозначения из теоремы 1).

Теорема 3. Если множество $R_1 \cup R_2$ удовлетворяет условию $C(6)$ и копредставление $G = \langle A \mid R_1 \cup R_2 \rangle$ является аторическим, то в группе $F/N_1 \cap N_2$ разрешима проблема сопряженности.

Теперь рассмотрим множества с условием $C(4)$ - $T(4)$ ($C(3)$ - $T(6)$). В обозначениях теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 4. Если множество $R_1 \cup R_2$ удовлетворяет условию $C(4)$ - $T(4)$ или $C(3)$ - $T(6)$ и копредставление $G = \langle A \mid R_1 \cup R_2 \rangle$ является аторическим, то в группе $F/N_1 \cap N_2$ разрешима проблема сопряженности.

Доказательство. Сформулированная теорема 4 вытекает из теоремы 1. Покажем это. Так как множество $R_1 \cup R_2$ удовлетворяет условию $C(4)$ - $T(4)$ или $C(3)$ - $T(6)$, тому же условию удовлетворяют и его подмножества R_1 и R_2 . Поэтому для множеств G_1 и G_2 верно условие а) согласно [6, теорема 7.6], а также условие г) согласно [13, теорема 1] и [14, теорема 4]. Условие б) вытекает из [14, следствие 4.1], [15, теорема 2] и (если в G_i есть элементы конечного порядка) [16, теорема 1.4] с учетом аторичности. Теорема доказана.

Нетрудно доказать (см., например, [17, теорема 6]), что условие $C(p)$ - $T(q)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$, обеспечивает аторичность, поэтому из теорем 3 и 4 (в обозначениях теоремы 1) вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Если множество $R_1 \cup R_2$ удовлетворяет условию малых сокращений $C(p)$ - $T(q)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$, то в группе $F/N_1 \cap N_2$ разрешима проблема сопряженности.

Заключение

Известно [6], что если множества R_i удовлетворяют одному из условий $C(6)$, $C(4)$ - $T(4)$ или $C(3)$ - $T(6)$, то в группе F/N_i разрешима проблема сопряженности. Из данной работы и работы [4] следует, что если к любому из этих условий на множестве $R_1 \cup R_2$ добавить условие аторичности копредставления $\langle A \mid R_1, R_2 \rangle$, то проблема сопряженности будет разрешима и в группе $F/N_1 \cap N_2$. Таким образом, данная работа завершает рассмотрение стандартных условий малых сокращений для аторических копредставлений в применении к вопросу

о разрешимости проблемы сопряженности в $F/N_1 \cap N_2$. В частности, в данной работе получено достаточное условие для разрешимости проблемы сопряженности в $F/N_1 \cap N_2$, использующее только условия малых сокращений, а именно, для разрешимости проблемы сопряженности в $F/N_1 \cap N_2$ достаточно потребовать, чтобы множество $R_1 \cup R_2$ удовлетворяло условию $C(p)-T(q)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$.

Автор благодарна Н.В. Безверхнему за полезные обсуждения во время подготовки этой работы.

Список литературы

1. Miller III C.F. On group-theoretic decision problems and their classification. Princeton University Press, 1971. 106 p. (Annals of Mathematics Studies; no 68.)
2. Baumslag G., Bridson M.R., Miller III C.F., Short H. Fibre products, non-positive curvature and decision problems // Comm. Math. Helv. 2000. No. 75. P. 457–477.
3. Bridson M.R., Miller III C.F. Structure and finiteness properties of subdirect products of groups // Proc. London Math. Soc. 2009. No 98 (3). P. 631–651.
4. Куликова О.В. О проблеме сопряженности в группе $F/N_1 \cap N_2$ // Математические заметки (в печати).
5. Kulikova O.V. On the conjugacy problem in group $F/N_1 \cap N_2$. Режим доступа: arXiv: 1109.1254v1 [math.GR] (дата обращения 01.02.2013).
6. Линдон Р., Шуп П. Комбинаторная теория групп: пер. с англ. Ю.А. Бахтурина / под ред. В.Н. Ремесленникова и В.А. Романькова. М.: Мир, 1980. 447 с. [Lindon R.S., Schupp P.E. Combinatorial group theory. Berlin-Heidelberg-NewYork: Springer-Verlag, 1977.]
7. Ольшанский А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 446 с.
8. Pride S.J. Identities among relations of group presentations // Proceedings of the Workshop on Group Theory from a Geometrical Viewpoint / E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovski, eds. Singapore: World Scientific Publishing, 1991. P. 687–717.
9. Bogley W.A., Pride S.J. Calculating Generators of π_2 // Two-dimensional Homotopy Theory and Combinatorial Group Theory / C. Hog-Angeloni, W. Metzler, A.J. Sieradski, eds. Cambridge: Cambridge University Press. 1993. P. 157–188. (London Math. Soc. Lec. Notes; vol. 197.)
10. Gutiérrez M.A., Ratcliffe J.G. On the second homotopy group // Quart. J. Math. Oxford. 1981. Vol. 32, iss. 1. P. 45–55. DOI: 10.1093/qmath/32.1.45
11. Kulikova O.V. On intersections of normal subgroups in free groups // Algebra and discrete mathematics. 2003. No. 1. P. 36–67.

12. Безверхний Н.В. Разрешимость проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группе с условием $C(6)$ // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Т. 5, № 1. С. 39–46.
13. Безверхний Н.В. Проблема вхождения в циклическую подгруппу в группах с условием $C(3)-T(6)$ // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. (в печати).
14. Безверхний Н.В., Паршикова Е.В. Решение проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах с условием $C(4)-T(4)$. Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп // Межвузовский сборник научных трудов. Тула: изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого. 2001. С. 120–139.
15. Безверхний Н.В. Трансляционные числа и проблема корня в группах с условием $C(3)-T(6)$ // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2012. Вып. 2. С. 5–12.
16. Bogley W.A., Pride S.J. Aspherical relative presentations // Proc. of the Edinburgh Mathematical Society (Series 2). 1992. Vol. 35, iss. 1. P. 1–39. DOI: 10.1017/S0013091500005290.
17. Куликова О.В. Об аторических относительных копредставлениях // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. Журн. 2011. № 11. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/251232.html> (дата обращения 11.11.2011).

On the conjugacy problem in subdirect products

04, April 2013

DOI: 10.7463/0413.0554654

Kulikova O. V.

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russian Federation
olga.kulikova@mail.ru

The conjugacy problem is one of the three fundamental algorithmic problems of the group theory, formulated by M. Dehn in 1912. The negative answer to this problem was obtained by P.S. Novikov in 1955: he created a finitely presented group with an unsolvable word equality problem; so he proved that in the class of finitely presented groups the conjugacy problem is also unsolvable. After that one began to study the conjugacy problem in particular classes of finitely presented groups and their subgroups. In 1971 C.F. Miller III constructed a subdirect product of free groups with the unsolvable conjugacy problem. This subdirect product is almost never finitely presented. In 2000 G. Baumslag et al. proved that there exist torsion-free word hyperbolic groups the direct product of which contains a finitely presented subgroup with the unsolvable conjugacy problem. For a direct product of free and surface groups M.R. Bridson and C.F. Miller III proved in 2009 that any finitely presented subgroup of this direct product has a solvable conjugacy problem. The present paper is a sequel of the paper in which the conjugacy problem for subdirect products was studied with the use of pictures; and, in particular, it was proved that solvability of the conjugacy problem for subdirect products follows from atorcity and the small cancellation condition $C(6)$. Pictures are geometric objects dual to van Kampen diagrams. In 1968 P. Schupp was the first to use van Kampen diagrams to solve the conjugacy problem in a group under the non-metric conditions $C(p)$ and $T(q)$. In this paper it is proved that under atorcity and the condition $C(4)$ - $T(4)$ or $C(3)$ - $T(6)$, the conjugacy problem for subdirect products is solvable. Also in this paper the sufficient condition for solvability of the conjugacy problem for subdirect products is expressed with small cancellation conditions only.

References

1. Miller III C.F. *On group-theoretic decision problems and their classification*. Princeton University Press, 1971. 116 p. (*Annals of Mathematics Studies*; no. 68.).
2. Baumslag G., Bridson M.R., Miller III C.F., Short H. Fibre products, non-positive curvature and decision problems. *Comm. Math. Helv.*, 2000, no. 75, pp. 457–477.
3. Bridson M.R., Miller III C.F. Structure and finiteness properties of subdirect products of groups. *Proc. London Math. Soc.*, 2009, no. 98 (3), pp. 631–651.

4. Kulikova O.V. O probleme sopriazhennosti v gruppe $F/N_1 \cap N_2$ [On the problem of conjugate in the group of $F/N_1 \cap N_2$]. *Matematicheskie zametki* (in print).
5. Kulikova O.V. *On the conjugacy problem in group $F/N_1 \cap N_2$* . Available at: arXiv: 1109.1254v1 [math.GR], accessed 01.02.2013.
6. Lindon R.S., Schupp P.E. *Combinatorial group theory*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-NewYork, 1977. (Russ. ed.: Lindon R., Shup P. *Kombinatornaia teoriia grupp*. Moscow, Mir, 1980. 447 p.).
7. Ol'shanskii A.Iu. *Geometriia opredeliaiushchikh sootnoshenii v gruppakh* [Geometry of defining relations in groups]. Moscow, Nauka, 1989. 446 p.
8. Pride S.J. Identities among relations of group presentations. In: Ghys E., Haefliger A., Verjovski A., eds. *Proceedings of the Workshop on Group Theory from a Geometrical Viewpoint*. Singapore, World Scientific Publishing, 1991, pp. 687–717.
9. Bogley W.A., Pride S.J. Calculating Generators of π_2 . In: Hog-Angeloni C., Metzler W., Sieradski A.J., eds. *Two-dimensional Homotopy Theory and Combinatorial Group Theory*. Cambridge: Cambridge University Press. 1993. (London Math. Soc. Lecture Notes Ser.; vol. 197), pp. 157–188.
10. Gutiérrez M.A., Ratcliffe J.G. On the second homotopy group. *Quart. J. Math. Oxford*, 1981, vol. 32, no. 1, pp. 45–55. DOI: 10.1093/qmath/32.1.45.
11. Kulikova O.V. On intersections of normal subgroups in free groups. *Algebra and discrete mathematics*, 2003, no. 1, pp. 36–67.
12. Bezverkhni N.V. Razreshimost' problemy vkhozhdeniia v tsiklicheskuu podgrupp v gruppe s usloviem $S(6)$ [On the solvability of the general word problem for a cyclic subgroup of a group with condition $C(6)$]. *Fundamental'naia i prikladnaia matematika*, 1999, vol. 5, no. 1, pp. 39–46.
13. Bezverkhni N.V. Problema vkhozhdeniia v tsiklicheskuu podgrupp v gruppakh s usloviem $S(3)-T(6)$ [The problem of occurrence in a cyclic subgroup at the groups with condition $C(3)-T(6)$]. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Bauman* [Science and Education of the Bauman MSTU]. (in print)
14. Bezverkhni N.V., Parshikova E.V. Reshenie problemy vkhozhdeniia v tsiklicheskuu podgrupp v gruppe s usloviem $C(4)-T(4)$. Algoritmicheskie problemy teorii grupp i polugrupp [The solution of problems of integration in a cyclic subgroup of a group with condition $C(4)-T(4)$. Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups]. *Mezhvuzovskii sbornik nauchnykh trudov* [Interuniversity collection of scientific papers]. Tula, Tolstoi TSPU Publ., 2001, pp. 120–139.
15. Bezverkhni N.V. Transliatsionnye chisla i problema kornia v gruppakh s usloviem $S(3)-T(6)$ [Normal forms of elements of infinite order in a group with $C(3)-T(6)$ conditions]. *Izvestiia TulGU. Estestvennye nauki*, 2012, no. 2, pp. 5–12.
16. Bogley W.A., Pride S.J. Aspherical relative presentations. *Proc. Edinburgh Math. Soc. (Series 2)*, 1992, vol. 35, no. 1, pp. 1–39. DOI: 10.1017/S0013091500005290.
17. Kulikova O.V. Ob atoricheskikh otnositel'nykh kopredstavleniiakh [On atorical relative presentations]. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Bauman* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2011, no. 11. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/251232.html>, accessed 11.11.2011.